

**Der hyperbolische Raum
zur Datenvisualisierung
– Mathematische Grundlagen –
– und Algorithmen –**

Diplomarbeit

eingereicht bei

Prof. Dr. Barbara Hammer
und
Prof. Dr. Jürgen Dix

Institut für Informatik
Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau
Technische Universität Clausthal

4. Juli 2008

vorgelegt von
Robert F. P. Hartmann
Matrikelnummer: 302300



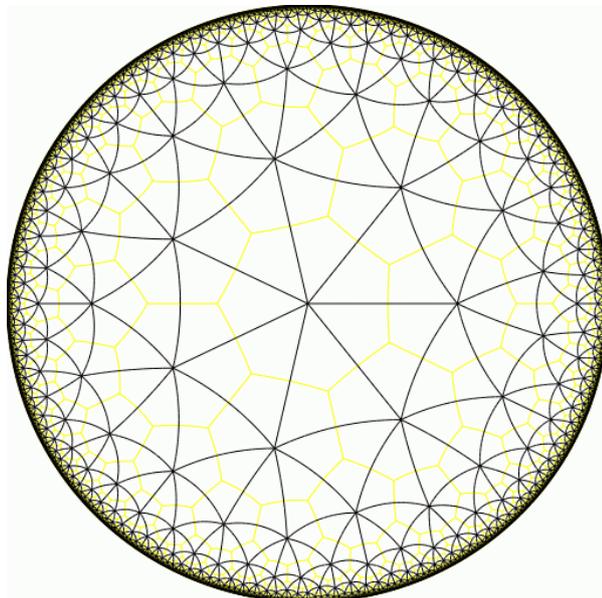
TU Clausthal

Diplomarbeit

**Der hyperbolische Raum
zur Datenvisualisierung
– Mathematische Grundlagen –
– und Algorithmen –**

Robert F.P. Hartmann

4. Juli 2008



[3, 7]-Parkettierung (schwarz), duale [7, 3]-Parkettierung (gelb)

Dieses Dokument wurde mit den Windowsprogrammen

- **TeXNicCenter**, Version 1 Beta 7.01, <http://www.texniccenter.org/>
- **MiKTeX**, Version 2.4, <http://www.miktex.org/>

im Textsatzsystem **L^AT_EX 2 ϵ** unter Verwendung des L^AT_EX-Paketes **Hyperref** gesetzt.

Die Graphiken in diesem Dokument wurden erstellt und bearbeitet mit:

- L^AT_EX-Paket **TikZ&PGF**, Version 2.00, <http://sourceforge.net/projects/pgf/>
- **GCLC/WinGCLC**: Geometry Constructions → L^AT_EX Converter, Version 2008, <http://www.matf.bg.ac.yu/~janicic/gclc/>
- **TpX**: TeX drawing tool, Version 1.4, <http://tpx.sourceforge.net/>
- **Inkscape**, Version 0.42.2, <http://inkscape.org/>
- **Gimp**, Version 2.2.17, <http://www.gimp.org/>

BLAISE PASCAL (1623 - 1662) in **Von der Methode der geometrischen, d.h. methodischen und vollkommenen Beweise**^a:

„Ich will also das, was ein Beweis ist, [...] verständlich machen [...] Vorher muß ich aber die Idee von einer noch höheren und vollkommeneren Methode geben, wohin die Menschen jedoch niemals gelangen können: denn was über die Geometrie geht, geht über uns hinaus; trotzdem ist es notwendig, etwas davon zu sagen, obgleich es unmöglich zu verwirklichen ist. Diese wahre Methode, welche Beweise in höchster Vollendung führen würde, wenn es möglich wäre, sie zu erreichen, würde in zwei Hauptsachen bestehen:

Einmal, keinen Begriff zu verwenden, dessen Sinn man nicht vorher deutlich erklärt hätte, zum anderen, niemals eine Behauptung aufzustellen, die man nicht aus schon bekannten Wahrheiten bewiesen hätte; d.h. mit einem Wort, alle Begriffe zu definieren und alle Behauptungen zu beweisen.“

^a Zitat aus KARL VORLÄNDER: **Geschichte der Philosophie, Band 4, Philosophie der Neuzeit**; Rowohlt Taschenbuchverlag Band 261/62, München 1966

Mögen wissenschaftliche Erkenntnisse
nur friedlich genutzt werden!

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Clausthal-Zellerfeld, 4. Juli 2008

Unterschrift:

(Robert Hartmann)

Inhaltsverzeichnis

Versicherung der selbstständigen Arbeit	i
1. Einleitung, Aufgabenstellung	1
1.1. Einleitende Worte	1
1.2. Aufgabenstellung und Leistungen der Arbeit	5
2. Ein Axiomensystem der Geometrie	7
2.1. Die „ABC-Problematik“	7
2.2. Aufstellung von Axiomensystemen	8
2.3. Geschichtliches zur Geometrie	8
2.4. Übersicht über ein Axiomensystem	9
2.4.1. Die projektiven Axiome (I. Gruppe)	10
2.4.2. Die Kongruenzaxiome (II. Gruppe)	12
2.4.3. Das Ähnlichkeitsaxiom (III. Gruppe)	13
2.4.4. Das Vollständigkeitsaxiom	14
2.5. FELIX KLEINS Worte über das Wesen der geometrischen Axiome	15
3. Geometrie auf einem Träger	16
3.1. Krümmung einer Fläche	18
3.2. Zuordnung: gekrümmte Flächen + Geometrien	23
3.2.1. FELIX KLEINS Worte über sphärische und elliptische Geometrie	24
3.3. Dreiecke auf ungekrümmten, negativ gekrümmten und positiv gekrümmten Flächen	24
4. Modelle der hyperbolischen Ebene im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3	29
4.1. Abstandsbestimmung	29
4.1.1. Exkurs: EUKLIDISCHER und sphärischer Abstand	30
4.2. MINKOWSKI-Modell – ein räumliches Modell	31
4.2.1. Abstandsbestimmung und geometrische Operationen im MINKOWSKI-Modell	34
4.3. KLEINSches Modell: Scheibe	42
4.3.1. Beziehung der KLEINSchen-Scheibe zum MINKOWSKI-Modell	43
4.4. POINCARÉsches Modell: Scheibe	47
4.4.1. Beziehung der POINCARÉschen-Scheibe zum MINKOWSKI-Modell	47
4.4.2. Beziehung der POINCARÉschen-Scheibe zur KLEINSchen-Scheibe	54
4.5. POINCARÉsches Modell: Obere-Halbebene	55
4.5.1. Beziehung des Modells Obere-Halbebene zum MINKOWSKI-Modell	55
4.5.2. Beziehung der Scheibenmodelle zum Modell der oberen Halbebene	57

4.6. Umrechnungen und Metriken im Überblick	58
4.7. Vor- und Nachteile der betrachteten Modelle	61
5. Parkettierung der hyperbolischen Fläche	63
5.1. Triangulierungen	63
5.2. Reguläre Triangulierung der hyperbolischen Ebene im POINCARÉ-Modell	67
5.2.1. MÖBIUS-Transformationen	67
5.3. Reguläre Triangulierung der hyperbolischen Ebene im MINKOWSKI-Modell	71
5.3.1. Konstruktion eines ersten Dreiecks im MINKOWSKI-Modell	71
5.3.2. Der Netz-Generator	81
5.3.3. Navigation im Netz	96
6. Darstellung von Dreiecksnetzen in der POINCARÉ-Scheibe	103
6.1. Grundlagen der EUKLIDischen Kreisgeometrie	104
6.2. Komplex-homogene Koordinaten	108
6.2.1. Transformationen mit komplex-homogenen Koordinaten	109
6.2.2. Imaginäre Kreispunkte und Doppelverhältnis	109
6.3. Algorithmen für die POINCARÉ-Scheibe	112
7. Zusammenfassung, Ausblick, und Dank	115
7.1. Zusammenfassung und Ausblick	115
7.2. Danke	116
Anhang	
A. Pseudocode für den Netzgenerator	117
B. Großhyperbel und Großkreis	125
B.1. Parametrisierungen	125
B.1.1. Parametrisierung des Großkreises	125
B.1.2. Parametrisierung der Großhyperbel	126
B.2. Winkelbestimmung	126
B.2.1. Sphärischer Winkel	127
B.2.2. Hyperbolischer Winkel im MINKOWSKI-Modell	127
Literaturverzeichnis	129
Stichwortverzeichnis	135

1. Einleitung, Aufgabenstellung

1.1. Einleitende Worte

In den letzten Jahrzehnten, in denen die Computer immer schneller wurden und Speicherplatz zugleich immer günstiger wurde, wuchs nicht nur die Anzahl der von den Maschinen zu verarbeitenden Daten sondern auch der Wunsch der Anwender nach komfortabler Darstellung derselben.

In der Computer-Spiele-Industrie wird diesem Wunsch nach komfortabler Darstellung seitens der Computer-Spieler durch immer bessere 3D-Simulation von physikalischen Ereignissen der realen Welt, z.B. Bewegung der Haare oder Reflexion von indirekter Beleuchtung, nachgekommen. Die berechnete Datenflut kann hier teilweise durch eine möglichst natürliche Darstellung versteckt werden, die es dem Menschen erlauben soll, möglichst viele seine Sinne intuitiv zu gebrauchen.

Das Problem ist jedoch deutlich anders gelagert, wenn es um die Darstellung abstrakter Daten geht.

Abstrakte Daten fallen in fast allen Bereichen der *Wissenschaft, Technik, Life Sciences*¹ usw. an. Kaum eine Wissenschaftsdisziplin kommt heute noch ohne Unterstützung durch den Computer aus.

So verwundert es nicht, dass nicht nur im Spiele-Sektor die Daten, die von immer komplexeren oder raffinierteren Methoden ver- oder bearbeitet werden, rapide anwachsen sondern auch in allen anderen Bereichen des „digitalen Lebens“.

Es gibt Statistiken, welche besagen, dass sich die Menge elektronisch verfügbarer Daten etwa alle 20 Monate verdoppelt. Dieses exponentielle Wachstum kann man in nahezu allen Lebensbereichen beobachten, sei es das Web (Internet), elektronische Datenbanken im Unterhaltungsbereich, Sensordaten bei technischen Systemen, Messungen in biomedizinischen Bereichen, Daten im Bereich der Intensivmedizin etc.

Diese Datenflut stellt völlig neue Anforderungen an die Benutzer: Es ist aufgrund der schiereren Menge der Daten in der Regel unmöglich, alle Daten überhaupt anzusehen – geschweige denn manuell sinnvolle Schlüsse aus ihnen zu ziehen.

¹ Unter *Life Sciences* versteht man Forschungsrichtungen und Ausbildungsgänge, die sich mit Prozessen oder Strukturen von Lebewesen beschäftigen oder an denen Lebewesen beteiligt sind. Außer der eigentlichen *Biologie* umfasst sie auch verwandte Bereiche, wie *Biochemie, Molekularbiologie, Biophysik, Bioinformatik* oder *Biodiversitätsforschung* – Die Biodiversitätsforschung betrachtet die Biodiversität, das ist die biologische Vielfalt, d.h. die Vielfalt der Arten auf der Erde, die genetische Vielfalt sowie die Vielfalt von Ökosystemen. – Das Methodenspektrum von *Life Science* kann fast das gesamte naturwissenschaftliche Geräte- und Analyseninventar umfassen und auch in Bereiche der Human- und Sozialwissenschaften hineinreichen. Die methodische Arbeit und das theoretische Rüstzeug ist demzufolge häufig stark interdisziplinär, hat aber einen klaren Bezug zu Lebewesen.

Völlig neue Anforderungen und Probleme an Methoden der Aufbereitung und Präsentation von Daten resultieren daraus: Während früher eine effiziente und persistente Speicherung von Daten eines der Hauptaugenmerke war, verschiebt sich der Schwerpunkt immer mehr zu kompakten und intelligenten Präsentationen der Daten, so dass der Benutzer trotz der Datenflut die für ihn relevante sinnvolle Information, also die Daten von Interesse, finden kann.

Eine besondere Anforderung an digitale Systeme und ihre Entwickler stellt sich häufig dadurch, dass die Daten auf Grund ausgereifter Sensorik und Messtechnik immer feiner aufgelöst werden können. Mathematisch entspricht dieses einer rapiden Zunahme der Datendimensionalität.

Wissenschaftliche Daten sind heute selten auf drei Dimensionen beschränkt, die direkt visualisiert werden können, sondern umfassen mehrere hundert oder tausend Dimensionen – etwa bei Analysen von Massenspektren oder bei Zeitreihenanalysen der fein aufgelösten zeitlichen Signale von EEG, EKG. Gerade auch hier ist dennoch der Wunsch nach einprägsamer visueller Darstellung gewachsen, die allerdings so ohne weiteres nicht möglich ist. Sicherlich ist es immer möglich wissenschaftliche Daten in Form von Tabellen und Zahlenkolonnen aufzuführen. Diese Art der Darstellung ist jedoch für den menschlichen Betrachter vor dem Bildschirm weder einprägsam noch übersichtlich. Es stellt sich hier also die Aufgabe der adäquaten Visualisierung großer hochdimensionaler Datenmengen. Dabei ist es völlig unabhängig, ob die geraume Anzahl von Daten in einer **Datenbank**, in einem **vernetzten Datenbanksystem**, einem ganzen **Datawarehouse** oder gänzlich anderen Systemen digital abgelegt und verwaltet wird: **Es stellt sich immer die Frage nach der intuitiven Datenrepräsentation und Visualisierung.**

Datenrepräsentation und Visualisierung stellen ein zentrales Gebiet des **Data-Minings**, des „Daten-Bergbaus“, dar. Umgekehrt ist das Data-Mining eine der zentralen Techniken im Informationszeitalter, um die verfügbaren massiven elektronischen Daten für den Menschen überhaupt noch zugänglich zu machen.

So wie die Bergleute, unterstützt durch Modellvorstellungen über den Aufbau der Erde der Kollegen aus der Geophysik, mit schweren Maschinen nach Bodenschätzen graben, muss sich heute der informationsverarbeitende Mensch durch vorhandene Datenberge – z.B. das Internet – auf der Suche nach den für ihn nützlichen Informationen graben.

Heute wird vermehrt **Data-Mining** betrieben, um an relevante Informationen zu gelangen.

Intelligente Data-Mining Methoden sind hier unverzichtbar und begründen einen entscheidenden Wettbewerbsvorteil für unterschiedlichste Bereiche, sei es im e-Business, der Biotechnologie oder der Aquisie von Fördermitteln etc:

Denn heute wird nicht mehr nur nach dem klassischen Prinzip **EVA** – Eingabe, Verarbeitung, Ausgabe – gearbeitet.

Im Rahmen dieser Arbeit geht es um einen zentralen Aspekt des Data-Minings: Die Visualisierung von massiven, hochdimensionalen Daten in einem dafür geeigneten – gegebenenfalls nicht-EUKLIDischen – Format.

Genauer soll eine Methode mathematisch und algorithmisch unterlegt werden, die in letzter Zeit zur Visualisierung von grossen Datenbanken etwa im Bereich von Textdatenbanken

des Internets benutzt wird und sich als sehr vielversprechend erwiesen hat: Es geht um sogenannte **hyperbolische selbstorganisierende Karten**.

Der Begriff einer Karte ist dabei durchaus historisch zu sehen:

Das Wissen der Kartographie, d.h. Wissen wie man Karten erstellt, hat Jahrhunderte lang wirtschaftliche und politische Auswirkungen gehabt. Gute Seekarten konnten gar über Menschenleben entscheiden: Seeleute mit guten Karten konnten besser navigieren, konnten die Menge der benötigten Nahrungsmittel besser schätzen als Seeleute mit schlechten oder gefälschten Karten.

Viele kennen sicherlich das Problem, dass sie in einer Internet-Suchmaschine ein bestimmtes Suchwort eingeben aber zunächst nicht direkt das finden, was sie eigentlich gesucht hatten. Anders als in der realen uns umgebenden Welt, auf deren zeitlich veränderlichen häufig dreidimensionalen Informationen unsere Sinnesorgane angepasst sind, geht es hier allerdings um abstrakte und virtuelle Informationen, die geeignet repräsentiert werden sollen. Genau für dieses Problem wäre eine visuelle zweidimensionale Karte hilfreich: Eine Karte, die das Ergebnis einer „selbstständigen Datenverarbeitung“ ist, in der ähnliche Informationen nahe beieinander und unähnliche Informationen möglichst weit auseinander liegen, und die es ermöglicht, innerhalb der Daten visuell zu navigieren.

Eine Herausforderung ist es dabei, eine visualisierbare zweidimensionale Karte topologieerhaltend an die gegebenen abstrakten Daten, die gegebenenfalls in einem völlig anderen, evtl. nicht-EUKLIDischen Raum liegen, anzugleichen.

In diesem Bereich gibt es prominente und sehr erfolgreiche Modelle des Data-Mining:

Das **KOHONEN-Netz**, welches auch **KOHONEN-Karte** oder **selbst-organisierende Karte** (*engl. self-organizing map (SOM)*) genannt wird, wurde von TEUVO KOHONEN² entwickelt. Die Grundidee der SOM besteht darin, eine Struktur von zusammenhängenden Verarbeitungseinheiten, den Neuronen, zu erstellen, die um das Signal konkurrieren. Bei der Entwicklung der SOM wurden dabei Ideen der Neurobiologie, insbesondere der vielfältig untersuchten Kartenbildung im menschlichen visuellen oder sensomotorischen Cortex übernommen und ein entsprechend einfaches, kognitiv plausibles Modell entwickelt, das aufgrund seiner Einfachheit und Leistungsfähigkeit weite Verbreitung fand. Die SOM definiert eine (nicht lineare) Abbildung von vektoriellen Eingabedaten auf ein in der Regel zweidimensionales Feld von Knotenpunkten. Die Abbildung wird so berechnet, dass die topologischen Zusammenhänge im Eingaberaum erhalten bleiben. Darüber hinaus spiegelt die Abbildung auch die lokale Datendichte wider: Bereiche des Eingabedatenraumes, die durch mehr Daten repräsentiert werden, werden auf größeren Bereichen der SOM

² TEUVO KOHONEN (* 11. Juli 1934) ist ein finnischer Ingenieur. Er ist emeritierter Professor der Akademie von Finnland und der Technischen Universität Helsinki, deren einflussreiches *Neural Networks Research Centre* er 1994 gründete. KOHONENS Forschungsgebiet umfasst die Theorie der Selbstorganisation, Assoziativspeicher, Neuronalen Netze bzw. Künstlichen Neuronalen Netze und Mustererkennung. Er erhielt verschiedene Auszeichnungen:

- IEEE Neural Networks Council Pioneer Award (1991)
 - International Neural Network Society Lifetime Achievement Award (1992)
 - Technical Achievement Award der IEEE Signal Processing Society (1995)
 - King-Sun Fu Prize der International Association for Pattern Recognition (1996)
-

abgebildet. Dieses Modell kann direkt zur Visualisierung hochdimensionaler Daten im EUKLIDischen Raum verwandt werden. **Zahlreiche Anwendungen der SOM** reichen von der **Telekommunikation** und **Robotik** über die **Visualisierung großer Web- und Textdaten** bis hin zur **Datenbionik**.

Obwohl die Struktur des Netzes willkürlich gewählt werden kann, unterstützen die meisten Implementationen nur rechteckige oder lineare Karten. Klassische SOMs verbleiben im EUKLIDischen zweidimensionalen Raum. Dieses kann allerdings Probleme bereiten: Die inhärente Struktur etwa von Textdatenbanken oder Webseiten obliegt in der Regel keiner EUKLIDischen Nachbarschaftsstruktur. Es ist bekannt, dass die Vernetzung etwa von Webseiten oder sozialen Beziehungen charakteristische Eigenschaften vorweisen, die sehr viel besser durch sogenannte **skalenfreie Netze** beschrieben werden können. Diese zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass einige Elemente einen sehr hohen Verknüpfungsgrad aufweisen und die durchschnittliche Pfadlänge zwischen beliebigen Knoten sehr klein ist. Es ist nicht zu erwarten, dass derartige topologischen Zusammenhänge adäquat in einem EUKLIDischen Raum dargestellt werden können, d.h. jede Visualisierung solcher Daten durch eine Standard-SOM unterliegt notwendigerweise topologischen Verwerfungen und stellt die Wirklichkeit nur verzerrt dar.

HELGE RITTER³ führte 1999 in seiner Veröffentlichung „Self-Organizing Maps on non-euclidean Spaces“ [Rit1999] eine Erweiterung der SOM ein, bei der das Neuronengitter in einen hyperbolischen Raum eingebettet wird: Die **hyperbolic self-organizing map (HSOM)**.

Die Nutzung des **hyperbolischen Raumes**, der eine allseitige **negative Krümmung** besitzt und wegen des nicht gültigen EUKLIDischen Parallelenaxioms schon von mathematischem Interesse ist, ermöglicht die Verarbeitung von Daten, die beispielsweise eine Baumstruktur aufweisen und daher einen exponentiell wachsenden Speicherplatz und zur sinnvollen visuellen Darstellung einen ebenso exponentiell wachsenden Raum benötigen. Die Anforderung für die Darstellung kann der EUKLIDische Raum, in der die SOM arbeitet, nicht liefern, denn der Platz im EUKLIDische Raum wächst nur linear und keinesfalls exponentiell an. Das bedeutet, der hyperbolische Raum offeriert eine ideale Möglichkeit, komplexe nicht-EUKLIDische Datenstrukturen wie etwa Webdatenbanken oder Textsammlungen adäquat in einer intuitiven Weise darzustellen.

Es ist bemerkenswert, dass der hyperbolische Raum in der Literatur zur Datenvisualisierung auch an anderen Stellen rege benutzt wird. Etwa zur Einbettung von phylogenetischen Bäumen⁴ der Biologie ist er eine der gebräuchlichen Methoden.

³ HELGE RITTER (* 17. März 1958 in Naila) ist ein deutscher Neuroinformatiker. RITTER studierte Mathematik und Physik. Er promovierte an der TU München im Bereich der theoretischen Physik. Als Thema wählte er „Selbstorganisierende Neuronale Karten“. Nach einem Gastaufenthalt bei TEUVO KOHONEN in Helsinki folgte er nach mehreren verschiedenen Aufenthalten einem Ruf an die Universität Bielefeld, wo er seit 1990 die Arbeitsgruppe Neuroinformatik leitet. In Fachkreisen bekannt wurde RITTER vor allem durch seine Arbeiten auf dem Gebiet Self-Organizing Maps, wo er den Begriff der Hyperbolischen Self-Organizing Map einführte. Mit dem *SEL Alcatel Forschungspreis Technische Kommunikation* wurde RITTER 1999 ausgezeichnet. Und 2001 erhielt er den höchstdotierten deutschen Förderpreis, den *Leibniz-Preis*.

⁴ Ein phylogenetischer Baum ist eine Struktur, der die evolutionären Beziehungen zwischen verschiedenen Arten oder anderen Einheiten, von denen man vermutet, dass sie einen gemeinsamen Vorfahren besitzen, darstellt. In einem phylogenetischen Baum repräsentiert jeder Knoten mit Vorfahren den

Die Bedeutung des hyperbolischen Raums zur Datenvisualisierung wird auch dadurch unterstrichen, dass nahezu jeglicher Gebrauch in diesem Zusammenhang in den USA mit Patenten belegt ist.

In dieser Arbeit geht es um Grundlagen im Zusammenhang mit der Datenvisualisierung im hyperbolischen Raum und spezieller der Darstellung von Daten durch eine hyperbolische SOM (HSOM). Allgemein geht es um die Frage: **Wie kann man den hyperbolischen Raum zur Darstellung komplexer Daten auf EUKLIDischen Monitoren benutzen?**

In den Arbeiten von Helge Ritter wurde bereits ein System vorgestellt, das erfolgreich implementiert wurde und sich in mehreren Anwendungen als sehr vielversprechend erwies. Das Ergebnis Ritters Arbeit ist ein Modell zur Darstellung komplexer Daten, die eingebettet in den hyperbolischen Raum sind. Dieses ist bezogen auf die zugrundeliegenden mathematischen Grundlagen notwendig beschränkt. Versucht man Ritters Arbeit nachzuvollziehen, stößt man allerdings auf einige Probleme: In den Originalarbeiten zur HSOM wird im Wesentlichen nur ein Modell verwandt, das eine Visualisierung zwar zulässt, aber numerische Instabilitäten an Randbereichen aufweist sowie nur eine mässige elegante Formulierung zulässt.

Es gibt im Rahmen der mathematischen Geschichte mehrere Modelle des hyperbolischen Raums, die jeweils Vor- und Nachteile bezogen auf die Möglichkeit der Visualisierung, numerische Stabilität, Handhabbarkeit geometrischer Operationen etc. aufweisen.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die mathematischen Hintergründe der HSOM strukturiert aufzuarbeiten bzw. herzuleiten, so dass eine Formulierung der mathematischen Operationen in jedem – und nicht nur in einem – der gebräuchlichen Modelle des hyperbolischen Raums möglich wird. Davon ausgehend soll dann eine elegante algorithmische Umsetzung vorgeschlagen werden, die numerische Stabilität erwarten lässt.

Aufgrund des Umfangs dieser Bereiche soll zwar dabei auf eine konkrete Implementation verzichtet werden, jedoch die Algorithmik wird in Form von Pseudocodes vorgestellt.

1.2. Aufgabenstellung und Leistungen der Arbeit

Wie bereits erwähnt, besteht die Aufgabenstellung dieser Arbeit in einer systematischen Aufarbeitung der mathematischen Hintergründe im Zusammenhang mit hyperbolischen Karten, sowie einer davon abgeleiteten Algorithmik zu einer numerisch stabilen Umsetzung der Verfahren. Hintergrund ist, dass in der Literatur zu hyperbolischen selbstorganisierenden Karten in dem Sinne nur unzureichend auf die geometrischen Modelle eingegangen wird, die nötig sind, um eine HSOM darzustellen, als dass im Wesentlichen ein konkretes Modell des hyperbolischen Raums verwandt wird. Alternative Darstellungen werden erwähnt, allerdings ohne die konkreten Umrechnungen, d.h. ohne dass die dazugehörigen kommutativen Diagramme aller für die Umsetzung der HSOM benötigten Operationen ausgeführt werden. Die in der Literatur vorgeschlagene HSOM ist zwar funktionsfähig, und bezogen auf die Visualisierung optimiert worden, aber aufgrund des dort gewählten

nächsten gemeinsamen Verwandten dieser Vorfahren. Die Länge der Kanten, das sind die Verbindungen zwischen den Knoten, entspricht meist der geschätzten Zeit, in der sich die Arten separiert haben, oder der Anzahl der Mutationen, die während dieser Entwicklung passierten.

Modells lassen sich etwa numerische Instabilitäten erwarten, und die Generierung der Gitter ist nicht unbedingt mathematisch elegant.

In dieser Diplomarbeit werden alle gebräuchlichen Modelle des hyperbolischen Raums berücksichtigt in dem Sinn, dass für jedes Modell alle für die HSOM benötigten Operationen spezifiziert werden und so ein Wechsel zwischen den Modellen möglich wird. Damit kann je nach Anforderung in unterschiedlichen Modellen gerechnet werden. Es ergibt sich so eine elegante Formulierung insbesondere auch des Gittergenerators sowie ein deutlich flexibleres geometrisches Gesamtpaket. Auf dieser Basis wäre eine tatsächliche Umsetzung problemlos möglich, allerdings aufgrund des Umfangs deutlich jenseits dieser Arbeit.

Die Aufgabe dieser Diplomarbeit besteht also in:

- der präzisen geometrischen Fundierung der HSOM,
- der Beschreibung von Schnittstellen zwischen verschiedenen Modellen zur Repräsentation der hyperbolischen Ebene,
- der Beschreibung der Vor- und Nachteile der Repräsentationen für eine Visualisierung,
- der Spezifikation der nötigen Funktionalität eines Gittergenerators
- der Erarbeitung von zugehörigen exakten Formeln sowie dem algorithmischen Design.

