Lösung zur Aufgabe 4 des dritten Übungsblattes der Vorlesung Informatik III bei Frau Prof. Hammer im WS 2007/08

In Aufgabe 3c war eine Grammatik G gegeben, die dort als *nicht eindeutig* nachgewiesen wurde, in dem zu einem beliebigen Wort $w \in L(G)$ zwei verschiedene Ableitungsbäume aufgezeigt wurden.

$$\begin{aligned} G &= (\{Z, A, B\}, \{0, 1, 2, *, +\}, \\ &\quad \{Z ::= A, Z ::= ZBZ, A ::= 0, A ::= 1, A ::= 2, B ::= *, B ::= +\}, Z) \end{aligned}$$

In Aufgabe 4 sollte eine zu G äquivalente aber *eindeutige* Grammatik G' angegeben werden. Die Eindeutigkeit von G' ist formal zu beweisen.
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass kontextfreie Grammatiken, die **entweder** eine *Linksableitung* **oder** *Rechtsableitung* besitzen, eindeutig sind.
Aus der Grammatik G lässt sich leicht eine solche eindeutige Grammatik G' konstruieren, indem man die Regel $Z ::= ZBZ$ entweder durch $Z ::= ABZ$ oder durch $Z ::= ZBA$ ersetzt. Bei der ersten Möglichkeit haben Wörter $w \in L(G')$ eine Linksableitung, bei der zweiten Möglichkeit eine Rechtsableitung.
Im Folgenden wird nur die erste Möglichkeit betrachtet:

$$\begin{aligned} G' &= (\{Z, A, B\}, \{0, 1, 2, *, +\}, \\ &\quad \{Z ::= A, Z ::= ABZ, A ::= 0, A ::= 1, A ::= 2, B ::= *, B ::= +\}, Z) \end{aligned}$$

erzeugt dieselbe Sprache, nämlich $L(G) = < \{0|1|2\}(\{+|*\}\{0|1|2\})^* > = L(G')$.

Bemerkung. Man erkennt, das ist sogar regulär. Auch wenn G die Form einer kontextfreien Grammatik besitzt, so ist $L(G)$ in der Chomsky-Hierarchie vom Typ 3: $L(G') = L(G) \in \mathcal{L}_3$

Die Grammtik G' ist eindeutig, d.h. $Z \vdash x$ mit $x \in L(G') \Rightarrow$ es gibt genau einen Strukturbaum für die Ableitung.

Beweis mit Induktion über $|x|$.

$|x| = 1$ **Induktionsanfang:** $x \in \{0, 1, 2\}$ Die Ableitung hat notwendig die Form $Z \vdash A \vdash x$, also gibt es nur einen Strukturbaum.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $\tilde{x} \in L(G')$ ist gezeigt, dass es nur eine einen Ableitungsbaum gibt.

$|x| > 1$ **Induktionsschritt:** Der erste Schritt jeder Ableitung ist notwendig $Z \vdash ABZ \vdash \ldots \vdash x$. Aus A ist in einem Schritt ein Zeichen aus $\{0, 1, 2\}$ ableitbar, aus B ist in einem Schritt ein Zeichen aus $\{+, *\}$ ableitbar. Damit ist das Wort $x = x_1 x_2 \tilde{x}$ mit $x_1 \in \{0, 1, 2\}$ und $x_2 \in \{*, +\}$ und $Z \vdash \tilde{x}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es genau einen Strukturbaum für die letztere Ableitung, also auch nur einen Strukturbaum für x

□