Der hyperbolische Raum stellt mathematisch auch deswegen ein interessantes Objekt dar, weil seine Entdeckung unter anderem den Nachweis – dass nämlich das EUKLIDISCHE Parallelenaxiom tatsächlich als Axiom der EUKLIDISCHEN Geometrie notwendig ist – möglich machte - und somit ein historischer mathematischer Streit beendet wurde. Dementsprechend ist der hyperbolische Raum eingeordnet in historisch wichtige Schriftstücke, in denen versucht wird, zentrale Begriffe der Geometrie exakt axiomatisch zu fassen. Um diesen Hintergrund deutlich zu machen, steht am Anfang der Arbeit ein ‘historisches’ Kapitel, in dem Grundbegriffe der Geometrie axiomatisch eingeführt werden. Es schließt sich ein Kapitel an, in dem der zentrale Begriff der Krümmung diskutiert wird – der hyperbolische Raum zeichnet sich durch eine konstant negative Krümmung aus. Danach folgt in drei Kapiteln das Herzstück der Arbeit: Es werden die unterschiedlichen Modelle des hyperbolischen Raums, die in der Literatur gebräuchlich sind, vorgestellt, und es werden Äquivalenzen zwischen diesen Räumen hergeleitet in dem Sinne, dass alle für die hyperbolische SOM relevanten Basisoperationen in jedem dieser Modelle möglich werden sowie eine Umrechnung zwischen den Räumen jederzeit möglich ist. Die dazu benötigten Formeln konnten dabei nur zum Teil der Literatur entnommen werden, zu einem grossen Teil mussten sie hergeleitet werden. In einem weiteren Kapitel wird darauf aufbauend ein eleganter und numerisch stabiler Gittergenerator hergeleitet sowie präzisiert, wie dieses auf dem Bildschirm konkret visualisiert werden kann.

2. Ein Axiomensystem der Geometrie

Dieses Kapitel ist vor dem Hintergrund der geschichtlichen Einführung des hyperbolischen Raums in die Mathematik zu sehen: Es wurde darum gerungen, wie das anschauliche Gebiet der Geometrie axiomatisch gefasst werden kann, ohne sich durch die Anschauung irreführen zu lassen. Besonders deutlich wird dieses durch das Parallelenaxiom, für das lange unklar war, ob es als Axiom benötigt wird, oder ob es aus den anderen Axiomen bereits folgt. Die Entdeckung des hyperbolischen Raums konnte hier Klarheit schaffen. In einem historischen Rückblick sollen in diesem Kapitel viele Grundbegriffe der Geometrie, die zum genauen Verständnis nötig sind, präzise eingeführt werden.

Kapitelinhalt. In diesem Kapitel werden zunächst ganz kurz ein paar generelle Anmerkungen zur (axiomatischen) Herangehensweise der Mathematik gemacht und etwas Allgemeines über Axiomensysteme berichtet, dann wird ein Einblick in die Geschichte der Geometrie gegeben. Im Hauptteil dieses Kapitels wird ein Axiomensystem für Geometrie vorgestellt, in welchem dann auch die für die weitere Arbeit wichtigen Begriffe wie z.B. Gerade, Strecke, Kreis, Dreieck eingeführt werden.

2.1. Die „ABC-Problematic“

Es gibt grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten sich mit mathematischen Problemen auseinanderzusetzen. Als Erklärung mag die Formulierung von HERBERT ZEITLER aus [Zei1970] dienen, er schreibt wörtlich¹:

Diese Problematik erläutern wir am Beispiel eines Spielers, etwa des Schachspieles.

Die Grundelemente des Schachspiels sind Figuren. Da gibt es Springer, Türme, . . . Was wir uns unter diesen Worten vorstellen, ist für den Spielablauf völlig belanglos. Der Springer braucht nicht unbedingt das Aussehen eines Pferdekopfes zu haben. Es ist auch gleichgültig, ob die Figuren aus Holz oder Elfenbein hergestellt sind. Besonders routinierte Spieler verzichten sogar völlig auf die Verwendung solcher Figuren, sie spielen „blind“.

Dies zeigt, daß das wahre Wesen des Spiels in seinem logischen Aufbau liegt. Die Grundlage dazu bildet ein System von Spielregeln, das die Funktionen der

¹Auf Seite 90 seines Buches [Zei1970]

einzelnen Figuren erfaßt. Da ist auch genau festgelegt, was man unter dem „Schach“ versteht, unter dem „Matt“, ...

Kennt man alle Regeln, so kann man „blind“ spielen. Die wirklichen Figuren stellen dann nur noch eine Veranschaulichung, eine Interpretation dar.

Ganz genauso ist es in der Mathematik, speziell in der Geometrie. Mit einem System von Spielregeln, den Axiomen, betreibt man abstrakte Geometrie, man spielt „blind“. Für eine solche Geometrie gibt es dann verschiedenartige Veranschaulichungen, verschiedene Modelle. Man kann sagen, daß jedes mathematische Gebiet heute nach drei Gesichtspunkten behandelt wird. Wir sprechen kurz von der ABC-Problematik.

- A. Aufstellen eines Axiomensystems (System von Spielregeln)
- B. Abstrakte Geometrie („Blindspiel“)
- C. Modellgeometrie (Spiel mit Figuren)

2.2. Aufstellung von Axiomensystemen

Axiome – damit auch ganze Axiomensysteme – lassen sich nach [Zei1970] auf zwei diametrale², d.h. völlig verschiedene, Arten aufstellen.

Heteronome Systeme:

In den beobachtenden Wissenschaften sucht man nach Gesetzmäßigkeiten, die hinter mehr oder weniger anschaulichen, z.B. physikalischen, Gegebenheiten stecken. Axiome werden aus diesen Gesetzmäßigkeiten gleich einem *logischen Skelett* herauspräpariert. Offensichtlich steht hier am Anfang ein Modell.

Autonome Systeme:

Solche Axiomensysteme werden willkürlich aufgestellt; so ist es möglich ein *privates* Regelsystem für eine irgendwie *persönliche* Geometrie aufzustellen. Daraus wird dann eine abstrakte Geometrie entwickelt, und zum Schluss erst sucht man nach einem Modell, nach einer Veranschaulichung (*Problem C* der oben genannten ABC-Problematik). Durch solch ein Vorgehen erhält die Mathematik einen schöpferischen³ Aspekt.

2.3. Geschichtliches zur Geometrie

Das Werk *Elemente* des griechische Geometers EUKLID⁴ galt über 2000 Jahre als unantastbare Grundlage der Geometrie. Es diente als Vorbild für das (moderne) Streben

² Das Adjektiv diametral ist abgeleitet von Diameter (von griechisch *σηαιρω* = „Teilen“ und *μετρο* = „Messen“).

³ „Im Anfang war das Wort [...] Alles ist durch das Wort geworden, und ohne das Wort wurde nichts, was geworden ist.“ Bibel, NT, Johannes: 1,1 + 1,3

⁴ EUKLID VON ALEXANDRIA (griechisch *Ευκλειδης* Eukleides; latinisiert Euclides; * ca. 365 v. Chr. vermutlich in Alexandria oder Athen; † ca. 300 v. Chr.) war ein griechischer Mathematiker. Er beschäftigte sich neben Mathematik mit Naturphänomenen, z.B. der Physik und Astronomie. Auch befasste er sich mit Musiktheorie (*Die Teilung des Kanon*).

nach Formalisierung und Axiomatisierung. In diesem Werk führte EUKLID nicht nur sehr viele Definitionen, die mit den Dingen vertraut machen sollten, auf; sondern er stellte den Definitionen fünf der Geometrie eigentümlichen Axiome voran, die der Anschauung entnommen waren. Auf diese Anschauung durfte an späterer Stelle dann jedoch nicht mehr direkt Bezug genommen werden. Beweise sollten sich nur auf die in den Axiomen ausgesprochenen Voraussetzungen stützen.

EUKLID fordert (Siehe z.B. [Moh1930]):

1. dass man von jedem Punkte zu jedem Punkte eine Gerade ziehen kann;
2. und dass man jede begrenzte Gerade ununterbrochen verlängern kann;
3. und dass man um jeden Mittelpunkt mit jedem Radius einen Kreis beschreiben kann;
4. und dass alle rechten Winkel einander gleich sind;
5. (Parallelenaxiom) und wenn eine Gerade zwei andere Geraden schneidet und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so sollen jene beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, deren Summe kleiner als die Summe zweier rechter Winkel ist.

Das Bestreben von DAVID HILBERT⁵ war es, die bislang sehr der Anschaulichkeit verhaftete, noch im Wesentlichen auf EUKLID zurückgehende Geometrie möglichst vollständig von irgendwelchen Begriffen aus der Anschauungswelt abzulösen und rein axiomatisch zu begründen. Eine solche axiomatische Begründung erschien HILBERT und vielen mathematischen Zeitgenossen unbedingt notwendig, da die zuvor verwendeten Begriffe aus der Anschauungswelt nicht die notwendige mathematische Exaktheit hatten und das darauf erbaute mathematische Gebäude der Geometrie somit auf „wackeligen Füßen“ zu stehen schien.

Die HILBERTSche Formulierung des EUKLIDSchen Parallelenaxioms lautet:

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a ; dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

2.4. Übersicht über ein Axiomensystem

Die Axiome der Geometrie verteilen sich nach HANS MOHRMANN[Moh1930] auf drei Hauptgruppen derart, dass die erste Gruppe die volle Grundlage der *projektiven Geometrie* eines nicht-abgeschlossenen (dreidimensionalen) Kontinuums ergibt, die beiden ersten Gruppen zusammengenommen die volle Grundlage der sogenannten *absoluten*

⁵DAVID HILBERT (* 23. Januar 1862 in Königsberg, Ostpreußen; †14. Februar 1943 in Göttingen) war deutscher Mathematiker. Sein Werk ist grundlegend in den meisten Sparten der Mathematik und der mathematischen Physik.

Geometrie und damit auch, bei passender Charakterisierung, der im engeren Sinne *Nicht-EUKLIDischen Geometrien* bilden, während die dritte nur aus einem Axiom bestehende Gruppe aus der absoluten die *EUKLIDische Geometrie* aussondert. Will man das jeweils umfassendste offene Kontinuum zu Grunde legen, so bedarf es noch eines Vollständigkeitsaxioms (2.4.4).

Die erste Gruppe enthält lineare, ebene Axiome und ein räumliches Axiom, die zweite sowie dritte Gruppe ausschließlich lineare und ebene Axiome.⁶ Die linearen und ebenen Axiome der ersten Gruppe (siehe 2.4.1) allein reichen zur Begründung der projektiven Geometrie des zweidimensionalen Kontinuums nicht aus. Sie genügen dagegen in Verbindung mit den Axiomen der zweiten Gruppe (siehe 2.4.2) – den Axiomen der Kongruenz – zur Begründung der Nicht-EUKLIDischen Planimetrie, obwohl in dieser (ebenso wie in der EUKLIDischen) die projektive Geometrie gültig ist.

2.4.1. Die projektiven Axiome (I. Gruppe)

Definition 2.1. (Punkt): Das Element der *Punktgeometrie* ist der Punkt. Der Punkt als solches besitzt keine Ausdehnung, keine Größe.

- I,01** Es gibt wenigstens zwei voneinander verschiedene Punkte.
- I,02** Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen eine Menge von Punkten, die wir *g-Linie*⁷ nennen. \overleftrightarrow{AB} ist die durch die beiden Punkte A und B festgelegte g-Linie.
- I,03** Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer und derselben g-Linie bestimmen genau diese g-Linie.
- I,04** Wenn A, B, C Punkte einer g-Linie sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A .
- I,05** Wenn A und C zwei voneinander verschiedene Punkte einer g-Linie sind, so gibt es stets einen Punkt B , der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D , so dass C zwischen A und D liegt.
- I,06** Unter irgend drei voneinander verschiedenen Punkten einer g-Linie gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Definition 2.2. (Strecke): Betrachten wir auf einer g-Linie zwei voneinander verschiedene Punkte A, B . Das System der beiden Punkte A und B heiße *Strecke*.

\overline{AB} ist die Strecke, die durch die Punkte A und B begrenzt ist.

Alle Punkte P_i zwischen A und B liegen auf oder innerhalb der Strecke: $P_i \in \overline{AB}$.

Alle anderen Punkte $P_j (i \neq j)$ der g-Linie liegen außerhalb der Strecke: $P_j \notin \overline{AB}$.

⁶HANS MOHRMANN bezieht sich bei ähnlicher Aussage auf HILBERT. Jedoch weicht MOHRMANN an einigen Stellen von der HILBERTSchen Sortierung mit Begründung ab.

⁷g-Linie: Das g steht für Geometrie. Dies ist ein Vorgriff darauf, dass Linien in verschiedenen Geometrien unterschiedlich dargestellt werden können.

I,07 (Stetigkeitsaxiom⁸) Jedem Punkt einer Strecke entspricht eine reelle Zahl eines Intervalls und umgekehrt.

I,08 Es gibt wenigstens drei nicht auf einer und derselben g-Linie gelegene Punkte.

I,09 Wenn A, B, C irgend drei nicht in einer und derselben g-Linie gelegene Punkte sind, D ein Punkt der Strecke \overline{BC} und E ein Punkt der Strecke \overline{AD} ist, dann gibt es einen der Strecke \overline{AB} angehörigen Punkt F derart, dass E auf der Strecke \overline{CF} liegt.

Definition 2.3. (Dreieck, Seite, Eckpunkte, Inneres, Rand): Es seien A, B, C drei voneinander verschiedene nicht auf ein und derselben g-Linie gelegene Punkte. Die Strecke \overline{AB} heiße c und \overline{BC} heiße a sowie \overline{CA} heiße b . Die Menge \mathbb{T} aller Punkte, die auf den Strecken von Punkten auf a zu Punkten auf b liegen, vereinigt mit der Menge aller Punkte, die auf den Strecken von Punkten auf a zu Punkten auf c liegen, vereinigt mit der Menge aller Punkte, die auf den Strecken von Punkten auf b zu Punkten auf c liegen, heißt *geflltes Dreieck* (filled triangle).

Formal:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{P_i | P_i \in \overline{XY}, \forall X, Y \text{ mit } X \in a \wedge Y \in b\} \\ &\cup \{P_i | P_i \in \overline{XY}, \forall X, Y \text{ mit } X \in a \wedge Y \in c\} \\ &\cup \{P_i | P_i \in \overline{XY}, \forall X, Y \text{ mit } X \in b \wedge Y \in c\} \end{aligned}$$

a, b, c heißen die *Seiten* des Dreiecks.

Der *Rand* des gefllten Dreiecks \mathbb{T} ist bestimmt durch die Menge aller Punkte P_i , die auf den drei Seiten a, b, c liegen, und wird *Dreieck* (triangle) genannt:

$$T = \partial(\mathbb{T}) = \{P_i | P_i \in a \vee P_i \in b \vee P_i \in c\}$$

Die nicht auf den Seiten liegenden Punkte von \mathbb{T} heißen *innere Punkte*, sie bestimmen das *Innere* des Dreiecks – oder seltener *offene Dreiecksfläche*:

$$\mathcal{T} = \text{int}(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \setminus T$$

A, B, C heißen *Eckpunkte*. Mit den Eckpunkten läßt sich das Dreieck T angeben als

$$T = (ABC).$$

Bemerkung. Ein Dreieck T ist sein eigener Rand $\partial(T)$. In Zeichen: $T = \partial(T)$.

Definition 2.4. (E-Fläche): Die Menge aller Punkte auf allen g-Linien, die mehr als einen Punkt gemeinsam mit dem Dreieck haben, werde *E-Fläche* (*Ebene*) genannt.

I,10 (Räumlichkeit:) Es gibt wenigstens vier nicht in ein und derselben Ebene gelegene Punkte.

⁸Dies ist im Wesentlichen auch schon bei FELIX KLEIN [Kle1871a], [Kle1871b], [Kle1873], [Kle1874], [Kle1890c], [Kle1928] enthalten, wenngleich nicht auf diese Weise in einem Satz zusammengefasst.

FELIX CHRISTIAN KLEIN (* 25. April 1849 in Düsseldorf; †22. Juni 1925 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker. Er hat im 19. Jahrhundert bedeutende Ergebnisse in der Geometrie erzielt und hat sich daneben um die Anwendung der Mathematik und die Lehre verdient gemacht. Der Aufstieg Göttingens als Zentrum der Mathematik ist mit seinem Wirken begründet.

Definition 2.5. (Raum): Ein *Raum* ist durch irgend vier seiner Punkte, die nicht einer und derselben E-Fläche angehören, bestimmt.

I,11 (Schluss-Axiom⁹.) Außerhalb eines Raumes gibt es keinen Punkt.

2.4.2. Die Kongruenzaxiome (II. Gruppe)

Definition 2.6. (kleiner, größer): Sei C ein innerer Punkt der Strecke \overline{AB} , so heißt die Strecke \overline{AC} *kleiner* als die Strecke \overline{AB} – in Zeichen: $\overline{AC} < \overline{AB}$ – und die Strecke \overline{AB} *größer* als die Strecke \overline{AC} – in Zeichen: $\overline{AB} > \overline{AC}$

II,01 Jede Strecke lässt sich auf jeder nicht-kleinere Strecke von einem ihrer Endpunkte aus in eindeutig bestimmter Weise abtragen.

II,02 Wenn eine Strecke \overline{AB} sowohl Strecke $\overline{A'B'}$ als auch der Strecke $\overline{A''B''}$ kongruent¹⁰ ist, so ist auch $\overline{A'B'}$ der Strecke $\overline{A''B''}$ kongruent: Wenn $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AB} \cong \overline{A''B''}$, so ist auch $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$.

II,03 Es seien \overline{AB} und \overline{BC} zwei Strecken ohne gemeinsamen inneren Punkt auf der g -Linie g . Ferner seien $\overline{A'B'}$ und $\overline{B'C'}$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen g -Linie g' , ebenfalls ohne gemeinsamen inneren Punkt; wenn dann $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ist, so ist auch stets $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Definition 2.7. (Strahl, Richtung): Es seien A, B zwei verschiedene Punkte einer g -Linie $g = \overleftrightarrow{AB}$. Die Teilmenge \overrightarrow{AB} aller Punkte P von g , für die gilt $\overrightarrow{AB} = \{P | P \in \overline{AB} \vee P = A \vee P = B\} \cup \{P | P \in \overline{AC} \forall C \in g \text{ mit } B \in \overline{AC}\}$ wird *Strahl*, manchmal auch *Halbgerade*, genannt. Man sagt, der Strahl $s = \overrightarrow{AB}$ besitzt die *Richtung* von A nach B . $\tilde{s} = \{P | P \in g\} \setminus \{P | P \in s\}$ ist der entgegengesetzte Strahl. Es gilt: $s \cup \tilde{s} = g$

Definition 2.8. (Winkel, Schenkel): Es sei E eine beliebige E-Fläche und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Strahlen in E , die verschiedenen g -Linien angehören. Das System der beiden Strahlen h und k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder $\sphericalangle(k, h)$ ¹¹. h und k sind die *Schenkel* des Winkels. Sei $P \in h$ und $Q \in k$, so bezeichnet $\sphericalangle(POQ)$ denselben Winkel wie $\sphericalangle(h, k)$.

Definition 2.9. (Winkelbezeichnung im Dreieck): In einem Dreieck (ABC) bezeichnen wir den Winkel, den die zwei Strahlen durch B und C im Punkt A bilden mit $\alpha = \sphericalangle(A) = \sphericalangle(BAC)$; in analoger Weise die Winkel bei den Punkten B und C , nämlich: $\beta = \sphericalangle(B) = \sphericalangle(ABC)$ sowie $\gamma = \sphericalangle(C) = \sphericalangle(ACB)$.

II,04 Jeder Winkel kann in einer gegebenen E-Fläche nach einer gegebenen Seite an einen gegebenen Strahl auf eine eindeutig bestimmte Weise angetragen werden.

⁹Das Schluss-Axiom wird allerdings nur benötigt, wenn man sich auf die Raumgeometrie beschränken will.

¹⁰Das Wort „kongruent“ bedeutet soviel wie „deckungsgleich“. Es geht auf das lateinische Wort „congruentia“ = „Übereinstimmung“ zurück.

¹¹Die Hinzunahme von negativen Winkeln ist erst nach der Einführung von Koordinaten notwendig.

II,05 Wenn für zwei Dreiecke (ABC) und $(A'B'C')$ die Kongruenzen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\sphericalangle(BAC) \cong \sphericalangle(B'A'C')$ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen $\sphericalangle(ABC) \cong \sphericalangle(A'B'C')$ und $\sphericalangle(ACB) \cong \sphericalangle(A'C'B')$ erfüllt.

Definition 2.10. (Kreis, Mittelpunkt, Radius, Sehne, offene Sehne): Seien M und A verschiedene Punkte, lassen sich auf allen von einem Punkte M ausgehende Strahlen zur Strecke \overline{MA} kongruente Strecken $\overline{MA'}$ abtragen, so heißt die Gesamtheit der Punkte A' ein *Kreis* K . M heißt der *Mittelpunkt* des Kreises, und $r = \overline{MA}$ sein *Radius*. Der *gefüllte Kreis* \mathbb{K} ist die Menge aller Punkte P_i , für die gilt:

$$\mathbb{K} = \bigcup_{\overline{MA'}} \{P_i | P_i \in \overline{MA'} \cong \overline{MA}\}$$

K ist der *Rand* von \mathbb{K} , in Zeichen: $K = \partial(\mathbb{K})$

Das *Innere* des gefüllten Kreises ist $\mathcal{K} = \text{int}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus K$, es enthält die *inneren Punkte*.

Eine *Sehne* von K ist eine Strecke, die zwei verschiedene Punkte auf K verbindet, eine *offene Sehne* von K ist eine Sehne ohne die Endpunkte.

Definition 2.11. (Bewegungen): Kollineationen¹², die jedes Dreieck in ein ihm kongruentes Dreieck überführen, heißen *Bewegungen*¹³.

Definition 2.12. (Kongruente Figuren): Geometrische Figuren oder Gebilde heißen *kongruent*, wenn sie durch eine Bewegung ineinander überführt werden können.

Definition 2.13. (metrische Eigenschaft, Eigenschaft der Lage, Eigenschaft der Form, äquiforme Figuren): Eigenschaften geometrischer Gebilde, die bei beliebigen Bewegungen unverändert bleiben, heißen *metrische Eigenschaften* (im Gegensatz zu den *Eigenschaften der Lage*). Metrische Eigenschaften geometrischer Gebilde, die von der absoluten Größe der Figuren unabhängig sind, pflegt man *Eigenschaften der Form* zu nennen. In Figuren gleicher Form (*äquiforme Figuren*) entsprechen g-Linien der einen Figur den g-Linien der anderen Figur; ebenso entsprechen Kreise der einen Figur den Kreisen der anderen Figur.

Definition 2.14. (Ähnlichkeitstransformation): Kollineationen, die Kreise in Kreise überführen, heißen *äquiforme Transformationen* oder *Ähnlichkeitstransformationen*. Zwei nicht-kongruente Figuren F und F' heißen einander *ähnlich* oder *äquiform*, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander überführt werden können.

2.4.3. Das Ähnlichkeitsaxiom (III. Gruppe)

III Jede Strecke ist jeder anderen ähnlich.

¹²Eine Kollineation – auch kollineare Abbildung oder projektive Abbildung bzw. projektive Transformation genannt – ist eine bijektive Abbildung zwischen projektiven Ebenen bzw. Räumen, die alle Geraden wieder auf Geraden abbildet.

¹³Bewegungen von Umlenkungen und Spiegelungen zu unterscheiden, ist ebenso wie die Hinzunahme negativer Strecken und Winkel erst nach Einführung von Koordinaten zweckmäßig und notwendig.

Definition 2.15. (gerade Linien, Geraden): g-Linien, deren Strecken auch noch dem Axiom III genügen, heißen *gerade Linien* oder *Geraden*.

Bemerkung. Dieses Ähnlichkeitsaxiom in Verbindung mit den übrigen Axiomen ist dem EUKLIDischen Parallelenaxiom (5) (siehe Seite 9) äquivalent. Der Nachweis ist bei [Moh1930] nachzulesen.

2.4.4. Das Vollständigkeitsaxiom

Die Axiome der früheren Gruppen sind von den Axiomen späterer Gruppen unabhängig. Sie gelten für beliebige, nicht-abgeschlossene Kontinuen. Will man für eine bestimmte Geometrie ein abgeschlossenes Kontinuum voraussetzen, das mit den Axiomen jener Geometrie verträglich ist, so kann man den Axiomen der I. oder der I. und II. oder aller drei Gruppen zusammen noch ein *Vollständigkeitsaxiom* hinzufügen.

Die Elemente einer Geometrie bilden ein System von Dingen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannter Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Bemerkung. MOHRMANN[Moh1930] gibt an, dass, wenn man das Vollständigkeitsaxiom (2.4.4) alleine zu den projektiven Axiomen (2.4.1) – das waren die Axiome der Gruppe I – hinzunimmt, das HILBERTSche Parallelenaxiom (2.3) zu einem beweisbaren Satz wird.

Bemerkung. Auf Grund seiner etwas komplizierten Art wurde mehr als 2000 Jahre lang von verschiedenen Mathematikern und Nicht-Fachmathematikern versucht, dass EUKLIDische Parallelenaxiom aus den anderen zu schließen – es wurde vergeblich versucht zu zeigen, dass dieses Parallelenaxiom ein beweisbarer Satz wäre.

Erst am Anfang des 19. Jahrhunderts (1829) entdeckten die Mathematiker JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS¹⁴ (Nicht-EUKLIDische Geometrie), NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY¹⁵ (Imaginäre, später Pan-Geometrie), FARKAS WOLFGANG BOLYAI¹⁶ zusammen mit seinem Sohn JÁNOS BOLYAI¹⁷ (Absolute Geometrie), FERDINAND KARL SCHWEIKART¹⁸ (Astralgeometrie) und F.A. TAURINUS¹⁹ (Logarithmisch-sphärische Geometrie) fast gleichzeitig, dass es eine Geometrie gibt, in der das Parallelenaxiom nicht gilt.[Moh1930] Damit war eine von zwei nicht-EUKLIDischen Geometrien gefunden. Nun war es klar, dass das Parallelenaxiom in EUKLIDs Axiomensystem

¹⁴JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS(* 30. April 1777 in Braunschweig; †23. Februar 1855 in Göttingen) war ein sehr wichtiger deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker.

¹⁵NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (zu deutsch: Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski; wissenschaftliche Transliteration: Nikolaj Ivanovič Lobačevskij; * 20. November 1792 in Nischni Nowgorod; †12. Februar 1856 in Kasan) war ein russischer Mathematiker.

¹⁶FARKAS BOLYAI (* 9. Februar 1775; †20. November 1856), deutsch WOLFGANG BOLYAI, war ein ungarischer Mathematiker.

¹⁷JÁNOS BOLYAI(* 15. Dezember 1802 in Klausenburg; †17. Januar 1860 in Neumarkt am Mieresch) war ein ungarischer Mathematiker

¹⁸FERDINAND KARL SCHWEIKART (1780-1857) war Jurist [Lin2007],[CFKP1997] – Professor in Marburg

¹⁹F.A. TAURINUS (1794-1874) war ein Verwandter von SCHWEIKART – Verschiedene mit Google-Suche auffindbare englischsprachige Texte geben an, dass TAURINUS entweder der Neffe oder der Vetter von SCHWEIKART gewesen ist – TAURINUS kommt der Ruhm zu über den Gegenstand der nicht-EUKLIDischen Geometrie publiziert zu haben. [Moh1930]

unabhängig von den anderen Axiomen und deshalb unbedingt notwendig zur Beschreibung der EUKLIDischen Geometrie ist.

2.5. FELIX KLEINS Worte über das Wesen der geometrischen Axiome

FELIX KLEIN schreibt in seinem Aufsatz *Zur nicht-EUKLIDischen Geometrie* [Kle1890c]:

„Zum Schlusse noch einige Worte über das Wesen der geometrischen Axiome überhaupt. In der mathematischen Literatur zum Mindesten scheint mir betreffs derselben fast allgemein eine Ansicht verbreitet, welche von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte, und von der ich in meinen früheren hierher gehörigen Arbeiten Gebrauch gemacht habe, ohne mir des Widerspruchs gegen andere Meinungen deutlich bewusst zu sein. Die betreffende Ansicht geht dahin, dass die Axiome die „Thatsachen“ der räumlichen Anschauung formuliren und zwar so vollständig formuliren, dass es bei geometrischen Betrachtungen unnöthig sein soll, auf die Anschauung als solche zu recurriren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunächst jedenfalls den zweiten Theil dieses Satzes bestreiten. Eigene geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich. Man verweist in dieser Hinsicht ja wohl auf das Verfahren der analytischen Geometrie. Aber eine bloss rechnende analytische Geometrie, welche von den Figuren abstrahirt, kann ich ebensowenig als eigentliche Geometrie gelten lassen, wie gewisse Zweige der sogenannten synthetischen Geometrie, die sich nur dadurch von der analytischen Geometrie unterscheiden, dass an Stelle der algebraischen Formelsprache eine andere gesetzt ist. [...] Das Axiom ist mir nun die Forderung, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlege. [FELIX KLEIN sieht die «räumliche Anschauung als etwas wesentlich Ungenaues» an, «mag nun von der abstracten Anschauung die Rede sein, wie sie und durch Gewöhnung geläufig geworden ist, oder von der concreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt.»]“

Zusammenfassung.

Wir haben hier also kennengelernt:

- Einiges zur Geschichte der Geometrie
 - Wichtige Grundbegriffe und Axiome der Geometrie
-

3. Geometrie auf einem Träger

In diesem Kapitel soll einerseits das allgemeine Verständnis der Unterschiede der hyperbolischen Ebene zur EUKLIDischen und sphärischen Ebene geweckt und gestärkt werden. Diese Unterschiede basieren insbesondere auf den unterschiedlichen Krümmungen: Der hyperbolische Raum besitzt eine konstant negative Krümmung. Andererseits werden in diesem Kapitel bereits einige wichtige Formeln eingeführt, die für die Visualisierung später relevant werden.

Kapitelinhalt. In diesem Kapitel werden wir Flächen und ihre Krümmungen betrachten, insbesondere die Bedeutung der Flächenkrümmung für die Innenwinkelsumme bei Dreiecken auf gekrümmten und ungekrümmten Flächen, sowie die Bedeutung für die Länge von Seiten eines Dreiecks. Zudem werden wir eine Zuordnung der EUKLIDischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie zu den Krümmungsarten von Flächen vornehmen. Die hyperbolischen Dreiecke werden dann für das nächsten Kapitel sehr wichtig sein.

Bemerkung. Punkte werden häufig nicht nur mit Namen versehen sondern auch mit Koordinaten eines Koordinatensystems¹. Mit den Axiomen **I,02** (siehe Seite 10), Stetigkeitsaxiom (siehe Seite 11) sowie den Definitionen zu Strahl (siehe Seite 12) und Winkel (siehe Seite 12) lässt sich ein Koordinatensystem konstruieren. Ich werde diese Konstruktion nicht angeben, denn ich gehe davon aus, dass schon aus dem Schulunterricht bekannt ist, wie ein Koordinatensystem – insbesondere das karthésische² Koordinatensystem – aussieht.

Desweiteren gehe ich in diesem und allen weiteren Kapiteln davon aus, dass dem Leser klar ist, was ein Vektor des \mathbb{R}^n ist und wie man mit diesen Vektoren rechnet. Auch die Rechnung mit Matrizen setze ich als bekannt voraus.

¹In einem (endlichdimensionalen) Vektorraum V ist durch eine Basis B , das ist eine endliche Menge maximaler Größe von linearunabhängigen Vektoren – also ist B ein minimales Erzeugendensystem von V , automatisch ein Koordinatensystem gegeben. Die Koeffizienten der Basisvektoren lassen sich als Koordinaten verstehen. Einer Transformation zwischen zwei Basissystemen entspricht eine Transformation zwischen den entsprechenden Koordinatensystemen.

²Das Wort „karthésisch“ ist vom Namen RENÉ DESCARTES abgeleitet.

RENÉ DESCARTES, latinisiert RENATUS CARTESIUS, (* 31. März 1596 in La Haye/Touraine, Frankreich; †11. Februar 1650 in Stockholm, Schweden) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Er charakterisierte Punkte durch Koordinaten, die die Lage der Punkte in der Ebene beschreiben. Dies ermöglichte es, Methoden aus der Algebra und der Infinitesimalrechnung auch in der Geometrie einzusetzen.

Erinnerung 3.1 (Vektorrechnung). Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, dann ist

- das *EUKLIDISCHE Skalarprodukt* (oder *innere Produkt*) der beiden Vektoren definiert als

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \quad (3.1)$$

Die *Signatur* dieses Skalarproduktes ist $(+, +, \dots, +, +)$, denn die Signatur besteht aus den Vorzeichen der Diagonalmatrix A mit der Eigenschaft, dass

$$\langle a, b \rangle = a^T \cdot A \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

A ist offensichtlich die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$.

- Der *Betrag* des Vektors a ist

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \quad (3.3)$$

- Das *Kreuzprodukt* (*Vektorprodukt* oder *äußeres Produkt*)

$$(a \times b) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Der resultierende Vektor steht senkrecht auf den Vektoren a und b .

Beispiel 3.1. Um geometrische Gebilde in Graphiken darzustellen, bedarf es für das Koordinatensystem einem Träger, der die Elemente der Geometrie trägt, auf dem also Punkte und g-Linien liegen.

Beispiele für Dinge der realen Welt, die als Träger für geometrische Gebilde, Muster und andere Motive dienen können:

- Papierblätter
- Bälle
- Tonnen
- Heißluftballons
- Schwimmreifen

Betrachten wir nun die ersten beiden Beispiele.

Das Blatt Papier korrespondiert mit einem Ausschnitt einer mathematischen Ebene.

Der Ball korrespondiert mit der mathematischen Kugel, einem dreidimensionalen Gebilde mit einem Radius und einem Mittelpunkt.

Auf dem Blatt Papier als Beispiel für eine Ebene betrieben wir also ebene Geometrie und auf dem Ball Oberflächengeometrie.

Sprechweise 3.1. (Mannigfaltigkeit): Mannigfaltigkeit³ bezeichnet in der Mathematik einen topologischen Raum, der lokal einem gewöhnlichen EUKLIDISCHEN Raum \mathbb{R}^n gleicht. Im Ganzen muss die Mannigfaltigkeit nicht einem \mathbb{R}^n entsprechen (nicht zu ihm homöomorph sein).

Auf eine formale Definition von Mannigfaltigkeit wird hier verzichtet. Man kann eine solche Definition in Büchern zur Differentialgeometrie finden.

Definition 3.1. (Fläche): Eine *Fläche* ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Anschaulicher: Eine Fläche ist also ein flacher Gegenstand (eine Figur, ein Objekt ohne Rauminhalt), der irgendwie gekrümmt oder nicht gekrümmt sein kann. Sie kann einen dreidimensionalen Körper begrenzen, aber ihn nicht füllen.

Bemerkung. Der Begriff *Fläche* darf nicht mit dem Begriff *E-Fläche* verwechselt werden.

3.1. Krümmung einer Fläche

Die Krümmung einer Fläche in einem Punkt lässt sich mit dem GAUSSSchen Krümmungsmaß bestimmen, dafür benötigen wir zunächst ein paar Begriffe.

Definition 3.2. (Kurve, ebene Kurve, Raum-Kurve): Wir verstehen unter einer *Kurve* (curve) C die stetige Bahn, das ist die stetige Veränderung der Position – oder des Orts – eines Punktes, der einen Freiheitsgrad besitzt.

Genauer: Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass diese Abbildung zusätzlich mindestens zweimal differenzierbar sein soll.

Eine stetige, mindestens zweimal differenzierbare Abbildung von $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennen wir *Raumkurve* oder *Kurve im Raum*.

Eine stetige, mindestens zweimal differenzierbare Abbildung von $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nennen wir *ebene Kurve* (plane curve).

Definition 3.3. (Krümmungskreis, Krümmungsradius, Krümmung einer Kurve): Gegeben sei eine ebene Kurve C im \mathbb{R}^2 und P ein Punkt der Kurve C .

Der *Krümmungskreis* – auch Schmiegekreis oder Schmiegekreis (Osculating circle) genannt – zu diesem bestimmten Punkt $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ der ebenen Kurve C ist der Kreis, der die Kurve in diesem Punkt am besten „annähert“: Das heißt, der Kreis geht tangential durch P

³Mannigfaltigkeiten sind der zentrale Gegenstand der Differentialgeometrie; sie haben bedeutende Anwendungen in der theoretischen Physik. Ein gern gewähltes Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ist eine *Kugeloberfläche*, auch *Sphäre* genannt.

und dessen zweite Ableitung stimmt dort mit der ersten und zweiten Ableitung von C überein [Dud1982].

Der Radius des Krümmungskreises heißt *Krümmungsradius*.

Der Kehrwert des Krümmungsradius an der Stelle heißt die *Krümmung der Kurve*⁴ in dem Punkt.

Da die Krümmung einer Kurve im Allgemeinen örtlich variiert, schmiegt sich die Kurve im Allgemeinen nur in einer infinitesimal kleinen Umgebung an den Krümmungskreis an. Mit dem Wissen um die Krümmung einer Kurve in einem Punkt können wir nun auch die Krümmung einer Fläche in einem Punkt betrachten.

Definition 3.4. (Normalkrümmung, Hauptkrümmung): Es sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine zweifach differenzierbare Fläche, d.h. jede Parametrisierung der Fläche ist von den Komponentenfunktionen her zweifach stetig partiell differenzierbar. Weiterhin sei P ein Punkt in F .

Jeder Tangentialrichtung, also jeder Richtung, die ein Tangentialvektor in diesem Punkt P annehmen kann, wird eine *Normalkrümmung* zugeordnet:

Man versteht unter Normalkrümmung die Krümmung jener (ebenen) Kurve, die sich als Schnitt zwischen F und folgender Normalebene ergibt: Die Normalebene steht senkrecht auf der Tangentialebene durch P und ist nach dem Tangentialvektor ausgerichtet. Somit hat die Normalebene als Richtungsvektoren also gerade den Flächennormalenvektor und den Tangentialvektor.

Den Minimalwert und den Maximalwert dieser Krümmungen bezeichnet man als die beiden *Hauptkrümmungen* (principal curvature) κ_1 und κ_2 . Dies sind also die Kehrwerte der Radien des kleinsten und größten Krümmungskreises, die sich in diesem Punkt P an die Fläche F „schmiegen“.

Definition 3.5. (GAUSSSches Krümmungsmaß):

Gegeben seien eine Fläche im \mathbb{R}^3 und ein Punkt dieser Fläche. Die GAUSSSche Krümmung κ der Fläche in diesem Punkt ist das Produkt der beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 .

$$\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1 \cdot r_2} \quad (3.5)$$

Dabei sind r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien, wobei r_1 der maximale und r_2 minimale sei.

Definition 3.6. (Synklastisch, Antiklastisch): Als *synklastisch* bezeichnet man die gleichsinnige Krümmung einer Fläche, d.h. die beiden Hauptkrümmungskreise liegen auf der gleichen Seite der Fläche: $\kappa = \frac{1}{r_1 \cdot r_2} > 0$

⁴In der Differentialgeometrie wird der Begriff der Krümmung auf einem anderen Weg eingeführt. Dort ist die Krümmung einer Kurve im Wesentlichen definiert als „Richtungsänderung bezogen auf Bogenlänge“. Mit dieser Definition stellt sich heraus, dass jeder Kreis konstante Krümmung hat. Diese ist identisch mit dem Kehrwert des Kreisradius des Krümmungskreises: Die Krümmung des Krümmungskreises und die der Kurve stimmen im betrachteten Punkt überein.

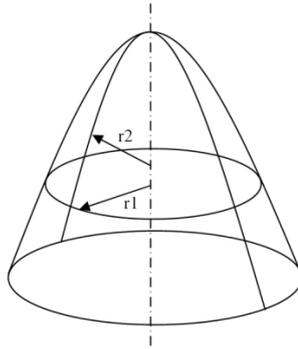


Abbildung 3.1.: Synklastisch gekrümmte Fläche

Als *antiklastisch* bezeichnet man die gegensinnige Krümmung einer Fläche, d.h. die beiden Hauptkrümmungskreise liegen auf verschiedenen Seiten der Fläche: $\kappa = \frac{1}{r_1 \cdot r_2} < 0$

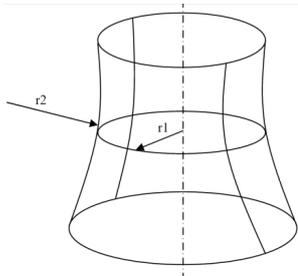


Abbildung 3.2.: Antiklastisch gekrümmte Fläche

Beispiel 3.2. Synklastisch gekrümmt sind:

- eine Kuppel
- ein elliptisches Paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

Antiklastisch gekrümmt sind:

- viele Stapelchips, sie sind ein den Kartoffelchips ähnelndes Kartoffelerzeugnis
- ein hyperbolisches Paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

Definition 3.7. (Sattelfläche): Eine Fläche, die in den beiden Hauptrichtungen entgegengesetzt – d.h. antiklastisch – gekrümmt ist, wird *Sattelfläche* genannt.

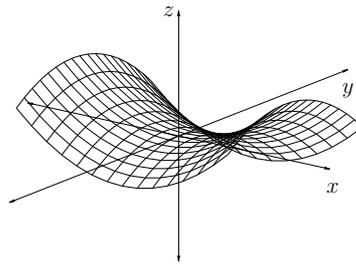
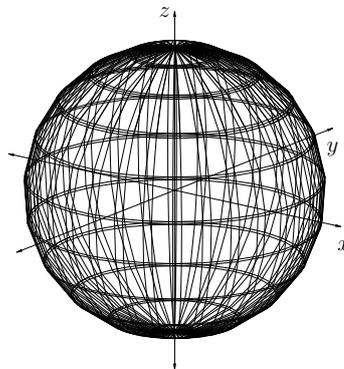


Abbildung 3.3.: Sattelfläche

Definition 3.8. (Kreisscheibe, Vollkugel): Eine *Kreisscheibe* (Disk) $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ist ein zweidimensionales Gebilde mit einem Mittelpunkt und einem Radius; sie ist identisch mit der Punktmenge des gefüllten Kreises \mathbb{K} , welche wir schon kennen. Demnach ist der Kreis $K = \partial(\mathbb{K}) = \partial(D^2)$ und $\mathcal{K} = \text{int}(\mathbb{K}) = \text{int}(D^2)$.

Eine *Vollkugel* oder *Kugel* ist ein dreidimensionales Gebilde mit einem Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^3$ und einem Radius r . In Zeichen $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ und $D^3 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \|P - M\| \leq r\}$.

Definition 3.9. (Sphäre): Die n -dimensionale Sphäre⁵ (oder kurz n -Sphäre) ist die Oberfläche einer $(n + 1)$ -dimensionalen Kugel D^{n+1} . Sie wird mit S^n bezeichnet. Es gilt $S^n = \partial(D^{n+1})$.

Abbildung 3.4.: Sphäre S^2

Definition 3.10. (Traktrix, Pseudosphäre): Bildungsgesetz einer Traktrix⁶: Sei A_0 der Startpunkt eines „Ziehenden“ und P_0 der Startpunkt eines „Gezogenen“ sowie der

⁵griechisch $\sigma\varphi\alpha\iota\rho\alpha$, sphaira - die Hülle, der Ball

⁶Die Traktrix wurde von CLAUDE PERRAULT 1670 eingeführt, später interessierten sich SIR ISAAC NEWTON (1676) und CHRISTIAN HUYGENS (1692) für sie.

CLAUDE PERRAULT (* 1613 in Paris, Frankreich, †1688 Paris, Frankreich) war ein bedeutender französischer Architekt, Kunsttheoretiker, Altphilologe, Mediziner und Naturwissenschaftler.

SIR ISAAC NEWTON (* 25. Dezember 1642(julianisch) bzw. 4. Januar 1643(gregorianisch) in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire, England; †20. März(julianisch) bzw. 31. März 1727(gre-

Abstand $d = d(A_0, P_0) > 0$. Wandert der Punkt A auf einer Geraden, und „folgt“ ihm der Punkt P in konstantem Abstand d , dann durchläuft P eine *Traktrix*.

Liege $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Ursprung, $P_0 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x -Achse, A bewegt sich entlang der y -Achse:

$$y(x) = \pm d \cdot \operatorname{arcosh} \left(\frac{d}{x} \right) \mp \sqrt{d^2 - x^2} \quad (3.6)$$

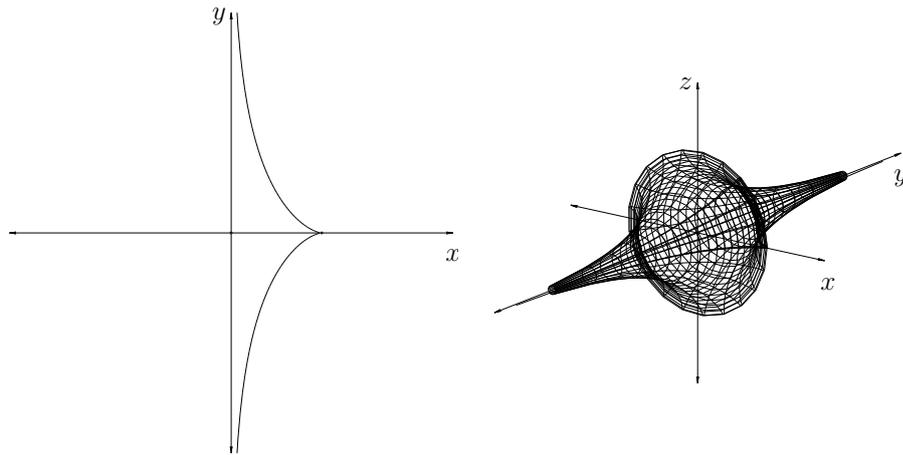


Abbildung 3.5.: Traktrix und der zugehörige Rotationskörper: Pseudosphäre

Wird diese Kurve um ihre Asymptote (die y -Achse) rotiert, so entsteht die *Pseudosphäre* – im Englischen auch *Tractricoid* genannt –, welche in der hyperbolischen Geometrie die Rolle der Kugel einnimmt. So ist etwa die Fläche unter der Traktrix dieselbe wie beim Halbkreis. Die Traktrix ist hierbei als Geodäte die Entsprechung der Geraden im „normalen“ (EUKLIDischen) Raum.

Beispiel 3.3. Nun untersuchen wir einige Flächen auf die Krümmung ihrer Punkte.

- Eine EUKLIDische Ebene im \mathbb{R}^3 ist nach Definition ungekrümmt, d.h. alle Punkte der Ebene besitzen die Krümmung $\kappa = 0$.
- Betrachten wir eine Kugel mit Radius $r \in \mathbb{R}$, so besitzt jeder Punkt der Kugel die Krümmung

$$\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} > 0 \quad (3.7)$$

gorianisch) in Kensington(London), England [damals galt in England noch der Julianische Kalender]) war ein englischer Physiker, Mathematiker, Astronom, Alchemist, Philosoph und Verwaltungsbeamter.

CHRISTIAN HUYGENS auch CHRISTIAAN HUYGENS oder CHRISTIANUS HUGENIUS (* 14. April 1629 in Den Haag, Niederlande; †8. Juli 1695 Den Haag, Niederlande) war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker.

Eine Kugel hat also eine allseitige positive Krümmung. Die Einheitskugel mit $r = 1$ besitzt die Krümmung $\kappa = 1$ an jedem Punkt. Je größer der Radius der Kugel wird, desto geringer wird die Krümmung. Für $\lim_{r \rightarrow \infty}$ gilt

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} = 0 \quad (3.8)$$

- Punkte auf einer Kugel mit rein *imaginären* Radius $r \in \mathbb{C}$ mit $r = u + v i$, wobei $\Re \ni u = \Re(r) = 0$, $\Re \ni v = \Im(r) > 0$, besitzen eine negative Krümmung, denn

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{1}{(u+vi)^2} = \frac{1}{u^2+2\cdot u\cdot v i+(vi)^2} \\ &= \frac{1}{u^2+2\cdot u\cdot v i-v^2} \underset{u=\Re(r)=0 \wedge v=\Im(r)>0}{=} \frac{1}{-v^2} = -\frac{1}{v^2} < 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Eine Kugel mit rein imaginärem Radius hat also eine allseitige negative Krümmung. Die imaginäre Einheitskugel mit $r = v i = 1 i$ besitzt die Krümmung $\kappa = -1$ an jedem Punkt. Je größer der Radius einer solchen Kugel wird, desto ungekrümmter wird sie. Für imaginäre Radien $r = v i$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty}$ gilt

$$\kappa = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{(v i)^2} = \lim_{v \rightarrow \infty} -\frac{1}{v^2} = -0 = 0 \quad (3.10)$$

3.2. Zuordnung: gekrümmte Flächen + Geometrien

Die Geometrien für Flächen (und höher dimensionale Mannigfaltigkeiten) unterschiedlicher Krümmung ($\kappa = 0$, $\kappa > 0$, $\kappa < 0$) besitzen auch voneinander verschiedene Namen.

- Die Geometrie für eine ungekrümmte Fläche ist die *EUKLIDISCHE Geometrie*. FELIX KLEIN bezeichnet den ungekrümmten Raum, in dem EUKLIDISCHE Geometrie möglich ist, als *parabolischen Raum* und die dortige Geometrie als *parabolische Geometrie*.
- Die Geometrie für eine positiv gekrümmte Fläche ist *elliptische Geometrie*, deren anschaulich einfachstes Modell die Geometrie auf einer Kugel mit reellem Radius ist, die Geometrie für dieses Kugel-Modell heißt *sphärische Geometrie*. FELIX KLEIN und andere bezeichnen den Raum konstanter positiver Krümmung zu Ehren von BERNHARD RIEMANN⁷ als *RIEMANNscher Raum* und die dortige Geometrie mit *RIEMANNscher Geometrie*.
- Die Geometrie für eine negativ gekrümmte Fläche ist die *hyperbolische Geometrie*. Als *GAUSSschen Raum* bezeichnet FELIX KLEIN den allseitig unendlich ausgedehnten Raum konstanter negativer Krümmung.

⁷GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (* 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg (Elbe); †20. Juli 1866 in Selasca am Lago Maggiore) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte.

3.2.1. FELIX KLEINS Worte über sphärische und elliptische Geometrie

FELIX KLEIN schreibt in seinem Aufsatz *Zur nicht-EUKLIDischen Geometrie* [Kle1890c] über die sphärische Geometrie und elliptische Geometrie:

„Ich hatte [...] darauf aufmerksam zu machen [...], dass die Kugel nicht der einfachste Typus einer zweidimensionalen, geschlossenen Mannigfaltigkeit constanter positiver Krümmung ist, dass dieser vielmehr durch das vom Mittelpunkte der Kugel auslaufende Strahlenbündel geliefert wird (dessen Strahlen den Kugelpunkten ein-zweideutig entsprechen). Die elliptische Geometrie, wie ich sie verstehe, deckt sich also nicht mit der sonst discutierten sphärischen Geometrie [...], sondern ist einfacher. In der elliptischen Geometrie ist die Gruppierung der geraden Linien und Ebenen des Raumes genau dieselbe, wie in der projectiven Geometrie: zwei Geraden schneiden sich, wenn überhaupt, nur einmal. Die complicirteren Verhältnisse des sphärischen Raumes entstehen erst, wenn man den linearen elliptischen Raum durch Projection auf ein Gebild zweiten Grades überträgt.[...] Der Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes ruht natürlich wieder in deren Zusammenhangsverhältnissen, und der „Zusammenhang“ des elliptischen Raumes hat etwas Ungewöhnliches. Bleiben wir der Einfachheit halber, weil da die Sache am kürzesten bezeichnet werden kann, bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich da um den Unterschied der gewöhnlichen einfachen Flächen und der von Moebius [MÖBIUS⁸] entdeckten Doppelflächen, bei denen man durch continuirliches Fortschreiten über die Fläche hin von einer Seite auf die andere gelangen kann. [...] In der That: die elliptische Ebene verhält sich wie die Ebene der projectiven Geometrie und diese ist, [...], eine Doppelfläche.“

3.3. Dreiecke auf ungekrümmten, negativ gekrümmten und positiv gekrümmten Flächen

Definition 3.11. (Großkreis, Orthodrome, Großkreisbogen): Ein *Großkreis* ist ein größtmöglicher Kreis auf einer Kugeloberfläche. Ein Großkreis hat immer den Umfang $2 \cdot \pi \cdot r$. Sein Mittelpunkt fällt immer mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen. Ein Schnitt der Kugel mit einer EUKLIDischen Ebene, die den Kugelmittelpunkt enthält, auf dem Großkreis teilt die Kugel in jedem Fall in zwei („gleichgroße“) Hälften. Da es unendlich viele Möglichkeiten gibt, eine Kugel so zu zerschneiden, dass die Schnittebene den Kugelmittelpunkt trifft, gibt es auch unendlich viele Großkreise.

Die *Orthodrome*⁹, oder der *Großkreisbogen*, ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche. Die Orthodrome ist immer ein Teilstück eines Großkreises. Die

⁸AUGUST FERDINAND MÖBIUS (* 17. November 1790 in Schulpforte bei Naumburg (Saale); †26. September 1868 in Leipzig) war deutscher Mathematiker und Astronom an der Universität Leipzig.

⁹Orthodrome setzt sich aus den zwei griechischen Wörtern orthos „gerade“ und dromos „Lauf“ zusammen.

Orthodrome, die zwei maximal weit entfernte Punkte P und Q auf der Kugeloberfläche verbindet, hat die offensichtliche Länge $\pi \cdot r$, mit r als Radius der Kugel. Für zwei maximal entfernte Punkte P und Q gilt stets: $P = -Q$. Man nennt diese auch *Pole* der Kugel, sie werden durch unendlich viele Großkreisbögen miteinander verbunden.

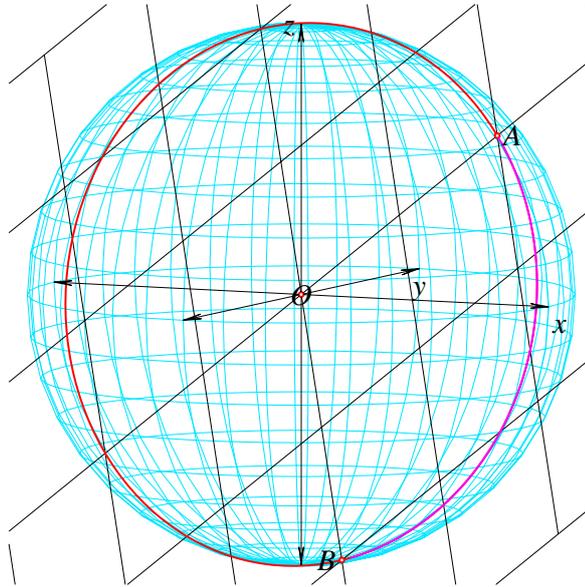


Abbildung 3.6.: Großkreis und Großkreisbogen

Betrachten wir uns nun kurz Dreiecke auf drei verschiedenen Flächen. Die Benennungen von Punkten, Seiten und Winkeln geschieht entsprechend der Definition (siehe Seite 11). Die Fläche F_0 sei ungekrümmt, sie ist die EUKLIDISCHE Ebene. Die Fläche F_1 habe negative Krümmung, sie ist eine Sattelfläche. Und die Fläche F_2 habe eine positive Krümmung, sie sei die Oberfläche der Einheitskugel.

$\kappa = 0$ Bei einem Dreieck der EUKLIDISCHEN Ebene gilt für die Summe der Dreiecksinnenwinkel α , β und γ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (3.11)$$

Es ist nicht möglich den Flächeninhalt eines EUKLIDISCHEN Dreiecks nur durch seine Winkel zu bestimmen, es gibt unendlich viele Dreiecke verschiedenen Flächeninhalts mit gleichen Winkelgrößen. Den *Flächeninhalt* (Area) eines EUKLIDISCHEN Dreiecks kann man nur bestimmen, wenn man entweder gemischte Informationen über Winkel und Seiten besitzt oder die Länge aller drei Seiten kennt:

1.

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin(\beta)}{2} \quad (3.12)$$

2. Mit dem Satz des HERON¹⁰ kann man die Fläche eines Dreiecks aus den drei Seitenlängen a , b und c berechnen:

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a + (b + c))(c - (a - b))(c + (a - b))(a + (b - c))} \quad (3.13)$$

Satz 3.1 (Sinussatz der EUKLIDischen Geometrie).

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad (3.14)$$

Satz 3.2 (Kosinussatz der EUKLIDischen Geometrie).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad (3.15)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad (3.16)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad (3.17)$$

$\kappa > 0$ Die EULERSchen Kugeldreiecke sind benannt nach LEONARD EULER¹¹; das sind Dreiecke auf der Sphäre, wobei die drei Seiten a , b und c Teile von *Großkreisen* um den gemeinsamen Mittelpunkt sind. Wenn $r \in \mathbb{R}$ der Kugelradius ist, ist klar, dass die Länge der drei Seiten a , b und c zwischen 0 und $\pi \cdot r$ liegt. Bei den EULERSchen Kugeldreiecken gilt für die Summe der Dreiecksinnenwinkel α , β und γ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon \quad (3.18)$$

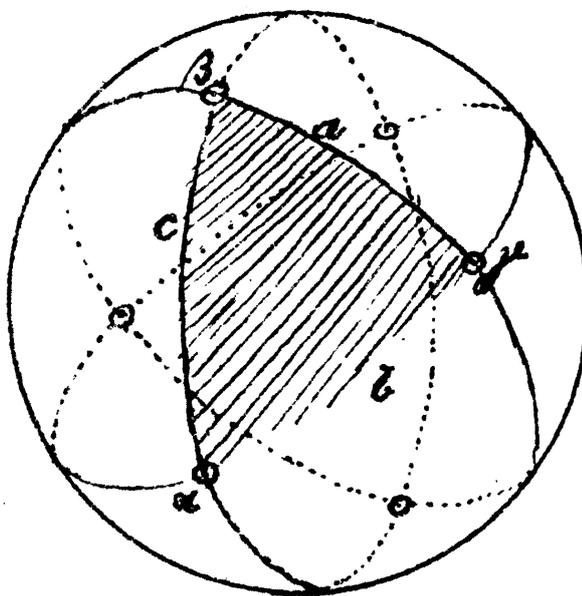


Abbildung 3.7.: Sphärisches Dreieck. Abbildung entnommen aus [Kle1890a]

¹⁰HERON VON ALEXANDRIA, genannt Mechanicus, war ein antiker Mathematiker und Ingenieur.

¹¹Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel (Schweiz); †18. September 1783 in Sankt Petersburg) war einer der bedeutendsten Mathematiker.

Der Überschuss $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ wird auch *sphärischer Exzess* genannt.

Für den *Flächeninhalt* gilt $A(T) = \varepsilon \cdot r^2$ bei der Einheitskugel also $A(T) = \varepsilon \cdot r^2 = \varepsilon \cdot 1^2 = \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Satz 3.3 (Sinussatz der sphärischen Geometrie).

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)} \quad (3.19)$$

Satz 3.4 (Seiten-Kosinussatz der sphärischen Geometrie).

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (3.20)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\beta) \quad (3.21)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.22)$$

Satz 3.5 (Winkel-Kosinussatz der sphärischen Geometrie).

$$\cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.23)$$

$$\cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.24)$$

$$\cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (3.25)$$

$\kappa < 0$ Bei hyperbolischen Dreiecke, deren Seiten a , b und c entlang der negativ gekrümmten Fläche laufen (Wie eine Dreiecksseite aussieht, hängt sehr stark vom Modell ab!), gilt für die Summe der Dreiecksinnenwinkel α , β und γ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \delta \quad (3.26)$$

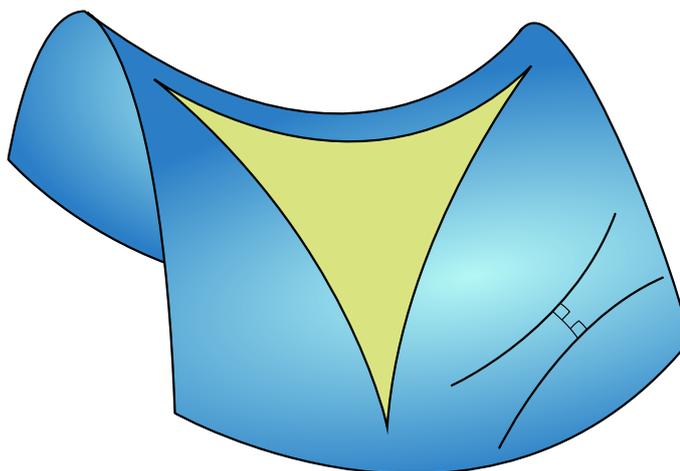


Abbildung 3.8.: Hyperbolisches Dreieck. Abbildung entnommen [Wik2007]

$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ wird auch als *Defekt* des hyperbolischen Dreiecks bezeichnet [Wen2006].

Für den *Flächeninhalt* gilt nach dem *Satz von GAUSS-BONNET*¹² $A(T) = \delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ [Wäs2002]

Satz 3.6 (Sinussatz der hyperbolischen Geometrie).

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)} \quad (3.27)$$

Satz 3.7 (Seiten-Kosinussatz der hyperbolischen Geometrie).

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (3.28)$$

$$\cosh(b) = \cosh(a) \cdot \cosh(c) - \sinh(a) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\beta) \quad (3.29)$$

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \cdot \sinh(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.30)$$

Satz 3.8 (Winkel-Kosinussatz der hyperbolischen Geometrie).

$$\cos(\alpha) = \cosh(a) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.31)$$

$$\cos(\beta) = \cosh(b) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \quad (3.32)$$

$$\cos(\gamma) = \cosh(c) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (3.33)$$

Aus dem Winkel-Kosinussatz, den man aus dem Sinus-Satz und dem Seiten-Kosinussatz herleiten kann [And1999], folgt sofort der Satz

Satz 3.9 (WWW-Satz). *Im Gegensatz zu einem EUKLIDISCHEN Dreieck sind die Längen der Seiten eines hyperbolischen Dreiecks eindeutig über die drei Winkel des Dreiecks festgelegt.* [And1999],[Wen2006]

Hinweis. Dieser **WWW-Satz** wird noch wichtig sein, wenn wir ein hyperbolisches Dreiecksnetz konstruieren.

Zusammenfassung.

Wir haben in diesem Kapitel also

- eine Vorstellung über die unterschiedliche Krümmung des EUKLIDISCHEN, hyperbolischen und sphärischen Raums erhalten,
- den für die spätere Dreiecksnetzkonstruktion zentralen **WWW-Satz** kennen gelernt.

¹²PIERRE OSSIAN BONNET (* 22.12.1819; 22.6.1892) war französischer Mathematiker. Von ihm sind wichtige Beiträge zur Differentialgeometrie von Oberflächen, einschließlich dem Satz GAUSS-BONNET, welchen er für einen Spezialfall 1848 veröffentlichte. GAUSS selber hat den Satz wohl nie veröffentlicht, obwohl er ihm bekannt war.

4. Modelle der hyperbolischen Ebene im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3

Dieses ist eines der zentralen Kapitel der Arbeit:

- Es geht um die strukturierte Darstellung und Vergleiche von Modellen der hyperbolischen Ebene insbesondere bezogen auf für die HSOM wichtige Operationen. In dieser Form wird dieses das erste Mal zusammenhängend dargestellt.
- Es werden Transformationen zwischen den Modellen hergeleitet und in einen Zusammenhang gestellt, so dass problemlos Darstellungen in allen Modellen möglich sind.
- Insbesondere erlauben die Transformationen der Modelle die zugehörigen Metriken in allen Modellen zu berechnen.

Kapitelinhalt. In diesem Kapitel werden wir vier von einander verschiedene Modelle für die hyperbolische Ebene kennen lernen, sowie die Transformation zwischen den Modellen. Ebenfalls interessante Modelle (auch approximative) der hyperbolischen Ebene werden in [CFKP1997] behandelt. Weiterhin werden wir die Metrik der hyperbolischen Ebene in den entsprechenden Modellen diskutieren; außerdem werden wir die Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten der hyperbolischen Ebene betrachten.

4.1. Abstandsbestimmung

Um Abstände bezogen auf einen Raum – das ist eine Menge, deren Elemente in geometrischer Interpretation als Punkte aufgefasst werden – bestimmen zu können, ist es nötig eine Metrik zu definieren.

Definition 4.1. (Metrischer Raum, Metrik, Isometrie): Es sei X eine Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass gilt:

1. Verschiedene Punkte haben einen Abstand größer als 0. Und nur identische Punkte haben Abstand 0: $d(x, y) > 0 \iff x \neq y \oplus d(x, y) = 0 \iff x = y \forall x, y \in X$;
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$.

Dann heißt (X, d) *metrischer Raum*. Und die Funktion d ist die *Metrik*.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, dann heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *Isometrie* oder *isometrische Abbildung*, genau dann, wenn für zwei Punkte $a, b \in X$ gilt: $d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))$

Bemerkung. Isometrien sind immer bijektive abstandstreue Abbildungen. Der Beweis für den EUKLIDischen Fall findet sich im Kapitel 4 bei [Dei2007].

4.1.1. Exkurs: EUKLIDischer und sphärischer Abstand

Definition 4.2. (EUKLIDischer Abstand): Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte, so ist der EUKLIDische Abstand $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zwischen ihnen definiert als

$$d_E(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \quad (4.1)$$

Definition 4.3. (sphärischer Abstand): Seien $a, b \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der *sphärische Abstand* [Bär2006] d_S zwischen a und b sei die Winkelgröße $\sphericalangle(a, O, b)$, d.h. die eindeutige Zahl $d_S(a, b) \in [0, \pi]$ mit

$$d_S(a, b) = \arccos \left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \right) \quad (4.2)$$

Satz 4.1.

- Die EUKLIDische Ebene $E = \mathbb{R}^2$ bildet mit d_E den metrischen Raum (\mathbb{R}^2, d_E) .
- Die Sphäre S^2 bildet mit d_S den metrischen Raum (S^2, d_S) .

Beweis. Nachzulesen in [Bär2006]. □

4.2. MINKOWSKI-Modell – ein räumliches Modell

Definition 4.4. (Hyperboloid, Doppelkegel): Ein *Hyperboloid* ist eine Fläche 2. Ordnung, man unterscheidet zwischen dem *einschaligen* und dem *zweischaligen* Hyperboloid. Letzteres besteht aus zwei sich nicht berührenden Teilflächen. Der Grenzfall zwischen ein- und zweischaligen Hyperboloiden, wenn sich die beiden Schalen in einem Punkt berühren, ist der *Doppelkegel*.

$$\text{einschalig: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.3)$$

$$\text{zweischalig: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (4.4)$$

$$\text{Doppelkegel: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.5)$$

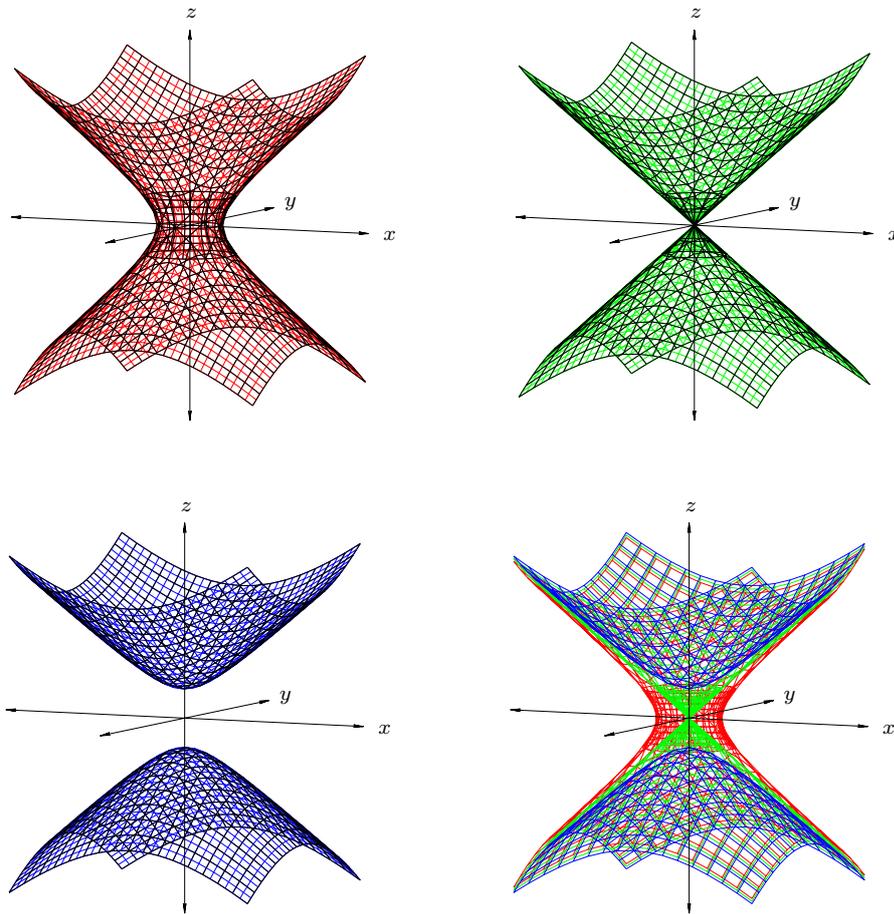


Abbildung 4.1.: einschaliges Hyperboloid, Doppelkegel und zweischaliges Hyperboloid

In diesem räumlichen Modell, welches auch unter dem Namen LORENTZ¹-Modell oder Hyperboloid-Modell in verschiedenen Quellen aufzufinden ist, wird die Menge \mathcal{P} der *hyperbolischen Punkte* mit der Menge aller (EUKLIDISCHEN) Punkte der oberen Schale des zweischaligen Hyperboloiden identifiziert.

Definition 4.5. (MINKOWSKI-Modell):

$$H^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \wedge z > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} > 0 \right\} \quad (4.6)$$

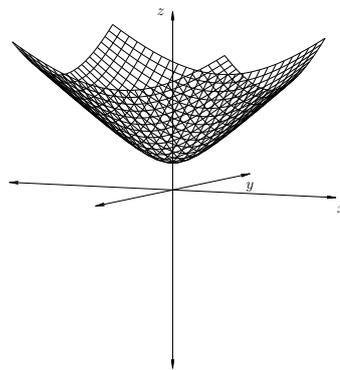


Abbildung 4.2.: Hyperboloid-Schale des MINKOWSKI-Modells

Dieses Modell für eine hyperbolische Fläche wird in der vorliegenden Arbeit das Rechenmodell sein.

Definition 4.6. (MINKOWSKI-Produkt): Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, dann ist das MINKOWSKI²-Produkt definiert als

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad (4.7)$$

Die Signatur des hier verwendeten MINKOWSKI-Produktes ist $(+, +, -)$, denn

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad (4.8)$$

Satz 4.2. *Setzen wir*

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¹HENDRIK ANTOON LORENTZ (* 18. Juli 1853 in Arnheim; †4. Februar 1928 in Haarlem) war ein niederländischer Mathematiker und Physiker. Die *Lorentzkraft* wurde nach ihm benannt.

²HERMANN MINKOWSKI (* 22. Juni 1864 in Aleksotas, damals Russland (heute Kaunas/Litauen); †12. Januar 1909 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker und Physiker.

so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle a, \mathbb{J} \cdot b \rangle = \langle \mathbb{J} \cdot a, b \rangle$$

und

$$\langle a, b \rangle = \langle\langle a, \mathbb{J} \cdot b \rangle\rangle = \langle\langle \mathbb{J} \cdot a, b \rangle\rangle$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen! □

Bemerkung. Die MINKOWSKI-Welt oder der MINKOWSKI-Raum $\mathbb{M}^4 = \mathbb{R}^{3+1}$ ist ein vierdimensionaler Vektorraum aber kein Innenproduktraum, in ihm ist das MINKOWSKI-Produkt $\langle\langle a, b \rangle\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4$ für $a, b \in \mathbb{R}^4$. **Genauer:** Das Paar $(\mathbb{M}^4, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ heißt MINKOWSKI-Raum.

HERMANN MINKOWSKI führte ihn zur Beschreibung der speziellen Relativitätstheorie ein.

Drei seiner Koordinaten sind die des EUKLIDischen Raums; dazu kommt eine vierte Koordinate für die Zeit.

Heute ist es in der physikalischen Literatur üblich die erste Koordinate für die Zeit zu benutzen und die letzten drei für die des EUKLIDischen Raums. Die zugehörige Signatur des MINKOWSKI-Produktes wäre dann $(-, +, +, +)$. Jedoch auch die Signatur $(+, -, -, -)$ wird häufig in der Physik verwendet. Wichtig ist es, dass die Zeitkoordinate eine sich von den Raumkoordinaten unterscheidende Signatur aufweist.

Definition 4.7. (zeitartig, lichtartig, raumartig, kausal): [FK2006]

Ein Vektor a eines n -dimensionalen MINKOWSKI-Raumes \mathbb{M}^n heißt

- *zeitartig*, wenn $\langle\langle a, a \rangle\rangle < 0$,
- *lichtartig*, wenn $\langle\langle a, a \rangle\rangle = 0$ und $a \neq 0$,
- *raumartig*, wenn $\langle\langle a, a \rangle\rangle > 0$ oder $a = 0$.

Ein nicht raumartiger (also zeit- oder lichtartiger) Vektor wird *kausal* genannt, lichtartige Vektoren heißen auch Nullvektoren.

Mit diesen Definitionen läßt sich auch schreiben

$$H^2 = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle a, a \rangle\rangle = -1 \wedge a_3 > 0\}$$

Und wir sehen, H^2 liegt in einem zeitartigen Unterraum des vierdimensionalen MINKOWSKI-Raums \mathbb{M}^4 , der eine Zeitkoordinate sowie genau zwei EUKLIDische Koordinaten benötigt, die dritte EUKLIDische Koordinate ist immer Null.

H^2 kann also auch als relativistische zweidimensionale Welt mit der Einschränkung an eine stets „positive Zeit“ angesehen werden:

$$H^2 \subset \mathbb{M}^3 = \mathbb{R}^{2+1} \tag{4.9}$$

4.2.1. Abstandsbestimmung und geometrische Operationen im MINKOWSKI-Modell

Wir wollen später ausgehend von einem Dreieck ein ganzes Dreiecksnetz erstellen. Dieses wollen wir mit Hilfe von geometrischen Operationen erreichen. Dafür müssen wir uns zunächst klar werden, welche Funktionen überhaupt als zulässig für solches Vorhaben gelten können.

Es werden Funktionen der Form $\Phi : H^2 \rightarrow H^2$ mit $\Phi(p) = p' \in H^2$ und $p \in H^2$ sein.

Insbesondere werden wir Funktionen brauchen, die den Abstand zweier Punkte voneinander invariant lassen. Wir suchen also isometrische Funktionen.

Abstandsbestimmung

Um Abstände von zwei verschiedenen Punkten aus H^2 bestimmen zu können, benötigen wir ein passendes „Werkzeug“. Wir haben schon gesehen, dass sich Metriken für die EUKLIDISCHE und sphärische Geometrie definieren lassen.

Definition 4.8. (Großhyperbel, Großhyperbelbogen): Eine *Großhyperbel* ist eine Teilmenge von H^2 der Form $H^2 \cap E$, wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionaler Untervektorraum ist. – Jeder Untervektorraum enthält den Nullvektor, hier identifiziert mit dem

Punkt $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. – Großhyperbeln sind also das Ergebnis des Schnittes der oberen

Schale des Hyperboloiden mit einer EUKLIDISCHEN Ebene, die den Punkt O enthält. Der *Großhyperbelbogen* ist stets Teil einer *Großhyperbel* und die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

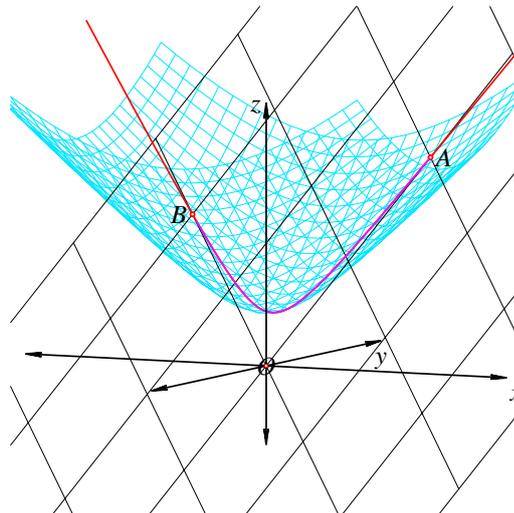


Abbildung 4.3.: Großhyperbel und Großhyperbelbogen

Erinnerung 4.1 (Zusammenhang zwischen Abstand, Strecke und Geraden). Der Abstand zweier Punkte zueinander ist die Länge der kürzesten Strecke, die sie verbindet. Die Strecke ist ein Teil der Geraden, auf der die Punkte liegen.

Geraden in diesem Modell sind keine EUKLIDischen Geraden, sondern Großhyperbeln, die entlang der betrachteten oberen Schale des zweischaligen Hyperboloiden verlaufen.

Definition 4.9. (hyperbolischer Abstand, Metrik im MINKOWSKI-Modell): Der *hyperbolische Abstand* für zwei Punkte a und $b \in H^2$ ist

$$d_H(a, b) = \operatorname{arcosh}(-\langle\langle a, b \rangle\rangle) = \operatorname{arcosh}(-a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \quad (4.10)$$

Satz 4.3. (H^2, d_H) ist ein metrischer Raum. Siehe auch [Wen2006],[Bär2006],[Bär2007].

Wir haben nun die Möglichkeit den Abstand zweier Punkte in H^2 zu bestimmen. Jetzt fehlen nur noch die geometrischen Operationen, mit denen wir in H^2 arbeiten können.

LORENTZ-Transformation

Im MINKOWSKI-Raum \mathbb{M}^4 sind die LORENTZ-Transformationen definiert.

Definition 4.10. (LORENTZ-Transformation): Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ heißt LORENTZ-Transformation, falls

$$\langle\langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^4 \quad (4.11)$$

Offensichtliche Eigenschaften von (bestimmten) LORENTZ-Transformationen:

- Eine LORENTZ-Transformation $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ belässt das MINKOWSKI-Produkt invariant; denn nach Definition gilt

$$\langle\langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle$$

- Eine LORENTZ-Transformation $\Phi : H^2 \rightarrow H^2$ ist eine Isometrie bezogen auf d_H ; denn

$$d_H(\Phi(a), \Phi(b)) = \operatorname{arcosh}(-\langle\langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle\rangle) = \operatorname{arcosh}(-\langle\langle a, b \rangle\rangle) = d_H(a, b)$$

Es ist $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix und die durch Λ vermöge $\Phi_\Lambda(a) := \Lambda a$ gegebene lineare Abbildung Φ_Λ ist genau dann eine Lorentz-Transformation, wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle a, \Lambda^T \mathbb{J} \Lambda b \rangle = \langle \Lambda a, \mathbb{J} \Lambda b \rangle = \langle\langle \Lambda a, \Lambda b \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle a, \mathbb{J} b \rangle;$$

oder kurz:

$$\Lambda^T \mathbb{J} \Lambda = \mathbb{J}$$

- Satz 4.4.**
- Sind $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ LORENTZ-Transformationen, so ist auch $\Phi_1 \circ \Phi_2$ eine LORENTZ-Transformation.
 - Ist $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine LORENTZ-Transformation, so ist Φ invertierbar und Φ^{-1} ist ebenfalls eine LORENTZ-Transformation.
 - Die Matrix Λ einer LORENTZ-Transformation erfüllt $\det \Lambda = \pm 1$, d.h. sie ist invertierbar.

Beweis. Siehe [Bär2006] Beweis zu Satz 1.4.8 – dort allerdings eingeschränkt auf LORENTZ-Transformationen $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ □

Mit diesem Beweis lässt sich auch die Gruppen-Eigenschaft der betrachteten LORENTZ-Transformationen zeigen.

Die LORENTZ-Gruppe

Es habe das MINKOWSKI-Produkt des MINKOWSKI-Raum \mathbb{M}^4 die Signatur $(+, +, +, -)$. Die Koordinaten heißen x, y, z und t , dabei sei t die „Zeitkoordinate“.

Die Menge aller LORENTZ-Transformationen $\Phi_\Lambda : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4$ mit ihrer Hintereinanderausführung \circ bildet eine Gruppe.

Identifizieren wir die LORENTZ-Transformation Φ_Λ mit ihrer zugehörigen Matrix Λ , dann ist die Hintereinanderausführung \circ identisch mit der Matrixmultiplikation.

Definition 4.11. (LORENTZ-Gruppe, eigentliche LORENTZ-Gruppe, eigentliche orthochrone LORENTZ-Gruppe): Die *Isometriegruppe* der LORENTZ-Transformationen $\Phi_\Lambda : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4$ heißt *LORENTZ-Gruppe*

$$\mathcal{O}(3, 1) = \{ \Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \det \Lambda = \pm 1 \}$$

Die *eigentliche LORENTZ-Gruppe* ist

$$\mathcal{SO}(3, 1) = \{ \Lambda \in \mathcal{O}(3, 1) \mid \det \Lambda = 1 \}$$

Die *eigentliche orthochrone LORENTZ-Gruppe* ist

$$\mathcal{SO}^+(3, 1) = \{ \Lambda = (l_{ij}) \in \mathcal{SO}(3, 1) \mid l_{44} \geq 1 \}$$

Die eigentliche orthochrone LORENTZ-Gruppe $\mathcal{SO}^+(3, 1)$ wird durch die LORENTZ-Drehungen, das sind Rotationen um die drei EUKLIDischen Raum-Achsen, sowie den LORENTZ-Boosts³ in die drei Raum-Richtungen erzeugt. [Bor2006]

Definition 4.12. (LORENTZ-Drehung): Die aktive Drehung Punktes im \mathbb{R}^3 geschieht mit den Rotation-Matrizen $R_x(\alpha), R_y(\alpha), R_z(\alpha)$ durch eine lineare Abbildung $f(x, \alpha) \mapsto R(\alpha) \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}^3, R \in \{R_x, R_y, R_z\}$. Es ist $0 \leq \alpha < 2 \cdot \pi$ der Drehwinkel.

- x-Achse als Drehachse:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- y-Achse als Drehachse:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- z-Achse als Drehachse:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

³LORENTZ-Boost wird auch *spezielle LORENTZ-Transformation* genannt. Seine physikalische Aufgabe ist es, zwischen zwei sich gleichmäßig bewegenden Koordinatensystemen zu wechseln. Das Wort *Boost* hat nichts mit Beschleunigung zu tun.

Eine LORENTZ-Drehung⁴ ist definiert als

$$\Phi_{\Lambda_{R(\alpha)}}(p) = \Lambda_{R(\alpha)} \cdot p = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ R(\alpha) & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot p, \quad (4.12)$$

wobei $\mathbb{R}^{3 \times 3} \ni R(\alpha) \in \{R_x(\alpha), R_y(\alpha), R_z(\alpha)\}$ und $p \in \mathbb{M}^4$, sowie α der Drehwinkel ist.

Notation: Wegen der besseren Lesbarkeit setzen wir:

$$\begin{aligned} \Lambda_{RX}(\alpha) &:= \Lambda_{R_x(\alpha)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{RX}(\alpha)}(p) := \Phi_{\Lambda_{R_x(\alpha)}}(p) \\ \Lambda_{RY}(\alpha) &:= \Lambda_{R_y(\alpha)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{RY}(\alpha)}(p) := \Phi_{\Lambda_{R_y(\alpha)}}(p) \\ \Lambda_{RZ}(\alpha) &:= \Lambda_{R_z(\alpha)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{RZ}(\alpha)}(p) := \Phi_{\Lambda_{R_z(\alpha)}}(p) \end{aligned}$$

Definition 4.13. (LORENTZ-Boost): Ein LORENTZ-Boost⁵ ist eine Abbildung

$$\Phi_{\Lambda_{B(k)}} : p \mapsto \Lambda_{B(k)} \cdot p \text{ mit } p \in \mathbb{M}^4 \text{ und } B \in \{B_x, B_y, B_z\} \quad (4.13)$$

- Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda_{B_x(k)} = \begin{pmatrix} \cosh k & 0 & 0 & \sinh k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh k & 0 & 0 & \cosh k \end{pmatrix}$$

- Boost entlang der y-Achse

$$\Lambda_{B_y(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh k & 0 & \sinh k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh k & 0 & \cosh k \end{pmatrix}$$

- Boost entlang der z-Achse

$$\Lambda_{B_z(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh k & \sinh k \\ 0 & 0 & \sinh k & \cosh k \end{pmatrix}$$

Notation: Wegen der besseren Lesbarkeit setzen wir:

$$\begin{aligned} \Lambda_{BX}(k) &:= \Lambda_{B_x(k)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{BX}(k)}(p) := \Phi_{\Lambda_{B_x(k)}}(p) \\ \Lambda_{BY}(k) &:= \Lambda_{B_y(k)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{BY}(k)}(p) := \Phi_{\Lambda_{B_y(k)}}(p) \\ \Lambda_{BZ}(k) &:= \Lambda_{B_z(k)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda_{BZ}(k)}(p) := \Phi_{\Lambda_{B_z(k)}}(p) \end{aligned}$$

⁴In der physikalischen Literatur besitzen die *sin*-Matrixeinträge der Rotations-Matrizen vertauschte Vorzeichen, denn in der Physik wird das Koordinatensystem verändert, d.h. das Koordinatensystem dreht sich, nicht der Punkt selbst. Die Physiker benutzen somit auf den Punkt bezogen eine *passive* Drehung.

⁵In der physikalischen Literatur besitzen die *sinh*-Matrixeinträge der Boost-Matrizen ein negatives Vorzeichen, denn in der Physik wird das Koordinatensystem verändert, nicht der Punkt selbst. Die Physiker benutzen somit auf den Punkt bezogen einen *passiven* Boost.

Bemerkung. Bildet man das semidirekte Produkt aus der eigentlichen orthochronen LORENTZ-Gruppe und den Translationen des \mathbb{R}^{3+1} , d.h. fügt man zu den Operationen LORENTZ-Drehung und LORENTZ-Boost noch die Translation, das ist eine einfache Vektoraddition, hinzu, erhält man die POINCARÉ-Gruppe

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \star \mathcal{SO}^+(3, 1)$$

Jedes Element der POINCARÉ-Gruppe (Λ, a) stellt bezogen auf $p \in \mathbb{M}^4$ eine Koordinatentransformation im MINKOWSKI-Raum der folgenden Form dar:

$$p \mapsto p' = \Lambda \cdot p + a$$

Geometrische Operationen für H^2

In den LORENTZ-Transformationen haben wir nun Transformationen erkannt, die bezogen auf das MINKOWSKI-Produkt Isometrien sind.

Jedoch können wir nicht alle LORENTZ-Transformationen als geometrische Operationen in H^2 gebrauchen, denn wir haben nur zwei EUKLIDISCHE Achsen mit den Achsenbezeichnungen x und y sowie eine „zeitliche“ Achse.

Betrachten wir eine Teilmenge der LORENTZ-Transformationen, die in der *eigentlichen orthochronen LORENTZ-Gruppe* enthalten sind, mit der Eigenschaft, dass jede dieser LORENTZ-Transformationen keinen Einfluss auf die dritte räumliche Koordinate haben. Diese Teilmenge der LORENTZ-Transformationen heiße $\mathcal{L}_{H^2}^*$.

$$\mathcal{L}_{H^2}^* = \left\{ \Phi_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{SO}^+(3, 1), \Phi_\Lambda(p) = \Lambda \cdot p = p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \\ t' \end{pmatrix} \text{ mit } p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \wedge t, t' \geq 1 \right\}$$

Für die weitere Betrachtung reicht es, die entsprechende Teilmenge der Erzeuger von $\mathcal{SO}^+(3, 1)$ zu bestimmen, die auch in $\mathcal{L}_{H^2}^*$ sind, denn alle weiteren LORENTZ-Transformationen mit den geforderten Eigenschaften sind durch Hintereinanderausführung der „richtigen“ Erzeuger generierbar.

Die Menge $M = \{\Phi_\Lambda \mid \Lambda \in \{\Lambda_{RZ}(\alpha), \Lambda_{BX}(k), \Lambda_{BY}(k)\}\}$ ist also die gesuchte Teilmenge von Erzeugern der $\mathcal{SO}^+(3, 1)$, die auch in $\mathcal{L}_{H^2}^*$ liegen.

$$\text{Es sei } P = \left\{ p \mid p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } \langle\langle p, p \rangle\rangle = -1 \wedge t \geq 1 \right\} \text{ eine Teilmenge von } \mathbb{M}^4$$

LORENTZ-Transformationen aus $\mathcal{L}_{H^2}^*$ angewendet auf Punkte aus P verändern nicht die dritte räumliche Koordinate, daher können wir diese auch weglassen. Formal geschieht dieses Weglassen mit einer geeigneten Abbildung.

Führen wir dazu die Abbildung $\Psi : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^3$ ein,

$$\Psi : p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto p' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

Die zeitliche Achse t benennen wir mit ${}_t\text{Subst}^z$ in z um.
Wir können also schreiben

$$H^2 = \left\{ p' \mid p' = {}_t\text{Subst}^z(\Psi(p)) \wedge p \in P \subset \mathbb{M}^4 \right\} = \left\{ p' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \langle\langle p', p' \rangle\rangle = -1 \wedge z \geq 1 \right\}$$

Satz 4.5. Für ein $p \in P \subset \mathbb{M}^4$ und eine LORENTZ-Transformation $\Phi_\Lambda \in \mathcal{L}_{H^2}^*$ mit $\Phi_\Lambda : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4$, vermöge $\Phi_\Lambda(p) = \Lambda \cdot p$, gibt es einen passenden Punkt $q \in H^2$ sowie eine zugehörige Abbildung $\tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}} : H^2 \rightarrow H^2$, vermöge $\tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(q) = \tilde{\Lambda} \cdot q$, wobei gilt $\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und $\tilde{\Lambda} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Beweis. 1. Für jeden Punkt $p \in P$ gibt es einen Punkt $q \in H^2$:

$$\begin{aligned} {}_t\text{Subst}^z(\Psi(p)) &= {}_t\text{Subst}^z\left(\Psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\right)\right) = {}_t\text{Subst}^z\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \in H^2 \forall p \in P \subset M^4 \end{aligned}$$

2. Für jedes $\Phi_\Lambda \in \mathcal{L}_{H^2}^*$ gibt es ein passendes $\tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}} : H^2 \rightarrow H^2$

$$\begin{aligned} {}_t\text{Subst}^z(\Psi(\Phi_\Lambda(p))) &= {}_t\text{Subst}^z(\Psi(\Lambda \cdot p)) = {}_t\text{Subst}^z\left(\Psi\left(\Lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= {}_t\text{Subst}^z\left(\Psi\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \\ t' \end{pmatrix}\right)\right) = {}_t\text{Subst}^z\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= q' = \tilde{\Lambda} \cdot q = \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(q) \in H \forall p \in P \subset M^4 \end{aligned}$$

□

Folgerung:

Wir haben also unsere geometrischen Operationen gefunden. Jede geometrische Operation $\tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}$ ist eine Transformation aus der Menge

$$\mathcal{L}_{H^2} = \left\{ \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}} \mid \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(q) = \tilde{\Lambda} \cdot q = \Psi(\Lambda \cdot p) = \Psi(\Phi_\Lambda(p)) \wedge \Phi_\Lambda \in \mathcal{L}_{H^2}^* \wedge q \in H^2 \wedge p \in P \right\} \quad (4.14)$$

Die Menge aller geometrischen Operationen \mathcal{L}_{H^2} , die auf H^2 operieren, kann man erhalten durch Hintereinanderausführung der EUKLIDISCHEN Rotation um die Zeit-Achse, das ist die z -Achse, und einen der beiden LORENTZ-Boosts in x - oder y -Richtung. [Bec2003]

$$\text{Rotation um die } z\text{-Achse: } \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(p) = \tilde{\Phi}_{\Lambda_{RZ}(\alpha)}(p) = R_z(\alpha) \cdot p \quad (4.15)$$

$$\text{Boost in } x\text{-Achsen-Richtung: } \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(p) = \tilde{\Phi}_{\Lambda_{BX}(k)}(p) = B_x(k) \cdot p \quad (4.16)$$

$$\text{Boost in } y\text{-Achsen-Richtung: } \tilde{\Phi}_{\tilde{\Lambda}}(p) = \tilde{\Phi}_{\Lambda_{BY}(k)}(p) = B_y(k) \cdot p \quad (4.17)$$

Dabei sind die Matrizen $R_z, B_x, B_y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben als

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_x(k) = \begin{pmatrix} \cosh k & 0 & \sinh k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh k & 0 & \cosh k \end{pmatrix}, \quad B_y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh k & \sinh k \\ 0 & \sinh k & \cosh k \end{pmatrix}$$

Sie bilden die *Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene* im MINKOWSKI-Modell.

Bemerkung. Den Boost in y -Richtung des Punktes $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, das ist der Ursprung von

H^2 , erhält man durch einen Boost in x -Richtung und anschließender Rotation um die z -Achse mit einem Drehwinkel $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, denn:

$$\begin{aligned} M_{z,x}(\alpha, k) &:= R_z(\alpha) \cdot B_x(k) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cosh(k) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cdot \sinh(k) \\ \sin(\alpha) \cdot \cosh(k) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ M_{z,x}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cosh(k) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sinh(k) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cosh(k) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot \cosh(k) & -1 & 0 \cdot \sinh(k) \\ 1 \cdot \cosh(k) & 0 & 1 \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ M_{z,x}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(k) \\ \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(k) & \sinh(k) \\ 0 & \sinh(k) & \cosh(k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_y(k) \cdot A \end{aligned}$$

Satz 4.6. *Jeder Punkt P in H^2 lässt sich darstellen als*

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sinh(k) \\ \sin(\varphi) \sinh(k) \\ \cosh(k) \end{pmatrix}, \text{ mit } k \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.18)$$

Vergleiche auch [Rit1999]

Beweis. Sei $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ursprung von H^2 , $k \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, dann ist

$$\begin{aligned} P = M_{z,x}(\varphi, k) \cdot U &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cosh(k) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sin(\varphi) \cdot \cosh(k) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sin(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \cosh(k) \end{pmatrix} \in H^2 \end{aligned}$$

□

Vergleich Bewegungsgruppe: EUKLIDisch, hyperbolisch

Erinnerung 4.2. Für einen besseren Vergleich der Bewegungen in H^2 und in der EUKLIDischen Ebene betrachten wir:

Definition 4.14 (EUKLIDische Bewegung, EUKLIDische Bewegungsgruppe). Ist $A \in \mathcal{O}(n)$ eine orthogonale Matrix, und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, dann nennt man die Abbildung

$$F_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, F_{A,b}(x) = A \cdot x + b \quad (4.19)$$

eine *EUKLIDische Bewegung*. Der Vektor b nennt sich *Translationsanteil*.

$$\mathcal{E}(n) = \{F_{A,b} \mid A \in \mathcal{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.20)$$

ist die *EUKLIDische Bewegungsgruppe* bei fester Dimension n .

Um die Inhomogenität der Gleichung bei einer Translation zu umgehen, wird in der Computergraphik sehr häufig mit *homogenen Koordinaten* gearbeitet. Denn um Rundungsfehler zu vermeiden und Berechnungsaufwand massiv zu reduzieren, ist es vorteilhaft, mehrere aufeinander folgende Matrixtransformationen (Translation, Drehung, Skalierung, Scherung) zu einer einzigen Transformationsmatrix zusammenzufassen. Die Transformation von karthesischen Koordinaten zu homogenen Koordinaten erfolgt durch die Abbildung in einen um eine Dimension höheren Raum:

$$(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 1)^T$$

Die Abbildung eines Punktes $P_{x,y,z,w}$ geschieht durch die Multiplikation mit der homogenen Matrix $\underline{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$(x', y', z', w')^T = \underline{M} \cdot (x, y, z, w)^T$$

Aufgrund der Assoziativität von Matrizenmultiplikationen können mehrere aufeinanderfolgende Multiplikationen zu einer einzigen Gesamtmatrix \underline{M} zusammengefasst werden. Die Rücktransformation von homogenen Koordinaten in kartesischen Koordinaten geschieht mittels:

$$(x', y', z', w')^T \rightarrow \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'} \right)^T = (x'', y'', z'')^T$$

Die Translationsmatrix in homogenen Koordinaten ist:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Während in der *EUKLIDischen Ebene* die Verschiebung eines Punktes entlang einer Koordinaten-Achse durch eine Translation bewirkt wird, benutzt man im MINKOWSKI-Modell der *hyperbolischen Ebene* einen LORENTZ-Boost, um einen Punkt entlang einer der Flächen-Koordinaten-Achsen zu verschieben und den zugehörigen Wert auf der zeitlichen Koordinate korrekt zu setzen. Die Rotation um den Koordinaten-Ursprung ($x = y = 0$) geschieht in beiden Fällen mit der Rotation um die z -Achse.

4.3. KLEINSches Modell: Scheibe

Obwohl dieses Modell weder zum Berechnen noch zur Darstellung verwendet werden soll, wird dieses Modell der hyperbolischen Geometrie vorgestellt, da dieses Modell recht interessant ist: Denn die Geraden dieses Modells sind mit Lineal zeichnenbar und EUKLIDisch ungekrümmt.

Im Folgenden sei der Einheitskreis K ; er ist in der EUKLIDischen Ebene gegeben durch die kartesische Koordinatengleichung $x^2 + y^2 = 1$. Die einheitskreisbildenden Punkte lassen sich auch in Polarkoordinaten darstellen als $(x, y) = (\cos \phi, \sin \phi)$ mit $0 \leq \phi < 2 \cdot \pi$. In der Ebene der komplexen Zahlen \mathbb{C} lässt sich der Einheitskreis definieren als $K = \{z | z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1\}$.

Für die *abgeschlossene* Einheitskreisscheibe gilt $\mathbb{K} = \{z | z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq 1\}$; für die *offene* Einheitskreisscheibe gilt $\mathcal{K} = \{z | z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\}$. Es gilt offensichtlich $K = \mathbb{K} \setminus \mathcal{K}$.

Zudem gilt aus schon Bekanntem: $D^2 = \mathbb{K}$, $K = \partial(\mathbb{K}) = \partial(D^2) = S^1$

Die KLEINSche Scheibe wird auch KLEIN-BELTRAMI⁶-Modell genannt.

Die Menge \mathcal{P} der *hyperbolischen Punkte* wird auf die Menge aller (EUKLIDischen) Punkte im Innern der Einheitskreisscheibe (in \mathcal{K}) also $\mathcal{P} = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$.

Die *hyperbolischen Geraden* sind alle offenen Sehnen von \mathcal{K} .

⁶EUGENIO BELTRAMI (* 16. November 1835 in Cremona, † 18. Februar 1900 in Rom) war ein italienischer Eisenbahningenieur und Mathematiker. 1868 gab er ein konkretes Modell einer nicht-EUKLIDischen Geometrie an. Dieses Modell basiert auf einer sog. Pseudosphäre (siehe Seite 21), d.h. einer Sattelfläche konstanter negativer GAUSSscher Krümmung. Eine Pseudosphäre entsteht wie schon erwähnt durch die Rotation einer Traktrix (siehe Seite 21) um ihre Asymptote. Später arbeitete er auf dem Gebiet der mathematischen Physik.

Definition 4.15. (ideale Punkte, ultraideale Punkte): Punkte, die direkt auf K liegen, nennt man *ideale Punkte*; Punkte, die außerhalb liegen, *ultraideale Punkte*.

Bemerkung. Ultraideale Punkte sind keine gültigen Punkte der hyperbolischen Ebene, aber nützlich zur Beschreibung von parallelen Geraden, denn zwei asymptotisch parallele Geraden treffen sich in einem idealen Punkt, zwei divergente parallele Geraden treffen sich ggf. in einem ultraidealen Punkt.

Da Geraden in der hyperbolischen Ebene genau wie in der EUKLIDischen Ebene unendlich lang sind, kann die Längenmessung im KLEIN-Modell offensichtlich nicht EUKLIDisch sein. Für Punkte im KLEIN-Modell ist K unendlich weit weg. Die Abbildung ist nicht nur eine Kollineation, die Geradenstücke wieder auf Geradenstücke abbildet, – es werden sogar kurze Strecken auf kurze Strecken und lange Strecken auf lange abgebildet. Darüber hinaus ist das KLEIN-Modell nicht konform, d.h. die Winkelmessung ist nicht EUKLIDisch.

4.3.1. Beziehung der KLEINSchen-Scheibe zum MINKOWSKI-Modell

Die KLEINSche-Scheibe lässt sich aus dem MINKOWSKI-Modell wie folgt herleiten. Gegeben ist die Menge aller Punkte der hyperbolischen Ebene

$$H^2 = \left\{ p \mid p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \langle\langle p, p \rangle\rangle = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1, p_3 > 0 \right\}$$

Wir bilden jeden Punkt aus H^2 auf die Kreisscheibe

$$D_1 = \left\{ d \mid d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}, d_1^2 + d_2^2 = r^2 < 1 \right\}$$

mit der *Zentralprojektion*⁷ $Z_1 : H^2 \rightarrow D_1$ ab. Dabei liegt das Projektionszentrum der Zentralprojektion bei $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und die Projektionsebene von D_1 bei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

⁷Die Zentralprojektion ist ein Verfahren zur perspektivischen Abbildung dreidimensionaler Objekte auf eine zweidimensionale Bildebene. Die Projektionsstrahlen gehen von einem gemeinsamen Projektionszentrum aus, daher wird dieses Verfahren auch Fluchtpunktverfahren genannt. Eine weitere perspektivische Abbildung ist die Parallelprojektion – auch orthografische Projektion oder Orthoprojektion genannt – es sind bei ihr eine (EUKLIDische) Projektionsebene und eine Projektionsrichtung gegeben. Den Bildpunkt eines beliebigen Punktes im Raum erhält man dadurch, dass man die (EUKLIDische) Parallele zur Projektionsrichtung durch diesen Punkt mit der Projektionsebene zum Schnitt bringt.

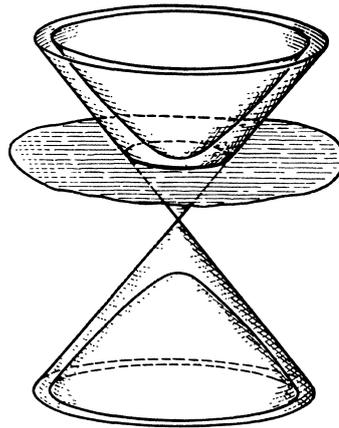


Abbildung 4.4.: Kegel, zweischaliges Hyperboloid, KLEINSche Scheibe. Abbildung entnommen aus [Kle1928]

Bestimmen wir nun die Abbildungsvorschrift für die Projektion:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in H^2, \quad Z(p) = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in D_1$$

$Z_{\text{KL}}(p) \in D_1$ ist ein Punkt auf einer EUKLIDischen Gerade, die durch das Projektionszentrum O und den Punkt p definiert ist. $Z_1(p)$ liegt auf dieser Geraden zwischen O und p . Die genauen Koordinaten des Punktes $Z_1(p)$ lassen sich mit einer *linearen Interpolation* bestimmen.

$$Z_1(p) = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die dritte Komponente heißt dies:

$$1 = t \cdot p_3 + 0$$

Nach t auflösen ergibt:

$$t = \frac{1}{p_3}$$

t in die Interpolationsgleichung einsetzen ergibt:

$$Z_1(p) = \frac{1}{p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit ist die Projektionsvorschrift:

$$Z_1(p) = Z \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{p_3} \cdot p = \frac{p}{p_3}$$

Satz 4.7. Ist $Z_1(p) = \frac{1}{p_3} \cdot p = p'$ $p \in H^2 \wedge p' \in D_1$ so ist die zugehörige Umkehrfunktion $Z_1^{-1} : D_1 \rightarrow H^2$

$$Z_1^{-1}(p') = Z_1^{-1} \left(\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - p_1'^2 - p_2'^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Beweis.

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in H^2$$

$$Z_1(p) = \frac{1}{p_3} \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_3} \\ \frac{p_2}{p_3} \\ \frac{p_3}{p_3} \\ \frac{p_3}{p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_3} \\ \frac{p_2}{p_3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = p' \in D_1$$

$$\begin{aligned} Z_1^{-1}(p') &= Z^{-1} \left(\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - p_1'^2 - p_2'^2}} \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - p_1'^2 - p_2'^2}} \cdot \frac{1}{p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{p_3 \cdot \sqrt{1 - p_1'^2 - p_2'^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_3^2 \cdot (1 - p_1'^2 - p_2'^2)}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p_3^2 - p_3^2 \cdot p_1'^2 - p_3^2 \cdot p_2'^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_3^2 - p_3^2 \cdot \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^2 - p_3^2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-p_1^2 - p_2^2 + p_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(-1)}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p \in H^2 \end{aligned}$$

□

Die Abbildung $Z_1 : H^2 \rightarrow D_1$ wird zu einer Isometrie bezüglich d_H , wenn wir für die Kreisscheibe D_1 die Abbildung $d_{D_1} : D_1 \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ als Metrik folgendermaßen definieren.

Definition 4.16. (Metrik d_{D_1}): Es sind p, q zwei Punkte in der Kreisscheibe D_1

$$\begin{aligned}
d_{D_1}(p, q) &:= d_H(Z_1^{-1}(p), Z_1^{-1}(q)) = d_H\left(Z_1^{-1}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), Z_1^{-1}\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= d_H\left(\frac{1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{arcosh}\left(-\left\langle\left\langle \frac{1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle\right) \\
&= \operatorname{arcosh}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2} \cdot \sqrt{1-q_1^2-q_2^2}} \cdot \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle\right) \\
&= \operatorname{arcosh}\left(\frac{-1 \cdot (p_1q_1 + p_2q_2 - 1^2)}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2} \cdot \sqrt{1-q_1^2-q_2^2}}\right) \\
&= \operatorname{arcosh}\left(\frac{1 - p_1q_1 - p_2q_2}{\sqrt{(1-p_1^2-p_2^2) \cdot (1-q_1^2-q_2^2)}}\right)
\end{aligned}$$

Lassen wir nun die dritte Koordinate für die Kreisscheibe D_1 weg, da sie immer 1 ist, dann erhalten wir aus der Abbildung $Z_1 : H^2 \rightarrow D_1$ die Abbildung von dem MINKOWSKI-Modell H^2 in die KLEINSche Scheibe D_{Kl} :

$$Z_{Kl} : H^2 \rightarrow D_{Kl}, \quad Z_{Kl} : p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in H^2 \mapsto \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = p' \in D_{Kl}$$

$$Z_{Kl}(p) = Z_{Kl}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = p' \in D_{Kl} \quad (4.21)$$

Die Umkehrabbildung $Z_{Kl}^{-1} : D_{Kl} \rightarrow H^2$ erhalten wir entsprechend aus Z_1^{-1} :

$$Z_{Kl}^{-1} : D_{Kl} \rightarrow H^2, \quad Z_{Kl}^{-1} : p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \in D_{Kl} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-p_1'^2-p_2'^2}} \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p \in H^2$$

Definition 4.17. (KLEINSche Scheibe):

$$D_{Kl} = \{p' \in \mathbb{R}^2 \mid \|p'\| < 1 \text{ und } p' = Z_{Kl}(p) \wedge p \in H^2\} \quad (4.22)$$

Die Metrik d_{Kl} erhalten wir aus der Metrik d_{D_1} .

Definition 4.18. (Metrik der KLEINSchen Scheibe): Sind $p \in \mathbb{R}^2$ und $q \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte von D_{KL} , dann ist

$$d_{\text{KL}}(p, q) := \operatorname{arcosh} \left(\frac{1 - p_1 q_1 - p_2 q_2}{\sqrt{(1 - p_1^2 - p_2^2) \cdot (1 - q_1^2 - q_2^2)}} \right) \quad (4.23)$$

$$= \operatorname{arcosh} \left(\frac{1 - \langle p, q \rangle}{\sqrt{(1 - \|p\|^2) \cdot (1 - \|q\|^2)}} \right) \quad (4.24)$$

4.4. POINCARÉsches Modell: Scheibe

Dieses Modell der hyperbolischen Geometrie wird im praktischen Teil der Arbeit die Aufgabe der Darstellung übernehmen, denn es gibt den interessant aussehenden *Fischaugen-Effekt* (fisheye effect), wenn man ein regelmäßiges Dreiecksnetz in der POINCARÉ-Scheibe darstellt.

Im POINCARÉ-Modell wird die hyperbolische Ebene ebenfalls so wie im KLEINSchen-Modell im Innern der Einheitskreisscheibe \mathcal{K} repräsentiert. Daher sind die hyperbolischen Punkte sowie auch die idealen und ultraidealen Punkte identisch mit denen aus dem KLEINSchen-Modell.

Allerdings werden hier die Geraden als offene Durchmesser von \mathcal{K} dargestellt – oder als offene Kreisbögen von Kreisen, die \mathcal{K} im rechten Winkel schneiden.

Dadurch wird die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte erreicht.

Wieder ist es offensichtlich, dass die Längenmessung im POINCARÉ-Modell nicht EUKLIDisch sein kann.

Durch die Darstellung von hyperbolischen Geraden als EUKLIDische Kreisbögen erreicht man, dass das POINCARÉ-Modell konform ist, d.h. der Winkel zwischen zwei Geraden ist gleich dem EUKLIDischen Winkel zwischen ihren Tangenten im Schnittpunkt. Die Abbildung ist winkeltreu.

4.4.1. Beziehung der POINCARÉschen-Scheibe zum MINKOWSKI-Modell

Ähnlich wie die KLEINSche Scheibe lässt sich auch die POINCARÉ-Scheibe mittels Zentralprojektion aus dem MINKOWSKI-Modell über eine „Zwischenscheibe“ erstellen. Allerdings

liegt das Projektionszentrum nun nicht mehr im Punkt $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sondern beim *Flucht-*

punkt $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, und die Projektionsebene der „Zwischenscheibe“ ist nicht mehr

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ sondern $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies bedeutet, dass die Abbildungsvorschrift leicht anders sein wird,

wenngleich der Weg zur Bestimmung der Abbildungsvorschrift identisch ist.

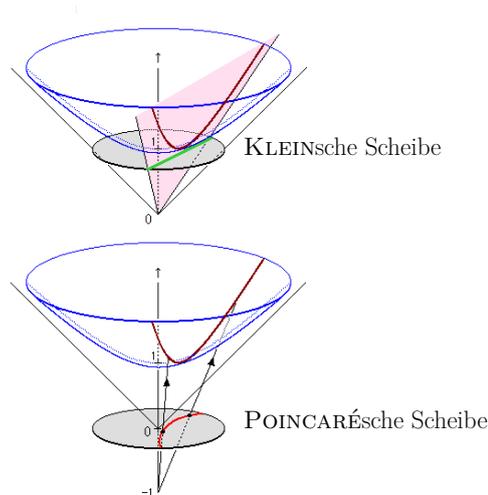


Abbildung 4.5.: Vergleich der Transformationen des MINKOWSKI-Modells in die KLEINSche Scheibe und POINCARÉsche Scheibe. Abbildung basiert auf [Ito2006]

$$Z_2 : H^2 \rightarrow D_2 = \left\{ d \mid d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } d_1^2 + d_2^2 = r^2 < 1 \right\} \subset E = \left\{ q \mid q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$Z_2(p) \in D_2$ ist ein Punkt auf einer EUKLIDISCHEN Gerade, die durch das Projektionszentrum F und den Punkt p definiert ist. $Z_2(p)$ liegt auf dieser Geraden zwischen F und p . Die genauen Koordinaten des Punktes $Z_2(p)$ lassen sich ebenfalls mit einer *linearen Interpolation* bestimmen.

$$Z_2(p) = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für die dritte Komponente heißt dies:

$$0 = t \cdot p_3 + (1-t) \cdot (-1) = t \cdot p_3 - 1 + t = t \cdot (p_3 + 1) - 1$$

Nach t auflösen ergibt:

$$t = \frac{1}{p_3 + 1}$$

t in die Interpolationsgleichung einsetzen ergibt:

$$Z_2(p) = \frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{1}{1+p_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir von $Z_2(p) = p'$ genauer die dritte Komponente p'_3 :

$$\begin{aligned} p'_3 &= \frac{1}{1+p_3} \cdot p_3 + \left(1 - \frac{1}{1+p_3}\right) \cdot (-1) \\ &= \frac{p_3}{1+p_3} - 1 + \frac{1}{1+p_3} \\ &= \frac{p_3}{1+p_3} - \frac{1+p_3}{1+p_3} + \frac{1}{1+p_3} \\ &= \frac{p_3 - (1+p_3) + 1}{1+p_3} \\ &= \frac{0}{1+p_3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Komponente verschwindet wie gewünscht. Daher können wir auch einfacher schreiben

$$Z_2(p) = p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{Z}_2(p) := \frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{1}{1+p_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit ist die Projektionsvorschrift:

$$\tilde{Z}_2(p) = \tilde{Z}_2 \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz 4.8. *Ist $\tilde{Z}_2(p) = \frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = p' \in H^2 \wedge p \in D_2$ so ist die zugehörige Umkehrfunktion $Z_2^{-1} : D_2 \rightarrow H^2$*

$$Z_2^{-1}(p') = Z_2^{-1} \left(\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{1-p_1'^2 - p_2'^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p'_1 \\ 2 \cdot p'_2 \\ 1 + p_1'^2 + p_2'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
H^2 \ni p &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = Z_2^{-1}(Z_2(p)) = Z_2^{-1}(\tilde{Z}_2(p)) = Z_2^{-1}\left(\frac{1}{1+p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{p_1}{1+p_3}\right)^2 - \left(\frac{p_2}{1+p_3}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{p_1}{1+p_3} \\ 2 \cdot \frac{p_2}{1+p_3} \\ 1 + \left(\frac{p_1}{1+p_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{1+p_3}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1+p_3}{1+p_3}\right)^2 - \left(\frac{p_1}{1+p_3}\right)^2 - \left(\frac{p_2}{1+p_3}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{p_1}{1+p_3} \\ 2 \cdot \frac{p_2}{1+p_3} \\ 1 + \left(\frac{p_1}{1+p_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{1+p_3}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(1+p_3)^2}{(1+p_3)^2 - p_1^2 - p_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{p_1}{1+p_3} \\ 2 \cdot \frac{p_2}{1+p_3} \\ 1 + \left(\frac{p_1}{1+p_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{1+p_3}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+p_3)^2 - p_1^2 - p_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_1 \\ 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_2 \\ (1+p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix} = \dots
\end{aligned}$$

Vereinfachen wir zunächst den Nenner des Bruches und anschließend den Eintrag in der dritten Komponente des Vektors; dazu benutzen wir die Identität $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1$, welche in H^2 gilt:

$$\begin{aligned}
(1+p_3)^2 - p_1^2 - p_2^2 &= 1 + 2 \cdot p_3 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 = 1 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 + 2 \cdot p_3 \\
&= 1 - (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) + 2 \cdot p_3 = 1 - (-1) + 2 \cdot p_3 \\
&= 2 + 2 \cdot p_3 = 2 \cdot (1+p_3) \\
(1+p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2 &= 1 + 2 \cdot p_3 + p_3^2 + p_1^2 + p_2^2 = 1 + 2 \cdot p_3 + p_3^2 - 1 + p_3^2 \\
&= 2 \cdot p_3 + 2 \cdot p_3^2 = 2 \cdot p_3 \cdot (1+p_3)
\end{aligned}$$

Wir können also weiter umformen

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{(1+p_3)^2 - p_1^2 - p_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_1 \\ 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_2 \\ (1+p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2 \cdot (1+p_3)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_1 \\ 2 \cdot (1+p_3) \cdot p_2 \\ 2 \cdot p_3 \cdot (1+p_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p \in H^2
\end{aligned}$$

□

Die Abbildung $Z_2 : H^2 \rightarrow D_2$ wird zu einer Isometrie bezüglich d_H , wenn wir für die Kreisscheibe D_2 die Abbildung $d_{D_2} : D_2 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ als Metrik folgendermaßen definieren.

Definition 4.19. (Metrik d_{D_2}): Es sind p, q zwei Punkte in der Kreisscheibe D_2

$$\begin{aligned}
d_{D_2}(p, q) &:= d_H \left(Z_2^{-1}(p), Z_2^{-1}(q) \right) = d_H \left(Z_2^{-1} \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), Z_2^{-1} \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \left\langle \left\langle Z_2^{-1} \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), Z_2^{-1} \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \left\langle \left\langle \frac{1}{1 - p_1^2 - p_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p_1 \\ 2 \cdot p_2 \\ 1 + p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{1 - q_1^2 - q_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot q_1 \\ 2 \cdot q_2 \\ 1 + q_1^2 + q_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \frac{1}{(1 - p_1^2 - p_2^2) \cdot (1 - q_1^2 - q_2^2)} \cdot \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 2 \cdot p_1 \\ 2 \cdot p_2 \\ 1 + p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \cdot q_1 \\ 2 \cdot q_2 \\ 1 + q_1^2 + q_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \frac{4 \cdot p_1 \cdot q_1 + 4 \cdot p_2 \cdot q_2 - (1 + p_1^2 + p_2^2) \cdot (1 + q_1^2 + q_2^2)}{(1 - p_1^2 - p_2^2) \cdot (1 - q_1^2 - q_2^2)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \frac{4 \cdot p_1 \cdot q_1 + 4 \cdot p_2 \cdot q_2 - \left(1 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{\left(1 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) - 4 \cdot p_1 \cdot q_1 - 4 \cdot p_2 \cdot q_2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right)
\end{aligned}$$

Um uns auf die Ausmultiplikation des Klammerausdruckes im Zähler zu konzentrieren, führen wir eine Abkürzung für diesen ein und betrachten ihn separat.

$$\begin{aligned}
\Theta &:= \left(1 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) \\
&= 1 + \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 \\
&= 1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 \\
&\quad + 2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \\
&= 1 \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) \\
&\quad + 2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 \\
&= \left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) \\
&\quad + 2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Damit können wir den Zähler des Bruches umformulieren und schreiben:

$$\begin{aligned}
d_{D^2}(p, q) &= \operatorname{arcosh} \left(\frac{\Theta - 4 \cdot p_1 \cdot q_1 - 4 \cdot p_2 \cdot q_2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right) + 2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 - 4 \cdot p_1 \cdot q_1 - 4 \cdot p_2 \cdot q_2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2 \cdot \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2 - 4 \cdot p_1 \cdot q_1 - 4 \cdot p_2 \cdot q_2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \cdot \frac{q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2 \cdot p_1 \cdot q_1 - 2 \cdot p_2 \cdot q_2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \cdot \frac{(p_1^2 - 2 \cdot p_1 \cdot q_1 + q_1^2) + (p_2^2 - 2 \cdot p_2 \cdot q_2 + q_2^2)}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \cdot \frac{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}\right)^2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)^2\right)} \right)
\end{aligned}$$

Lassen wir nun wie oben für die KLEINSche Scheibe auch hier die dritte Koordinate für die Kreisscheibe D_2 weg, da sie immer 0 ist, dann erhalten wir aus der Abbildung $\tilde{Z}_2 : H^2 \rightarrow D_2$ die Abbildung des MINKOWSKI-Modells H^2 in die POINCARÉsche Scheibe D_P :

$$\begin{aligned}
Z_P : H^2 \rightarrow D_P, \quad Z_P : p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in H^2 \mapsto \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = p' \in D_P \\
Z_P(p) = Z_P \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{1 + p_3} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = p' \in D_P
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Umkehrabbildung $Z_P^{-1} : D_P \rightarrow H^2$ erhalten wir entsprechend aus Z_2^{-1} :

$$\begin{aligned}
Z_P^{-1} : D_P \rightarrow H^2, \\
Z_P^{-1} : p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \in D_P \mapsto \frac{1}{1 + p_1'^2 + p_2'^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p'_1 \\ 2 \cdot p'_2 \\ 1 + p_1'^2 + p_2'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p \in H^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Definition 4.20. (POINCARÉsche Scheibe):

$$D_P = \left\{ p' \in \mathbb{R}^2 \mid \|p'\| < 1 \text{ und } p' = Z_P(p) \wedge p \in H^2 \right\} \tag{4.27}$$

Die Metrik d_P erhalten wir aus der Metrik d_{D_2} .

Definition 4.21. (Metrik der POINCARÉschen Scheibe): Sind $p \in \mathbb{R}^2$ und $q \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte von D_P , dann ist

$$\begin{aligned}
 d_P(p, q) &:= \operatorname{arcosh} \left(1 + 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \right)^2}{\left(1 - \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \right)^2 \right)} \right) \\
 &= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2 \cdot \left(\sqrt{\langle p - q, p - q \rangle} \right)^2}{\left(1 - \left(\sqrt{\langle p, p \rangle} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{\langle q, q \rangle} \right)^2 \right)} \right) \\
 &= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2 \cdot (\|p - q\|)^2}{\left(1 - (\|p\|)^2 \right) \cdot \left(1 - (\|q\|)^2 \right)} \right) \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

4.4.2. Beziehung der POINCARÉschen-Scheibe zur KLEINSchen-Scheibe

Aus der KLEINSchen-Scheibe kann man die POINCARÉsche-Scheibe erhalten. Man wählt eine Kugel, die den gleichen Radius wie die KLEINSche-Scheibe besitzt. Diese Kugel berührt die KLEINSche Scheibe in ihrem Ursprung, d.h. der Mittelpunkt der Scheibe ist der Südpol der Kugel. Das KLEINSche Modell wird punktweise *orthogonal* nach oben auf die Südhalbkugel, das ist die untere Hälfte der Kugel, projiziert. Dadurch gehen die Sehnen des KLEINSchen Modells in Kreisbögen über, die senkrecht auf dem Äquator der Kugel stehen. Schließlich projiziert man alles vom Nordpol der Kugel aus *stereographisch*⁸ in die EUKLIDische Ebene, in der die KLEINSche Scheibe liegt. Die stereographisch in die Ebene projizierten Punkte des Kugeläquators bilden einen Kreis, den Rand einer Kreisscheibe. Der Radius dieser Scheibe ist doppelt so groß wie der Radius der Kugel. In diese Scheibe werden alle anderen Punkt der unteren Halbkugel projiziert. Man erhält so eine Kreisscheibe, bei der die Verbindung zwischen zwei Punkten ein Teil eines Kreisbogens ist, der im rechten Winkel den Rand der Scheibe berührt. Vergleiche auch [Hau1995].

⁸Die stereographische Projektion hat neben ihrer Winkeltreue auch die Eigenschaft der Kreistreue, verzerrt allerdings weiter entfernte Strecken erheblich. Sie findet ihre häufigste Verwendung nicht in der Geografie, sondern in der Astronomie (Sternkarten, Planeten), in der Geodäsie und Navigation (winkeltreue Karten) und in der Geophysik (Verteilung von Kräften oder Linienstrukturen auf der Erdkugel).

Im $(n + 1)$ -dimensionalen Raum \mathbb{R}^{n+1} kann man die auf der n -Sphäre S^n gelegenen Punkte mit den Koordinaten (x_i) vermöge der folgenden Vorschrift in den \mathbb{R}^n abbilden:

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^T \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1} - 1}, \frac{x_2}{x_{n+1} - 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right)^T \in \mathbb{R}^n$$

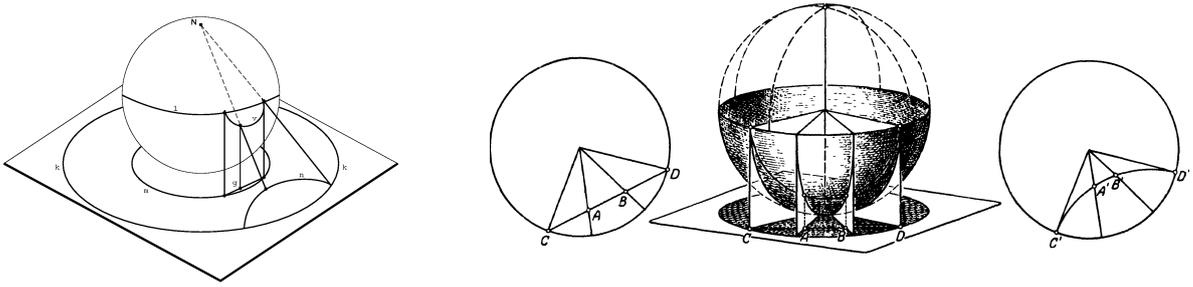


Abbildung 4.6.: Transformation zwischen KLEINScher Scheibe und POINCARÉscher Scheibe. Abbildung entnommen [Mon2001] und [Kle1928]

4.5. POINCARÉsches Modell: Obere-Halbebene

Dieses Modell ist genau wie die POINCARÉ-Scheibe ein konformes Modell. Hierbei werden die hyperbolischen Punkte in die EUKLIDischen Punkte der oberen Halbebene abgebildet, d.h. $OHE = \left\{ p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}^2, y > 0 \right\}$. Dabei entspricht der Mittelpunkt der

KLEINSchen- oder POINCARÉschen-Scheibe dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der y -Achse der oberen Halbebene. Die idealen Punkte sind hier die Punkte der x -Achse vereinigt mit dem unendlich fernen Punkt in y -Richtung. Geraden sind entweder offene Halbgeraden, die senkrecht auf der x -Achse stehen, oder offene Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x -Achse. Beide Geradenarten schneiden die x -Achse nicht, haben keinen Punkt mit ihr, kommen ihr aber beliebig nahe.

4.5.1. Beziehung des Modells Obere-Halbebene zum MINKOWSKI-Modell

Die Transformation von Punkten des MINKOWSKI-Modells in die obere Halbebene geschieht mit

$$f : H^2 \ni p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{p_3 - p_2} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = p' \in OHE \quad (4.29)$$

Die Rücktransformation von OHE nach H^2 geschieht mit

$$f^{-1} : OHE \ni p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2 \cdot p'_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p'_1 \\ p'^2_1 + p'^2_2 - 1 \\ p'^2_1 + p'^2_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot p'_1 \\ \|p'\|^2 - 1 \\ \|p'\|^2 + 1 \end{pmatrix} = p \in H^2 \quad (4.30)$$

Definition 4.22. (POINCARÉ Modell: Obere Halbebene):

$$OHE = \left\{ p' \in \mathbb{R}^2 \mid p' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \wedge p'_2 > 0 \text{ und } p' = f(p) \wedge p \in H^2 \right\} \quad (4.31)$$

Bestimmen wir nun noch wegen der Vollständigkeit die Metrik für OHE , dabei nutzen wir die Eigenschaft, dass die OHE ein Isometrisches Modell zum MINKOWSKI-Modell der hyperbolischen Ebene ist, aus. Es sind p und q zwei Punkte in der oberen Halbebene; dann können wir den Abstand zwischen diesen Punkten mit der nachfolgend hergeleiteten Metrik berechnen:

$$\begin{aligned}
d_{OHE}(p, q) &:= d_H(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \left\langle \left\langle f^{-1}(p), f^{-1}(q) \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \left\langle \left\langle \frac{1}{2 \cdot p_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p_1 \\ p_1^2 + p_2^2 - 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2 \cdot q_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot q_1 \\ q_1^2 + q_2^2 - 1 \\ q_1^2 + q_2^2 + 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(- \frac{1}{2p_2 \cdot 2q_2} \cdot \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 2 \cdot p_1 \\ \|p\|^2 - 1 \\ \|p\|^2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \cdot q_1 \\ \|q\|^2 - 1 \\ \|q\|^2 + 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-1 \cdot ((2p_1 \cdot 2q_1) + (\|p\|^2 - 1) \cdot (\|q\|^2 - 1) - (\|p\|^2 + 1) \cdot (\|q\|^2 + 1))}{4 \cdot p_2 \cdot q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-1 \cdot (4p_1q_1 + (\|p\|^2 \|q\|^2 - \|p\|^2 - \|q\|^2 + 1) - (\|p\|^2 \|q\|^2 + \|p\|^2 + \|q\|^2 + 1))}{4p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-1 \cdot (4p_1q_1 + \|p\|^2 \|q\|^2 - \|p\|^2 \|q\|^2 - \|p\|^2 - \|p\|^2 - \|q\|^2 - \|q\|^2 + 1 - 1)}{4p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-1 \cdot (4p_1q_1 + (-2 \|p\|^2) + (-2 \|q\|^2))}{4p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-2p_1q_1 + \|p\|^2 + \|q\|^2}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{-2p_1q_1 + p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{p_1^2 - 2p_1q_1 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2 + q_2^2 + 2p_2q_2 - 2p_2q_2}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + 2p_2q_2}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(\frac{2p_2q_2 + \langle p - q, p - q \rangle}{2p_2q_2} \right) \\
&= \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{\langle p - q, p - q \rangle}{2p_2q_2} \right)
\end{aligned}$$

Definition 4.23. (Metrik der oberen Halbebene): Sind $p \in \mathbb{R}^2$ und $q \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte der oberen Halbebene OHE , dann ist

$$d_{OHE}(p, q) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{\langle p - q, p - q \rangle}{2p_2q_2} \right) \quad (4.32)$$

4.5.2. Beziehung der Scheibenmodelle zum Modell der oberen Halbebene

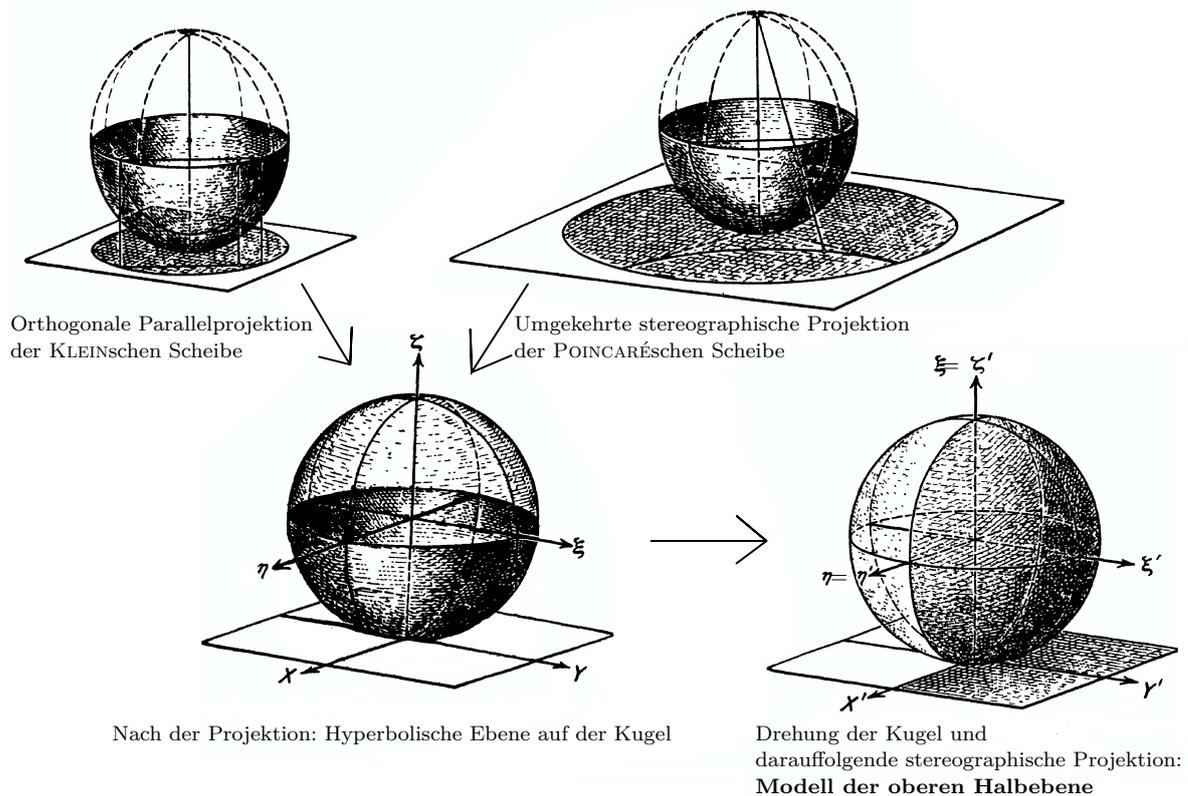


Abbildung 4.7.: Transformationen der Scheiben-Modelle in das Modell der oberen Halbebene. Abbildung basiert auf Zeichnungen in [Kle1928]

Das KLEINSche-Modell wird orthogonal nach oben auf die untere Hälfte einer Kugel gleichen Radius projiziert, die den Ursprung der KLEINSchen Scheibe als Südpol besitzt. Das POINCARÉsche Scheiben-Modell wird umgekehrt stereographisch nach oben auf die untere Hälfte einer Kugel mit halb so großem Radius projiziert, die den Ursprung der POINCARÉschen Scheiben als Südpol besitzt.

Sowohl bei der Projektion der KLEINSchen als auch der Projektion der POINCARÉschen Scheibe geht der jeweilige Scheibenrand auf den Äquator der jeweiligen Kugel über. Beide Kugeln sind aus schon Bekanntem tatsächlich identisch. Es ist dieselbe Kugel mit der man das KLEINSche Scheiben-Modell in das Scheiben-Modell von POINCARÉ überführen kann.

Nach der Projektion der Scheiben-Modelle auf die untere Halbkugel der Kugel wird diese Kugel so um ihre Achsen gedreht, dass die untere Halbkugel auf die rechte Halbkugel übergeht. Anschließend wird alles stereographisch vom jetzigen Nordpol aus in die EUKLIDISCHE Ebene, in der die Scheiben-Modelle liegen, projiziert. Dabei gehen die idealen Punkte, das waren die Randpunkte der Scheiben, die auf den Äquator der Kugel projiziert und anschließend rotiert wurden, mit einer Ausnahme auf die x-Achse über. Der ideale Punkt, der nach Projektion auf die Kugel und Drehung derselben auf den Nordpol der Kugel zu liegen kommt, wird auf den „unendlich fernen Punkt“ in y-Richtung abgebildet. Damit gehen alle asymptotisch parallelen Geraden, die sich im KLEINSCHEN Scheiben-Modell in diesem Punkt treffen, im Oberen-Halbebene-Modell auf EUKLIDISCHE Parallele zur y-Achse über. [Hau1995]

Bemerkung. Identifizieren wir die Punkte $P(x, y)$ der EUKLIDISCHEN Ebene mit Punkten der komplexen Zahlenebene $P = x + iy$, dann können die Punkte der Oberen-Halbebene nicht nur mit kartesischen Koordinaten, sondern auch mit komplexen Zahlen beschrieben werden. $OHE \ni P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 + ip_2 = z \in \mathbb{C}$ wobei stets gilt $0 < p_2 \in \mathbb{R}$.

Die Kugel, die verwendet wurde, um die Punkte der Scheiben-Modelle in die Punkte der Obere-Halbebene zu überführen, kann als RIEMANNSCHE Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ angesehen werden.

4.6. Umrechnungen und Metriken im Überblick

Modell	Metrik
Minkowski	$d_H(p, q) = \operatorname{arcosh}(-\langle p, q \rangle)$
Klein	$d_{KI}(p, q) = \operatorname{arcosh} \left(\frac{1 - \langle p, q \rangle}{\sqrt{(1 - \ p\ ^2) \cdot (1 - \ q\ ^2)}} \right)$
Poincaré	$d_P(p, q) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2 \cdot (\ p - q\)^2}{(1 - (\ p\)^2) \cdot (1 - (\ q\)^2)} \right)$
Obere-Halbebene	$d_{OHE}(p, q) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{\langle p - q, p - q \rangle}{2p_2q_2} \right)$

Bemerkung. Neben der in dieser Arbeit benutzten Art der hyperbolischen Metrik ist eine weitere Art recht verbreitet, deren Notation das Streckenstück ds verwendet. Diese Art der Metrik gelingt also über die Nutzung des Wegintegrals; auf diese Notation werden wir hier nicht weiter eingehen und sie auch nicht benutzen. Genauere Informationen dazu finden sich z.B. in [CFKP1997] und [Wäs2002].

von	Umrechnung nach	Formel
Klein	Minkowski	$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (x, y, 1),$ wobei $x^2 + y^2 < 1$
Minkowski	Klein	$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right),$ wobei $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
Poincaré	Minkowski	$(x, y) \mapsto \frac{1}{1-x^2-y^2} \cdot (2x, 2y, 1+x^2+y^2),$ wobei $x^2 + y^2 < 1$
	alternativ:	$(x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1-r^2}, \frac{2y}{1-r^2}, \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^2 \right),$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$
Minkowski	Poincaré	$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right),$ wobei $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
Obere-Halbebene	Minkowski	$(x, y) \mapsto \frac{1}{2y} (2x, x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 + 1),$ wobei $y > 0$
Minkowski	Obere-Halbebene	$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{z-y} (x, 1),$ wobei $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Aus den Beziehungen zwischen dem MINKOWSKI-Modell und den drei anderen Modellen, lassen sich auch die Formeln für die Beziehungen der drei zweidimensionalen Modelle untereinander bestimmen. Der Weg zur Bestimmung der Beziehung ist immer der gleiche.

$$X \rightarrow H^2 \rightarrow Y$$

wobei $X \neq Y$ jeweils zweidimensionale Modelle $\in \{D_{KI}, D_P, OHE\}$ sind.

Hier wird nur noch das Ergebnis der entsprechenden Beziehungsberechnung angegeben.

von	nach	Formel
Klein	Obere-Halbebene	$(x, y) \mapsto \frac{1}{1-y} \cdot (x, \sqrt{1-x^2-y^2})$
Obere-Halbebene	Klein	$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot (2x, x^2+y^2-1)$ wobei $y > 0$
Obere-Halbebene	Poincaré	$(x, y) \mapsto \frac{2}{x^2+(1+y)^2} \cdot (x, \frac{x^2+y^2-1}{2})$
Poincaré	Obere-Halbebene	$(x, y) \mapsto \frac{2}{x^2+(1-y)^2} \cdot (x, \frac{1-x^2-y^2}{2})$
Klein	Poincaré	$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}+1} \cdot (x, y) \right)$
Poincaré	Klein	$(x, y) \mapsto \left(\frac{2}{1+x^2+y^2} \cdot (x, y) \right)$

Bemerkung. COLLEEN ROBLES gibt in [Rob1996]⁹ an, dass folgende Formel sowohl für die Transformation von der oberen Halbebene in die POINCARÉ Scheibe und die umgekehrte Richtung gilt: $(x, y) \mapsto \frac{2}{x^2+(1+y)^2} \cdot (x, 1+y)$

Diese Formel ließ sich jedoch nicht verifizieren.

Weiterhin gibt C. ROBLES in [Rob1996]¹⁰ eine Möglichkeit an, die KLEINSche Scheibe in die POINCARÉsche Scheibe zu transformieren, wobei in diesem Verfahren die Punkte der Scheiben durch Polarkoordinaten beschrieben sind, genauso wie bei der zugehörigen Umkehrung:

von	nach	Formel
Klein	Poincaré	Polarkoordinaten: $(r, \theta) \mapsto \left(\frac{r}{1+\sqrt{1-r^2}}, \theta \right)$, mit $0 \leq r < 1$
Poincaré	Klein	Polarkoordinaten: $(r, \theta) \mapsto \left(\frac{2r}{1+r^2}, \theta \right)$, mit $0 \leq r < 1$

⁹Genaue Stelle in dem Online-Dokument:

<http://www.geom.uiuc.edu/~crobles/hyperbolic/hypr/ibm/puhp/eq.html>

¹⁰Genaue Stelle in dem Online-Dokument:

<http://www.geom.uiuc.edu/~crobles/hyperbolic/hypr/ibm/pkb/eq.html>

4.7. Vor- und Nachteile der betrachteten Modelle

Das dreidimensionale MINKOWSKI-Modell ist aus drei ganz konkreten Gründen als Rechenmodell gewählt worden:

1. Mehrere aufeinander folgende geometrische Operationen lassen sich in einer Transformationsmatrix ausdrücken. Dies reduziert numerische Fehler.
2. Bei geeigneter Implementierung ließen sich diese Matrix-Operationen auf moderne Graphik-Chips (GPU) auslagern, die hardwaremäßig optimiert sind mit 3×3 -Matrizen schneller zu arbeiten als die CPU es könnte. Insbesondere sind GPUs optimiert auf die Matrix-Multiplikation. Diese Optimierung kann bei modernen 3D-Spielen durchaus sichtbar werden, wenn man die Flüssigkeit der wechselnde Veränderung in der Darstellung bei alten Graphikkarten mit neuen Graphikkarten vergleicht.
3. Jeder Punkt damit auch jeder Netzknoten also jedes Neuron im MINKOWSKI-Modell müsste mit der gleichen Transformationsmatrix multipliziert werden. Dieses bietet die Möglichkeit für paralleles und verteiltes Rechnen.

Das zweidimensionale POINCARÉsche Scheiben Modell ist aus folgenden Gründen als Visualisierungsmodell gewählt worden:

1. Die ganze hyperbolische Fläche „passt“ in einen EUKLIDisch begrenzten Kreis, der sich einfach auf einem Monitor darstellen lässt.
2. Es ist ein winkeltreues Modell. Dies ist besonders notwendig, wenn der Mensch vor dem Bildschirm in der Karte navigieren möchte.
3. Der Fischaugen-Effekt ist visuell ansprechend.

Die KLEINSche Scheibe wurde nicht als Visualisierungsmodell genommen, da sie ein nicht winkeltreues Modell ist. Ebenso wurde sie nicht als Rechenmodell gewählt, da es zu numerischen Problemen kommen würde bei der geometrischen Manipulation von Netzknoten, die sehr nahe am Scheibenrand liegen.

Das Modell der oberen Halbebene scheidet als Visualisierungsmodell aus, da es ein EUKLIDisch nicht begrenztes Modell ist. Auch als Rechenmodell scheidet es aus, da sich die Berechnungen nicht so einfach wie im MINKOWSKI-Modell als dreidimensionale Matrixoperationen schreiben lassen.

Zusammenfassung.

Viele der in diesem Kapitel hergeleiteten Beziehungen sind von unmittelbarer Bedeutung für die HSOM:

- Für unser Rechenmodell, das MINKOWSKI-Modell, habe wir die LORENTZ-Transformationen – genauer die LORENTZ-Drehung und den LORENTZ-Boost – als Rechenoperationen eingeführt und besprochen.
 - Die Beziehung vom Rechenmodell zum Visualisierungsmodell, der POINCARÉschen Scheibe, haben wir erklärt.
 - Wegen der Vollständigkeit haben wir zusätzlich das KLEINSche Scheibenmodell wie auch das POINCARÉsche Modell der oberen Halbebene besprochen.
 - Die Vor- und Nachteile der verschiedenen Modelle der hyperbolischen Ebene als Rechenmodell und Visualisierungsmodell sind verdeutlicht worden.
-

5. Parkettierung der hyperbolischen Fläche

Dieses ist das zweite zentrale Kapitel der Arbeit. Es geht um die Generierung von Gittern im hyperbolischen Raum:

- Wir präsentieren eine kurze Erklärung wie eine Triangulierung mit MÖBIUS-Transformationen in der POINCARÉschen Scheibe prinzipiell gelänge.
- Als numerisch deutlich stabileres Verfahren stellen wir vor, wie eine Generierung von Dreiecksnetzen im MINKOWSKI-Raum mit Hilfe von LORENTZ-Transformationen möglich ist, sowie wie dann die Navigation innerhalb des Netzes möglich ist. Diese Darstellungen sind dabei in der Arbeit komplett neu entwickelt worden.

Kapitelinhalt. Dieses Kapitel hat einen sehr anwendungsbezogenen Hintergrund. In diesem Kapitel wird ein Dreiecksnetz im MINKOWSKI-Modell der hyperbolischen Ebene konstruiert. Daraus resultiert ein Algorithmus, der z.B. in MatLab implementiert werden kann. Angestrebt ist weiterhin die Formulierung der Gedanken zu einer möglicherweise passenden Datenstruktur.

5.1. Triangulierungen

Bemerkung. Die Dreiecksgruppe $\Delta(l, m, n)$ ist eine Bewegungsgruppe der EUKLIDischen Ebene, der zweidimensionalen Sphäre oder der hyperbolischen Ebene. Gegeben ist ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \frac{\pi}{l}, \beta = \frac{\pi}{m}, \gamma = \frac{\pi}{n}$. Die zugehörige Gruppe wird erzeugt durch die Spiegelungen an den Dreiecksseiten.

- Im EUKLIDischen Fall gilt $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, denn die Innenwinkelsumme eines EUKLIDischen Dreiecks ist genau π
- Im sphärischen Fall gilt $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$, denn die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks ist größer als π . Diese sphärischen Dreiecke werden SCHWARZsche Dreiecke genannt.

- Im hyperbolischen Fall gilt $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, denn die Innenwinkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks ist stets kleiner als π . Manchmal werden auch diese Dreiecke SCHWARZsche Dreiecke genannt. Im POINCARÉschen Modell der oberen Halbebene sind die so genannten SCHWARZschen Dreiecks-Funktionen – allgemeiner SCHWARZ-CHRISTOFFEL¹-Abbildung – definiert. [AF2003]

Eine SCHWARZ-CHRISTOFFEL-Abbildung ist eine Transformation der komplexen Ebene, die die obere Halbebene konform auf ein Polygon abbildet.

Solche Triangulierungen sind nicht notwendig regulär.

Wir interessieren uns jedoch für reguläre Triangulierungen. Dazu betrachten wir uns zunächst die Eigenschaften für eine Parkettierung mit einem regulären Polygon.

Anders als in der EUKLIDischen Ebene sind die Kantenlängen eines Dreiecks in der hyperbolischen Ebene durch Vorgabe der Winkel im Dreieck festgelegt (siehe Seite 28).

Es gibt also keine ähnlichen hyperbolische Dreiecke, die nicht kongruent sind.

Es existieren gleichseitige hyperbolische Dreiecke für jeden beliebigen Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ ausschließlich. Der Winkelwert $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$ führt automatisch zu EUKLIDischen Dreiecken, zu einer regulären Dreieckszerlegung, bei der an jedem Knoten – das sind die Eckpunkte der Dreiecke – des Dreiecksnetzes 6 Dreiecke zusammentreffen.

Genauso existieren reguläre p -Ecke für jeden beliebigen Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi \cdot (p-2)}{p}$ ausschließlich. Daher lässt sich die hyperbolische Ebene mit regulären p -Ecken pflastern, so dass die Anzahl der p -Ecke, die sich in einem Eckpunkt treffen, genau q beträgt.

Die einzige Bedingung hierbei ist, dass $(p-2) \cdot (q-2) > 4$ sein muss, was gleichwertig zur obigen Winkelbedingung ist.

Diese spezielle p -Ecke sollen (p, q) -Ecke heißen. Jede reguläre Zerlegung (*regular tessellation*) wird repräsentiert durch ein *Schläfli-Symbol*² $[p, q]$ [Hat2002].

¹Benannt nach ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL und HERMANN AMANDUS SCHWARZ.

ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (* 10. November 1829 in Montjoie heute Monschau bei Aachen, †15. März 1900 in Straßburg) war ein deutscher Mathematiker, zum Schluss Professor an der Universität Straßburg.

HERMANN AMANDUS SCHWARZ (* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien, †30. November 1921 in Berlin) war ein deutscher Mathematiker. SCHWARZ studierte in Berlin zunächst Chemie, dann Mathematik. Zwischen 1867 und 1869 war er Professor in Halle, dann in Zürich. Seit 1875 arbeitete er an der Universität Göttingen und schließlich 1892 an der Berliner Akademie der Wissenschaften. SCHWARZ beschäftigte sich insbesondere mit der Funktionentheorie und der Theorie der Minimalflächen.

²Das *Schläfli-Symbol* ist eine Notation der Form $[p, q, r, \dots]$, welche reguläre Polytope (*regular polytopes*) und Parkettierungen (*tessellations, tilings*) definiert.– Polytop bezeichnet in der Geometrie ein verallgemeinertes Polygon in beliebiger Dimension. Wie das Polygon besteht auch das Polytop aus mehreren Punkten im Raum (Ecken), die durch Kanten verbunden sein können. Die Verallgemeinerung von Polytopen auf unbeschränkte Körper heißt Polyeder.

Das *Schläfli-Symbol* ist nach LUDWIG SCHLÄFLI benannt. LUDWIG SCHLÄFLI (* 15. Januar 1814 in Grasswil, heute zu Seeberg; †20. März 1895 in Bern) war ein Schweizer Mathematiker, der sich mit Geometrie und komplexer Analysis (damals Funktionentheorie genannt) beschäftigte. Er spielte eine Schlüsselrolle bei der Entwicklung des Begriffs der Dimension.

Satz 5.1. *Schon anhand des Schläfli-Symbols kann man bestimmen, ob $[p, q]$ eine Parkettierung der EUKLIDischen, der hyperbolischen oder der elliptischen Ebene ist. Dazu betrachtet man die Summe von $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ [Joy1998]:*

- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow [p, q]$ ist eine EUKLIDische Parkettierung
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \Rightarrow [p, q]$ ist eine hyperbolische Parkettierung
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \Rightarrow [p, q]$ ist eine elliptische Parkettierung

Beweis. Bei einer Parkettierung $[n, k]$ stoßen k reguläre Polygone an jeden Knoten. Also ist der Winkel zwischen zwei Seiten eines Polygons an diesem Punkt genau: $\frac{2\pi}{k} = \frac{360^\circ}{k}$. Da ein reguläres n -gon genau n gleiche Winkel hat, wovon jeder $\frac{360^\circ}{k}$ groß ist, ist die Winkelsumme $n \cdot \frac{360^\circ}{k}$.

Wir wissen schon, die Winkelsumme eines EUKLIDischen Dreiecks ist genau $\pi = 180^\circ$, die eines hyperbolischen ist kleiner, die eines elliptischen ist größer.

Unterteilen wir das Polygon so in Dreiecke, dass sich kein Dreieck überlappt oder schneidet und die Punkte der Dreiecke nur aus den Punkten des Polygons bestehen, dann kann man die Winkelsumme des n -gons im EUKLIDischen Fall mit genau $(n-2) \cdot 180^\circ$ bestimmen – im hyperbolischen Fall ist es weniger, im elliptischen Fall mehr.

Falls also $n \cdot \frac{360^\circ}{k} = (n-2) \cdot 180^\circ$, dann ist $[n, k]$ EUKLIDisch, falls $n \cdot \frac{360^\circ}{k} < (n-2) \cdot 180^\circ$ hyperbolisch, ansonsten $n \cdot \frac{360^\circ}{k} > (n-2) \cdot 180^\circ$ elliptisch.

$$\begin{aligned}
 n \cdot \frac{360}{k} &\leq (n-2) \cdot 180 \\
 &> (n-2) \cdot 180 \\
 \frac{1}{k} &\leq \frac{(n-2) \cdot 180}{n \cdot 360} \\
 \frac{1}{k} &\leq \frac{n-2}{n \cdot 2} = \frac{n}{2 \cdot n} - \frac{2}{2 \cdot n} \\
 \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\
 \frac{1}{k} + \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{k} + \frac{1}{n} &> \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

□

Um die hyperbolische Ebene mit geeigneten (p, q) -Ecken zu pflastern, wählt man einen endlichen Teilbereich als Urzelle [Hau1995], auch Fundamental-Gebiet [Wäs2002] genannt, als Grundbaustein aus. Diese Urzelle kann ein ganzes (p, q) -Eck oder ein geeigneter Teilbereich eines (p, q) -Ecks sein.

Darauf werden dann die verschiedenen Bewegungen angewendet, so dass die Bilder der Urzelle die Ebene lückenlos, und ohne sich zu überschneiden, überdecken.

Die angewendeten Bewegungen bilden dabei eine Untergruppe der hyperbolischen Bewegungsgruppe, die Symmetriegruppe der Pflasterung.

Ausgehend von gewählten Werten für p und q ist die größtmögliche Symmetriegruppe die zur kleinstmöglichen Urzelle. Die kleinstmögliche Urzelle ist das rechtwinklige Dreieck, das durch den Mittelpunkt eines (p, q) -Ecks, einen Eckpunkt und einen benachbarten Seitenmittelpunkt gegeben ist. Diese Symmetriegruppe bezeichnet man mit $[p, q]$, sie wird von den drei Spiegelungen an den Dreiecksseiten erzeugt. [Hau1995]

Problem 5.1. *Ist es möglich die hyperbolische Ebene mit $(3, 6)$ -Ecks zu pflastern?*

Nein, eine Triangulierung der hyperbolischen Ebene, so dass an jedem Dreiecksknoten 6 hyperbolische Dreiecke benachbart sind, ist nicht möglich. $[3, 6]$ ist eine EUKLIDISCHE Parkettierung, denn

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Die Dreiecke sind EUKLIDISCHE Dreiecke, sie besitzen eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot \frac{2\pi}{6} = \pi$.

Problem 5.2. *Ist es möglich die hyperbolische Ebene mit $(3, 7)$ -Ecks zu pflastern?*

Ja, eine Triangulierung der hyperbolischen Ebene, so dass an jedem Dreiecksknoten 7 Dreiecke benachbart sind, ist möglich. $[3, 7]$ ist eine hyperbolische Parkettierung, denn

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} < 0.48 < \frac{1}{2}$$

Die Dreiecke haben jeweils eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{6}{7} \cdot \pi < \pi$, es sind also hyperbolische Dreiecke.

Satz 5.2. *Es ist möglich die hyperbolische Ebene regelmäßig zu triangulieren, so dass stets $n > 6$ hyperbolische reguläre, d.h. gleichwinklige, Dreiecke in einem Punkt benachbart sind.*

Beweis.

$$\frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

□

Bemerkung. Die feinste reguläre Triangulierung mit gleichwinkligen, gleichseitigen hyperbolischen Dreiecken ist die Parkettierung $[3, 7]$, denn ihre Dreiecke sind die hyperbolischen Dreiecke mit kleinstem Flächeninhalt, denn ihre Innenwinkelsumme ist die größte. *Satz von GAUSS-BONNET* (siehe Seite 28) $\Rightarrow A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi - 3 \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$

5.2. Reguläre Triangulierung der hyperbolischen Ebene im POINCARÉ-Modell

Erinnerung 5.1 (Komplexe Zahlen). Die Darstellung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ als $z = a + bi$ nennt man kartesisch Darstellung. Es gibt eine Bijektion zwischen dem \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} .

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und φ , so kann die komplexe Zahl $z = a + bi$ auch in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ dargestellt werden, da $a = r \cdot \cos(\varphi)$ und $b = r \cdot \sin(\varphi)$ ist.

Zu jeder komplexen Zahl $\mathbb{C} \ni z = \Re(z) + \Im(z)i$ gibt es eine *komplex konjugierte* Zahl $\mathbb{C} \ni z^* = \Re(z) - \Im(z)i$ ³ So ist dann die *Komplexkonjugierte* zu $z = r \cdot e^{i\varphi}$:

$$z^* = r \cdot (\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-i\varphi}$$

HELGE RITTER [Rit1999] zerlegt für seine *hyperbolische selbstorganisierende Karte* die hyperbolische Ebene im POINCARÉ-Modell in Dreiecke.

Um in der POINCARÉ-Scheibe zu „navigieren“, greift HELGE RITTER auf geeignete MÖBIUS-Transformationen zurück; diese sind konforme Abbildungen der RIEMANNschen Zahlenkugel auf sich selbst und damit auch konforme Automorphismen für $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

5.2.1. MÖBIUS-Transformationen

Definition 5.1. (MÖBIUS-Transformation): Funktionen $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißen MÖBIUS-Transformation, wenn sie durch diese Form gegeben sind:

$$\phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5.1)$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen sind, die $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ erfüllen. Ihre Umkehrung

$$\phi^{-1} : z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad (5.2)$$

ist mit $d \cdot a - (-c) \cdot (-b) = ad - bc \neq 0$ wiederum eine MÖBIUS-Transformation.

³In der Literatur ist es üblich die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl z mit \bar{z} zu notieren. Da der Oberstrich $\bar{}$ schon für die Strecken-Notation verwendet wird, bezeichnen wir hier die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl z mit z^* .

Jede MÖBIUS-Transformation kann durch eine geeignete Komposition der erzeugenden Funktionen *Verschiebung*, *Drehsteckung* und *Inversion* konstruiert werden.

$$V_b(z) := \begin{cases} z + b & \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}, \text{ ist die Verschiebung um } b$$

$D_a(z) := a \cdot z = |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot z$, ist eine Streckung um den Faktor $|a|$
kombiniert mit einer Drehung um den Winkel α .

$$I(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{für } z = 0 \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}, \text{ ist die Inversion – auch komplexe Inversion genannt}$$

Die Menge aller MÖBIUS-Transformationen bildet bezüglich ihrer Hintereinanderausführung die **Gruppe** der MÖBIUS-Transformationen.

Oder anders ausgedrückt: Die Automorphismen, also die biholomorphen⁴ Abbildungen der RIEMANNschen Zahlenkugel auf sich selbst, bilden die Gruppe der MÖBIUS-Transformationen.

MÖBIUS-Transformationen sind automorphe Funktionen. [KF1897], [KF1912]

Beschränken wir uns nun auf MÖBIUS-Transformationen der Form:

$$\phi : z \mapsto \frac{az + b}{b^*z + a^*}, \text{ mit } a \cdot a^* - b \cdot b^* = 1 \neq 0, \quad (5.3)$$

wobei a, a^* sowie $b, b^* \in \mathbb{C}$ zueinander komplexkonjugierte komplexe Zahlen sind. Diese MÖBIUS-Transformationen bilden die Einheitskreisscheibe bijektiv auf sich selbst ab. Eine alternative Notation für solche MÖBIUS-Transformationen ist gegeben durch – vergleiche auch [Bec2003]:

$$\phi : z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - \zeta}{1 - \zeta^*z}, \text{ mit } \zeta \in \mathbb{C} \wedge |\zeta| < 1; \varphi \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

Betrachten wir uns die Menge PSU der komplexwertigen 2×2 Matrizen $A \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

$$PSU(1,1) = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} : a, b, a^*, b^* \in \mathbb{C} \wedge aa^* - bb^* = 1 \right\} / \{\pm 1\} \quad (5.5)$$

A und $-A$ werden als kongruent identifiziert.

Die Menge $PSU(1,1)$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die *spezielle projektive unitäre Gruppe*.

⁴In der Funktionentheorie ist eine biholomorphe Abbildung eine bijektive holomorphe Abbildung mit holomorpher Umkehrabbildung.

Holomorphie (von gr. holos, "ganz" und morphe, "Form") ist eine Eigenschaft von bestimmten komplexwertigen Funktionen, die in der Funktionentheorie behandelt werden. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ für offenes $U \subset \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls sie in jedem Punkt komplex differenzierbar ist.

Definition 5.2. ((Gruppen-)Wirkung): Eine (*Gruppen*)-*Wirkung* (oder auch Gruppenoperation) einer Gruppe G auf eine Menge M ist eine Abbildung $G \times M \ni (g, m) \mapsto g \cdot m \in M$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\mathbb{1} \cdot m = m$ (Einselement) und
- (ii) $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$ (Assoziativität)

Dabei kann die Wirkung, eingeschränkt auf ein festes $g \in G$, auch als Abbildung $M \ni m \mapsto g(m) \in M$ aufgefasst werden. (Vergl. [Wäs2002])

Sei nun \mathbb{D} die Einheitskreisscheibe, und $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \in PSU(1, 1)$, dann definiert g eine Abbildung $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$

$$z \mapsto \frac{az + b}{b^*z + a^*} =: g(z) = gz. \quad (5.6)$$

Hierbei handelt es sich um eine Gruppenwirkung, denn

- (i) $\mathbb{1}(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1} = z \quad \forall z \in \mathbb{D}$
- (ii) für alle $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} c & d \\ d^* & c^* \end{pmatrix} \in PSU(1, 1)$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= g\left(\frac{cz + d}{d^*z + c^*}\right) = \frac{a \cdot \frac{cz + d}{d^*z + c^*} + b}{b^* \cdot \frac{cz + d}{d^*z + c^*} + a^*} \\ &= \frac{acz + ad + bd^*z + bc^*}{b^*cz + b^*d + a^*b^*z + a^*c^*} \\ &= \begin{pmatrix} ac + bd^* & ad + bc^* \\ b^*c + a^*d^* & b^*d + a^*c^* \end{pmatrix} \cdot z = (gh)(z) \end{aligned}$$

Diese Gruppenwirkung ist offensichtlich eine MÖBIUS-Transformation.

Bemerkung (LORENTZ-Transformationen und MÖBIUS-Transformationen).

NEEDHAM schreibt in [Nee2001] über die Beziehung zwischen den MÖBIUS-Transformationen und den LORENTZ-Transformationen:

„[...] in [...] erklären wir, wie wir eine eindeutige Beziehung zwischen [...] Lichtstrahlen und den komplexen Zahlen aufstellen können. Somit induziert jede LORENTZ-Transformation der Raum-Zeit genau eine Abbildung der komplexen Ebene. Was für komplexe Abbildungen erhalten wir auf diese Weise? Als wundersame Antwort erhalten wir:

Die komplexen Abbildungen, die den LORENTZ-Transformationen entsprechen, sind die MÖBIUS-Transformationen! Umgekehrt erhalten wir aus jeder Möbiustransformation von \mathbb{C} genau eine LORENTZ-Transformation der Raum-Zeit.

Selbst unter Physikern ist dieses ‹Wunder› längst noch nicht ausreichend bekannt.“

Triangulierung mit MÖBIUS-Transformationen

Eine besonders nützliche Eigenschaft der MÖBIUS-Transformationen für eine hyperbolische Triangulierung in der POINCARÉ-Scheibe ist, dass sie *tripeltransitiv* sind, d.h. Dreiecke werden auf kongruente Dreiecke in $\overline{\mathbb{C}}$, also auch in D_P , abgebildet. Weiterhin sind sie transitiv auf einer Menge von Kreisen in $\overline{\mathbb{C}}$ sowie transitiv auf einer Menge von Scheiben in $\overline{\mathbb{C}}$. Sie sind winkelerhaltende Abbildungen. [And1999],[AF2003].

Um ausgehend von einem hyperbolischen Startdreieck (ABC) – dabei sind $A, B, C \in \mathbb{C}$ drei voneinander verschiedene komplexe Zahlen – mit MÖBIUS-Transformationen die Ebene zu parkettieren, benötigen wir genau drei verschiedene MÖBIUS-Transformationen. Diese MÖBIUS-Transformationen sind Transformationen mit jeweils zwei Fixpunkten, es sind die Spiegelung des Dreiecks an seinen drei Seiten.

1. Fixpunkte A, B : $m_1 : (A, B, C) \mapsto (A, B, X)$
2. Fixpunkte B, C : $m_2 : (A, B, C) \mapsto (Y, B, C)$
3. Fixpunkte A, C : $m_3 : (A, B, C) \mapsto (A, Z, C)$

Setzen wir die Matrizen, deren Gruppenwirkung die entsprechenden MÖBIUS-Transformationen sind, als:

$$m_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ mit } \det(m_1) = aa^* - bb^* = 1$$

$$m_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ d^* & c^* \end{pmatrix}, \text{ mit } \det(m_2) = cc^* - dd^* = 1$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} e & f \\ f^* & e^* \end{pmatrix}, \text{ mit } \det(m_3) = ee^* - ff^* = 1$$

Dann müssen die Unbekannten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ sowie ihre konjugiert Komplexen bestimmt werden, so dass für die jeweiligen Fixpunkte gilt

$$m_1(A) \mapsto \frac{aA + b}{b^*A + a^*} = A \qquad m_1(B) \mapsto \frac{aB + b}{b^*B + a^*} = B$$

$$m_2(B) \mapsto \frac{cB + d}{d^*B + c^*} = B \qquad m_2(C) \mapsto \frac{cC + d}{d^*C + c^*} = C$$

$$m_3(A) \mapsto \frac{eA + f}{f^*A + e^*} = A \qquad m_3(C) \mapsto \frac{eC + f}{f^*C + e^*} = C$$

Die Parameter der MÖBIUS-Transformationen hängen direkt vom gewählten Startdreieck ab und damit auch von der Anzahl der Nachbardreiecke. Mit anderen Worten eine

[3, 7]-Parkettierung hat eine andere Wertebelegung für a, b, c, d, e, f mit ihren konjugiert Komplexen als z.B. die Parkettierung [3, 8].

Möchte man nun einen *Dreiecks-Netz-Generator* für eine beliebige [3, n]-Parkettierung ($n > 6$) programmieren, so dass die Anzahl der benachbarten Dreiecke n durch den späteren Benutzer festgelegt werden soll, so müsste man stets zuerst die unbekanntenen MÖBIUS-Parameter bestimmen. Diesen Weg werden wir nicht beschreiten.

5.3. Reguläre Triangulierung der hyperbolischen Ebene im MINKOWSKI-Modell

Die hyperbolische Fläche H^2 soll nun so mit Dreiecken gepflastert oder parkettiert werden, dass gewisse Eigenschaften erfüllt werden. Die gesuchte Triangulierung muss ein Netz ergeben, das alle folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. In jedem inneren Knoten k des Netzes N inzidieren genau $n \geq 7$ Dreiecke.
2. Jedes Dreieck besitzt drei gleich große Innenwinkel α .
3. Jedes Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck, d.h. alle Dreiecksseiten sind gleich lang.

Definition 5.3. (Benachbarte Dreiecke): *Benachbarte Dreiecke* sind Dreiecke, die mindestens einen Dreieckspunkt gemeinsam haben.

5.3.1. Konstruktion eines ersten Dreiecks im MINKOWSKI-Modell

Es heißen die Punkte des Dreiecks A, B, C . Die Dreiecksseiten heißen a, b und c . Die Dreiecksinnenwinkel heißen α, β und γ .

Bestimmung der Seitenlänge eines gleichwinkligen hyperbolischen Dreiecks

Aus den Eigenschaften 1 und 2 für eine Triangulierung ergeben sich, dass der hyperbolische Winkel zwischen zwei hyperbolischen Dreiecksseiten an einem Netzknoten k genau

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad (5.7)$$

beträgt, wobei n die feste Anzahl der in einem Punkt benachbarten Dreiecke ist.

Denn n Dreiecke müssen sich um k so arrangieren, dass $360^\circ = 2 \cdot \pi$ gleichmäßig auf sie verteilt werden.

Die drei Winkel eines hyperbolischen Dreiecks bestimmen aber nach Satz 3.9 auch schon die Länge der jeweiligen Dreiecksseiten.

Aus dem Winkel-Kosinussatz (siehe Seite 28) folgt für gleich große Dreiecksinnenwinkel, d.h. $\alpha = \beta = \gamma$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cosh(a) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \stackrel{\alpha=\beta=\gamma}{\Rightarrow} \cos(\alpha) &= \cosh(a) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ &\Rightarrow \cos(\alpha) = \cosh(a) \cdot \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \\ &\Rightarrow \cosh(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \\ &\Rightarrow a = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

Die Länge l einer Dreiecksseite lässt sich damit in Abhängigkeit von n , der Anzahl der in einem Punkt benachbarten Dreiecke, bestimmen als:

$$l = l(n) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)}\right) \quad (5.8)$$

Festlegung des Punktes A

Es sei A der erste Punkt des zu konstruierenden Dreiecks. Dieser lässt sich gänzlich frei auf der Oberfläche der MINKOWSKI-Schale positionieren. Es liege A im Ursprung von H^2 .

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Bestimmung des Punktes B

Für den zweiten Punkt B muss, da er in H^2 liegen soll, nach Definition 4.6 gelten:

$$B \in H^2 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = -1 \quad (5.10)$$

Eine der beiden Koordinaten b_1 , b_2 von B lässt sich auf Null setzen, während die dritte Koordinate b_3 von B direkt durch die beiden ersten Koordinaten bestimmt wird.

$$\text{Setze } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \sqrt{b_1^2 + 1} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Ist l die Länge der Dreiecksseiten, dann muss für den zweiten Punkt B mit der MINKOWSKI-Metrik gelten:

$$l = d_H(A, B) = \operatorname{arcosh}(-\langle\langle A, B \rangle\rangle) = \operatorname{arcosh}(-a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3) \quad (5.12)$$

Setzen wir nun die Werte für A und B ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 l &= d_H(A, B) \\
 &= \operatorname{arcosh} \left(0 - 0 + 1 \cdot \sqrt{1 + b_1^2} \right) \\
 &= \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{1 + b_1^2} \right)
 \end{aligned}$$

Und weiterhin

$$\cosh(l) = \sqrt{1 + b_1^2}$$

Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{1 + b_1^2} \right)^2 &= \cosh^2(l) \\
 b_1^2 &= \cosh^2(l) - 1 \\
 b_1 &= \pm \sqrt{\cosh^2(l) - 1}
 \end{aligned}$$

Wählen wir den positiven Fall

$$\begin{aligned}
 b_1 &= +\sqrt{\cosh^2(l) - 1} \\
 &= +\sqrt{\sinh^2(l)}, \text{ denn es gilt: } \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \forall x \\
 &= +\sinh(l)
 \end{aligned}$$

Der Wert für b_3 ergibt sich dann ganz einfach als

$$b_3 = \sqrt{1 + b_1^2} = \sqrt{1 + \cosh^2(l) - 1} = \cosh(l)$$

Alle drei Komponenten der Koordinate des Punktes B sind erfolgreich bestimmt worden.

$$B := \begin{pmatrix} \sinh(l) \\ 0 \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Alternative Bestimmung des Punktes B mit LORENTZ-Transformationen Deutlich einfacher hätte man den Punkt B aus dem Punkt A mit Hilfe des Boosts in x -Richtung erhalten können:

$$B = B_x(l) \cdot A = \begin{pmatrix} \cosh(l) & 0 & \sinh(l) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(l) & 0 & \cosh(l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(l) \\ 0 \\ \cosh(l) \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Punktes C

Die ersten zwei Punkte des Startdreiecks sind erfolgreich bestimmt worden. Wenden wir uns nun der Bestimmung des letzten Punktes C dieses Dreiecks zu. Für den letzten Punkt C des Dreiecks müssen vier Eigenschaften erfüllt sein, damit das Dreieck (ABC) ein hyperbolisches gleichwinkliges gleichseitiges Dreieck im MINKOWSKI-Modell H^2 der hyperbolischen Fläche wird.

Die Eigenschaften, die der Punkt C erfüllen muss, sind:

1. Der Punkt C muss in H^2 liegen: $C \in H^2 \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = -1$
2. Für den Abstand zum Punkt A muss gelten: $d_H(A, C) = l$
3. Für den Abstand zum Punkt B muss gelten: $d_H(B, C) = l$

Aus der Eigenschaft 2. ergibt sich der Wert von c_3 :

$$\begin{aligned} d_H(A, C) &= l \\ \Leftrightarrow \operatorname{arcosh}(-a_1c_1 - a_2c_2 + a_3c_3) &= l \\ \Leftrightarrow -a_1c_1 - a_2c_2 + a_3c_3 &= \cosh(l) \\ \Rightarrow -0 \cdot c_1 - 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 &= \cosh(l) \\ \Rightarrow c_3 &= \cosh(l) \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft 3. ergibt sich mit dem Wert von c_3 die Koordinate c_1 :

$$\begin{aligned} d_H(B, C) &= l \\ \Leftrightarrow \operatorname{arcosh}(-b_1c_1 - b_2c_2 + b_3c_3) &= l \\ \Leftrightarrow -a_1c_1 - a_2c_2 + a_3c_3 &= \cosh(l) \\ \Rightarrow -\sqrt{\cosh^2(l) - 1} \cdot c_1 - 0 \cdot c_2 + \cosh(l) \cdot \cosh(l) &= \cosh(l) \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\cosh(l) - \cosh(l) \cdot \cosh(l)}{-\sqrt{\cosh^2(l) - 1}} = \frac{\cosh(l) \cdot \cosh(l) - \cosh(l)}{\sqrt{\cosh^2(l) - 1}} \\ &= \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sqrt{\cosh^2(l) - 1}} = \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sqrt{\sinh^2(l)}} \\ &= \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh(l)} \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft 1. mit den schon bestimmten Werten c_1 und c_3 erhalten wir c_2 :

$$\begin{aligned}
 c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 &= -1 \\
 c_2^2 &= c_3^2 - c_1^2 - 1 \\
 &= \cosh^2(l) - \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sqrt{\cosh^2(l) - 1}} \right)^2 - 1 = \sinh^2(l) - \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh(l)} \right)^2 \\
 &= \cosh^2(l) - \frac{\cosh^4(l) - 2\cosh^3(l) + \cosh^2(l)}{\cosh^2(l) - 1} - 1 \\
 &= \frac{(\cosh^4(l) - \cosh^2(l)) - (\cosh^4(l) - 2\cosh^3(l) + \cosh^2(l)) - (\cosh^2(l) - 1)}{\cosh^2(l) - 1} \\
 &= \frac{2\cosh^3(l) - 2\cosh^2(l) - \cosh^2(l) + 1}{\sinh^2(l)} = \frac{2\cosh^3(l) - 3\cosh^2(l) + 1}{\sinh^2(l)}
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$c_2 = \pm \sqrt{\frac{2\cosh^3(l) - 3\cosh^2(l) + 1}{\sinh^2(l)}}$$

Der positive Fall wird gewählt:

$$c_2 = + \sqrt{\frac{2\cosh^3(l) - 3\cosh^2(l) + 1}{\sinh^2(l)}} = \frac{\sqrt{2\cosh^3(l) - 3\cosh^2(l) + 1}}{\sinh(l)}$$

Die Koordinaten des dritten Punktes C sind vollständig bestimmt:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh(l)} \\ \frac{\sqrt{2\cosh^3(l) - 3\cosh^2(l) + 1}}{\sinh(l)} \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Alternative Bestimmung des Punktes C mit LORENTZ-Transformationen

Problem 5.3. *Der Punkt B wurde aus dem Punkt A mit einem Boost in x -Richtung konstruiert (siehe Seite 73). Ist es möglich, den Punkt C aus B durch eine geeignete Rotation um die z -Achse zu erhalten?*

Um dieses Problem zu lösen, betrachten wir uns erst die Transformations-Matrix $M(\varphi, k)$ für einen Boost mit k in x -Richtung und anschließender Rotation mit φ um die z -Achse,

da wir wissen, dass der Boost in x -Richtung sowie die Rotation um die z -Achse die Erzeugenden sämtlicher geometrischen Operationen in H^2 sind (siehe Seite 39):

$$\begin{aligned} M(\varphi, k) &= R_z(\varphi) \cdot B_x(k) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cosh(k) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sin(\varphi) \cdot \cosh(k) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenden wir nun wie bei der Bestimmung des Punktes B den Boost um l auf den Punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, dann bleibt als einzige Unbekannte der Rotationswinkel φ der LORENTZ-Drehung.

$$\begin{aligned} C' &= M(\varphi, l) \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cosh(l) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sin(\varphi) \cdot \cosh(l) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sinh(l) & 0 & \cosh(l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sin(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es verbleibt nun, die Eigenschaften des Punktes C' zu überprüfen, um den Rotationswinkel φ zu bestimmen:

1. Der Punkt C' muss in H^2 liegen.
2. Für den Abstand zum Punkt A muss gelten: $d_H(A, C') = l$
3. Für den Abstand zum Punkt B muss gelten: $d_H(B, C') = l$

$$\begin{aligned} (1.) \quad C' &= \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sin(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \in H^2 \\ &\Leftrightarrow (\cos(\varphi) \cdot \sinh(l))^2 + (\sin(\varphi) \cdot \sinh(l))^2 - \cosh^2(l) \stackrel{!}{=} -1 \\ &= (\cos^2(\varphi) \cdot \sinh^2(l) + \sin^2(\varphi) \cdot \sinh^2(l) - \cosh^2(l)) \\ &= (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \cdot \sinh^2(l) - \cosh^2(l) \\ &= 1 \cdot \sinh^2(l) - \cosh^2(l) = -(\cosh^2(l) - \sinh^2(l)) = -(1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.) \quad d_H(A, C') &\stackrel{!}{=} l \\
d_H(A, C') &= \operatorname{arcosh}(-\langle\langle A, C' \rangle\rangle) = \operatorname{arcosh}(-(a_1 c'_1 + a_2 c'_2 - a_3 c'_3)) \\
&= \operatorname{arcosh}(-(0 + 0 - 1 \cdot \cosh(l))) = \operatorname{arcosh}(\cosh(l)) = l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.) \quad d_H(B, C') &\stackrel{!}{=} l \\
d_H(B, C') &= \operatorname{arcosh}(-\langle\langle B, C' \rangle\rangle) = \operatorname{arcosh}(-(b_1 c'_1 + b_2 c'_2 - b_3 c'_3)) \\
&= \operatorname{arcosh}(-(\sinh(l) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) + 0 - \cosh(l) \cdot \cosh(l))) \\
&= \operatorname{arcosh}(-\cos(\varphi) \cdot \sinh^2(l) + \cosh^2(l)) \\
&= \operatorname{arcosh}(-\cos(\varphi) \cdot \sinh^2(l) + 1 + \sinh^2(l)) \\
&= \operatorname{arcosh}(1 + \sinh^2(l) \cdot (1 - \cos(\varphi))) \stackrel{!}{=} l \\
&\Leftrightarrow 1 + \sinh^2(l) \cdot (1 - \cos(\varphi)) \stackrel{!}{=} \cosh(l) \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos(\varphi) = \frac{\cosh(l) - 1}{\sinh^2(l)} \\
&\Leftrightarrow -\cos(\varphi) = \frac{\cosh(l) - 1}{\sinh^2(l)} - 1 \\
&\Leftrightarrow \cos(\varphi) = 1 - \frac{\cosh(l) - 1}{\sinh^2(l)} = \frac{\sinh^2(l) - \cosh(l) + 1}{\sinh^2(l)} \\
&= \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)}
\end{aligned}$$

Der Rotationswinkel der LORENTZ-Drehung ist also $\varphi = \arccos\left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)}\right)$

Wir können nun den bestimmten Winkel φ in C' einsetzen, besser ist es aber, direkt $\cos(\varphi)$ zu benutzen:

$$\begin{aligned}
C' &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sin(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sinh(l) \\ \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)} \cdot \sinh(l) \\ \sqrt{1 - \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)}\right)^2} \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vergleich der Punkte C' und C

Wegen des komplizierteren Aufbaus schauen wir uns die zweite Komponente c'_2 des Punktes C gesondert an:

$$\begin{aligned}
c'_2 &= \sin(\varphi) \cdot \sinh(l) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} \cdot \sinh(l) \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)} \right)^2} \cdot \sinh(l) \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\cosh^2(l) - 1} \right)^2} \cdot \sinh(l) \\
&= \sqrt{\frac{(\cosh^2(l) - 1)^2 - (\cosh^2(l) - \cosh(l))^2}{(\cosh^2(l) - 1)^2}} \cdot \sinh(l) \\
&= \sqrt{\frac{(\cosh^4(l) - 2 \cosh^2(l) + 1) - (\cosh^4(l) - 2 \cosh^3(l) + \cosh^2(l))}{\sinh^4(l)}} \cdot \sinh(l) \\
&= \sqrt{\frac{2 \cosh^3(l) - 3 \cosh^2(l) + 1}{\sinh^4(l)}} \cdot \sinh(l)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
C' &= \begin{pmatrix} \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)} \cdot \sinh(l) \\ \sqrt{\frac{2 \cosh^3(l) - 3 \cosh^2(l) + 1}{\sinh^4(l)}} \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh(l)} \\ \sqrt{2 \cosh^3(l) - 3 \cosh^2(l) + 1} \\ \cosh(l) \end{pmatrix} \\
&= C
\end{aligned}$$

C und C' sind identisch; es ist also möglich, aus dem Punkt B , der mit Boost um l in x -Richtung aus dem Punkt A entstand, durch Rotation mit $\varphi = \arccos\left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)}\right)$ um die z -Achse den dritten Dreieckspunkt C zu erhalten.

Vergleich der Dreiecksinnenwinkel mit dem Rotationswinkel

Satz 5.3. *Liegt der Punkt A eines gleichwinkligen, gleichseitigen hyperbolischen Dreiecks im Ursprung des MINKOWSKI-Modells, d.h. $A = (0, 0, 1)^T$, dann ist der Rotationswinkel φ*

der LORENTZ-Drehung, die den Punkt B dieses Dreiecks auf den Punkt C transformiert, genauso groß wie die Dreiecksinnenwinkel.

Sind die Dreiecksinnenwinkel $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{n}$, ($n \in \mathbb{N}$)

und die Seitenlängen $l = \operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)$, dann gilt:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)} \right) = \frac{2\pi}{n} = \alpha$$

Beweis. Setzen wir l schrittweise in φ ein:

$$\begin{aligned} \cosh(l) &= \cosh \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right) \right) \\ &= \frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha)} \\ &= \frac{(\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)) \cdot (1 - \cos^2(\alpha))}{(1 - \cos^2(\alpha))^2} \\ &= \frac{\cos^2(\alpha) - \cos^4(\alpha) + \cos(\alpha) - \cos^3(\alpha)}{(\sin^2(\alpha))^2} \\ &= \frac{-\cos^4(\alpha) - \cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(l) &= \left(\cosh \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right) \right) \right)^2 \\ &= \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)^2 = \frac{(\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha))^2}{\sin^4(\alpha)} \\ &= \frac{\cos^4(\alpha) + 2\cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(l) - \cosh(l) &= \frac{\cos^4(\alpha) + 2\cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \\ &\quad - \frac{-\cos^4(\alpha) - \cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \\ &= \frac{2\cos^4(\alpha) + 3\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \\ &= \cos(\alpha) \cdot \frac{2\cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) - 1}{\sin^4(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh^2(l) &= \cosh^2(l) - 1 \\
&= \left(\cosh \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right) \right) \right)^2 - 1 \\
&= \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)^2 - \left(\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)^2 \\
&= \frac{\cos^4(\alpha) + 2\cos^3(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} - \frac{1 - 2\cos^2(\alpha) + \cos^4(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \\
&= \frac{2\cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) - 1}{\sin^4(\alpha)}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos \left(\frac{\cosh^2(l) - \cosh(l)}{\sinh^2(l)} \right) \\
&= \arccos \left(\frac{\cos(\alpha) \cdot \frac{2\cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) - 1}{\sin^4(\alpha)}}{\frac{2\cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) - 1}{\sin^4(\alpha)}} \right) \\
&= \arccos(\cos(\alpha)) \\
&= \alpha = \frac{2\pi}{n}
\end{aligned}$$

□

Folgerung: Das Startdreieck der regulären hyperbolischen Triangulierung ($[3, n]$ -Parkettierung mit $n \geq 7$), deren Dreiecke stets gleichseitig mit der

Länge $l = \operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)$ sind und jeder Dreiecksinnenwinkel genau $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

beträgt, kann nun ganz einfach beschrieben werden, wenn man die Punkte mit den LORENTZ-Transformationen Boost und Rotation generiert – wobei die Transformationsmatrix $M(\varphi, k) = R_z(\varphi) \cdot B_x(k)$ ist (siehe Seite 76):

$$\begin{aligned}
A &= M(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) \sinh(0) \\ \sin(0) \sinh(0) \\ \cosh(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \\ 0 \cdot \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \\ \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
B &= M(0, l) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(l) \\ 0 \\ \cosh(l) \end{pmatrix}, \quad C = M(\alpha, l) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \sinh(l) \\ \sin(\alpha) \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Algorithmus 1 (Erstelle_Startdreieck). *input:* (int n)

BEGIN

// n ist die Anzahl der hyperbolischen Dreiecke,

// die sich in einem Knoten treffen sollen

Bestimme Rotationswinkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

Bestimme hyperbolische Seitenlänge $l = \operatorname{arcosh} \left(\frac{\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right)$

Erstelle ersten Dreieckspunkt bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erstelle zweiten Dreieckspunkt durch Boost um Länge l in x -Richtung bei $\begin{pmatrix} \sinh(l) \\ 0 \\ \cosh(l) \end{pmatrix}$

Erstelle dritten Dreieckspunkt durch Boost um Länge l in x -Richtung

und anschließender Rotation um Winkel α bei $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sinh(l) \\ \sin(\alpha) \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix}$

END

Diesen Algorithmus zur Konstruktion des Startdreiecks werden wir in dem Algorithmus zur Konstruktion eines Dreiecksrings (siehe Seite 82), einer Vorstufe des Netzgenerators, verwenden.

Zwar werden wir den gerade diskutierten Algorithmus nicht separat im Algorithmus des Netzgenerators gebrauchen können, aber werden dafür umso mehr die Idee der LORENTZ-Rotation und des LORENTZ-Boosts eines Punktes intensiv im Algorithmus des Netzgenerators ausnutzen.

5.3.2. Der Netz-Generator

In der Anwendung soll der Generator dazu benutzt werden, ein reguläres Netz aus gleichwinkligen gleichseitigen hyperbolischen Dreiecken zu erstellen. Die Dreieckspunkte dieses Netzes sollen als „geometrische Befestigung“ – als Layout – der „Neuronen“ der hyperbolischen selbstorganisierenden Karte, **HSOM**, dienen.

Die **HSOM** soll ein zentrales „Neuron“ besitzen. Dieses zentrale Neuron sei das Startneuron des Generators und heiße N_{-1} . Die geometrische Position im MINKOWSKI-Modell H^2 dieses besonderen Neurons N_{-1} wird festgelegt auf den Ursprung U von H^2 .

Das Neuron N_{-1} liegt damit auf den Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das Neuron N_{-1} besitzt n ($n \geq 7$, $n \in \mathbb{N}$) Neuronen – $N_0 \dots N_{n-1}$ – als Nachbarn, d.h. es ist mit ihnen durch eine Kante (einem Teil einer hyperbolischen Gerade) verbunden. Dabei sind diese n Nachbarn so miteinander verbunden, dass das Neuron N_i direkt verbunden ist sowohl mit dem Neuron $N_{(i+1) \bmod n}$ als auch mit dem Neuron $N_{(i-1) \bmod n}$, dabei ist $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < n$.

Die n Dreiecke der ersten Generation

Betrachtet man sich die Verbindungen zwischen den Neuronen N_{-1}, \dots, N_{n-1} , so bilden diese genau n (hyperbolische) Dreiecke, die alle im Ursprung von H^2 zusammenstoßen.

Alle Dreieckspunkte, die vom Ursprung verschieden sind, das sind die Punkte mit den Indizes $0 \leq i < n$, liegen auf einem Isokreis, d.h. alle diese Punkte besitzen die gleiche „Höhe“ $\cosh(l)$, entlang der oberen Schale eines zweischaligen Hyperboloiden.

Die Koordinaten der n Punkte der Dreiecke aus der ersten Generation erhält man ganz einfach aus dem Startdreieck (siehe Seite 80) durch $n - 1$ -fache Rotation des Startdreiecks um die z -Achse mit den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, wobei der Fixpunkt dieser Rotationen die Koordinaten

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt. Eine $n - te$ Rotation würde wieder das Startdreieck selber liefern.

Algorithmus 2 (Erstelle_ersten_Dreiecksring). **input:** (int n , double α , double l);

BEGIN

call Erstelle_Startdreieck(n);

//Der zweite und dritte Punkt des Startdreiecks

//liegen auf einem Kreis um die z-Achse.

//Auf diesem Kreis werden nun weitere Punkte generiert:

for (int $k = 2$; $k < n-1$; $k++$)

Neuer Punkt bei $\begin{pmatrix} \cos(k \cdot \alpha) \cdot \sinh(l) \\ \sin(k \cdot \alpha) \cdot \sinh(l) \\ \cosh(l) \end{pmatrix}$;

Verbinde benachbarte Punkte entlang dieses Kreises.

Verbinde alle Punkte dieses Kreises mit dem ersten Punkt des Startdreiecks.

END

Wachstumsgesetz des hyperbolischen Netzes

Bevor wir uns weiter mit dem Netzgenerator direkt beschäftigen können, müssen wir uns erst einmal klar werden, wie viele Netzknoten (Dreieckspunkte) überhaupt in einer Generation existieren können.

Dazu betrachten wir uns erst einmal folgende Prinzip-Skizzen. Wir ordnen dazu die Knoten verschiedener **Generationen** auf konzentrischen Kreise an. Alle Knoten einer Generation liegen auf einem Kreis. Bei diesen Skizzen ist es nicht wichtig, dass sie die genauen Koordinaten der Punkte einer Aufsicht auf das MINKOWSKI-Modell oder in der POINCARÉ-Scheibe darstellen – genau diese Positionierung der Knoten wird verletzt. In diesen Skizzen wird vornehmlich auf die Korrektheit der Nachbarschaftsbeziehung wert gelegt und damit auch auf die Anzahl der Knoten im Netz.

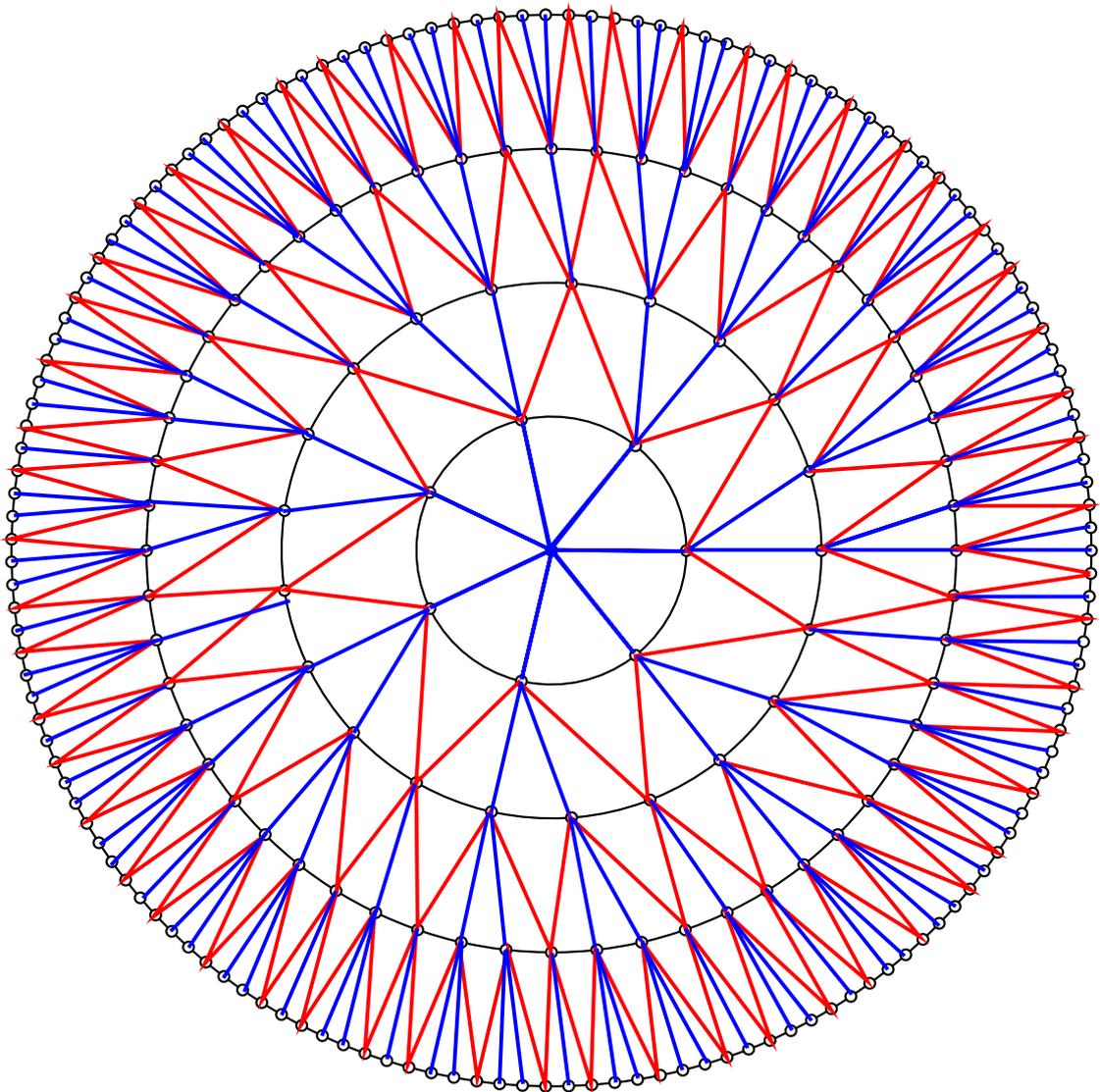


Abbildung 5.1.: Prinzip-Skizze: Netzwachstum $[3,7]$ -Parkettierung

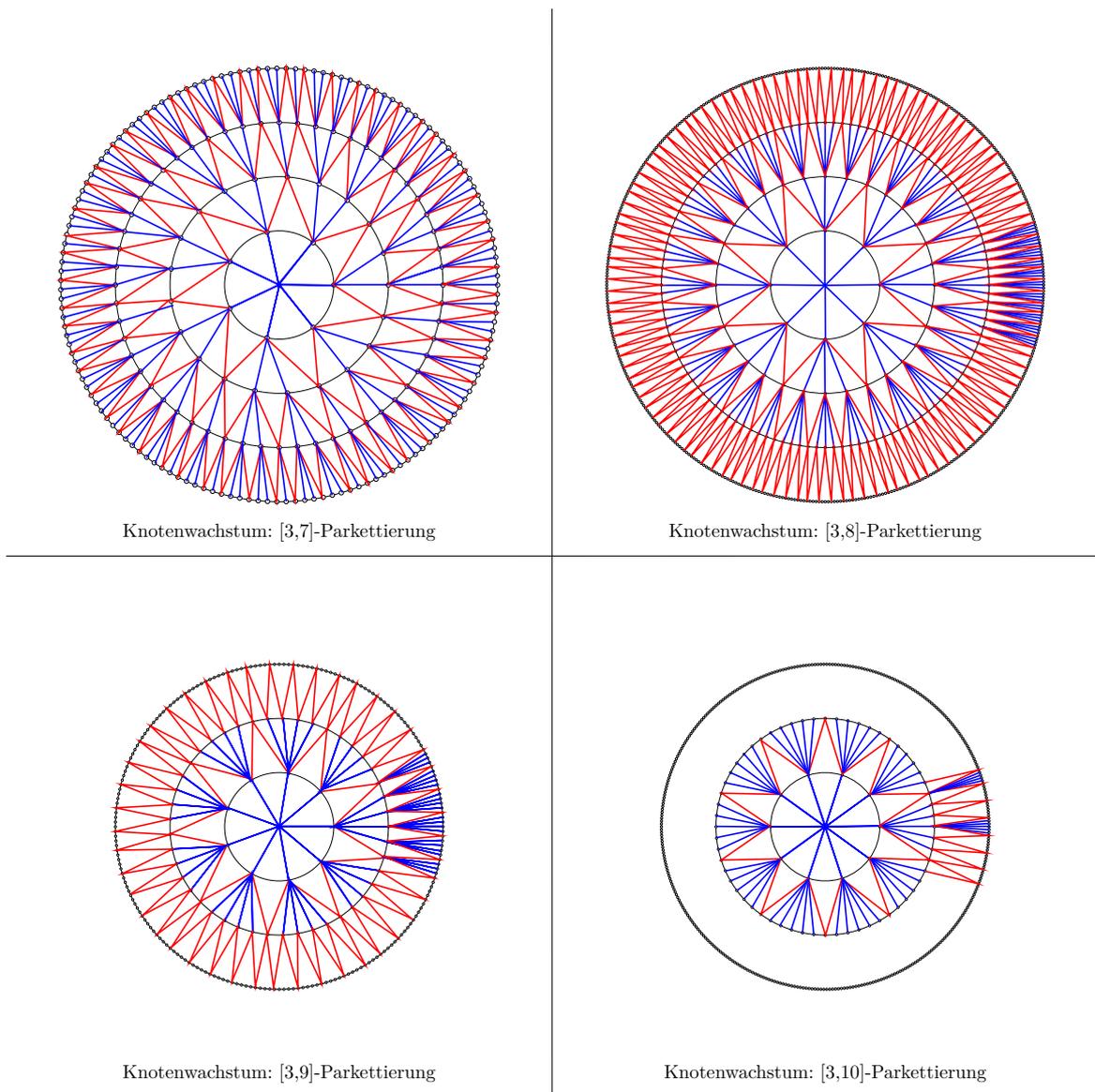


Abbildung 5.2.: Prinzip-Skizzen zum Knotenwachstum hyperbolischer Dreiecksnetze

Wir erkennen bei diesen Skizzen blaue und rote Kanten und Knoten. Der Knoten **nullter Generation** ist blau und besitzt $n \geq 7$ ebenfalls blaue Nachfolger. Jeder Knoten **erster Generation** besitzt $n - 5$ blaue Nachfolger. Je zwei Knoten **erster Generation** besitzen einen gemeinsamen roten Nachfolger. Jeder blaue Knoten der **zweiten Generation** besitzt $n - 5$ blaue Nachfolger. Jeder rote Knoten der **zweiten Generation** besitzt $n - 6$ blaue Nachfolger. Je zwei Knoten **zweiter Generation** besitzen einen gemeinsamen roten Nachfolger.

Für die **g-te Generation** gilt:

1. Jeder blaue Knoten besitzt $n - 5$ blaue Nachfolger.
2. Jeder rote Knoten besitzt $n - 6$ blaue Nachfolger.

3. Je zwei benachbarte Knoten besitzen einen gemeinsamen roten Nachfolger.

Rekursives System

Dieses Wachstumsgesetz des Netzes einer hyperbolischen $[3, n]$ -Parkettierung lässt sich als **System von verschränkten Rekursionsgleichungen** formulieren.

Ist $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 7$ die Anzahl der in einem inneren Knoten benachbarten hyperbolischen Dreiecke, und $g \in \mathbb{N}_0$ die Generation des Netzes, so beschreibt $v(g, n)$ die Anzahl der Knoten (Vertices) der g -ten Generation. $b(g, n)$ beschreibt die Anzahl von blauen Knoten der g -ten Generation und $r(g, n)$ die Anzahl der roten Knoten.

$$\begin{aligned} b(0, n) &= 1 \\ b(1, n) &= n \\ b(g, n) &= (n - 5) \cdot b(g - 1, n) + (n - 6) \cdot r(g - 1, n) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} r(0, n) &= 0 \\ r(1, n) &= 0 \\ r(g, n) &= b(g - 1, n) + r(g - 1, n) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$v(g, n) = b(g, n) + r(g, n) \quad (5.17)$$

Um eine explizite geschlossene Formel für die Anzahl der Knoten in einer Generation aus dem System erhalten zu können, müssen wir zunächst die Verschränkung auflösen.

Homogene lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung

Setzen wir 5.15 und 5.16 in 5.17 ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v(g, n) &= (b(g, n)) + (r(g, n)) \\ &= ((n - 5) \cdot b(g - 1, n) + (n - 6) \cdot r(g - 1, n)) + (b(g - 1, n) + r(g - 1, n)) \\ &= (n - 5) \cdot b(g - 1, n) + b(g - 1, n) + (n - 6) \cdot r(g - 1, n) + r(g - 1, n) \\ &= (n - 4) \cdot b(g - 1, n) + (n - 5) \cdot r(g - 1, n) \\ &= (n - 4) \cdot (b(g - 1, n) + r(g - 1, n)) - r(g - 1, n) \end{aligned}$$

Es ist:

$$v(g - 1, n) = b(g - 1, n) + r(g - 1, n)$$

Zudem ist:

$$r(g - 1, n) = b(g - 2, n) + r(g - 2, n) = v(g - 2, n)$$

Damit ergibt sich:

$$v(g, n) = (n - 4) \cdot v(g - 1, n) - v(g - 2, n) \quad (5.18)$$

Die Äquivalenz zu dem verschränkten Rekursionssystem erfordert die offensichtlichen Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} v(0, n) &= 1 \\ v(1, n) &= n \end{aligned}$$

Satz 5.4. *Es ist eine dritte Anfangsbedingung notwendig, damit die Rekursionsgleichung zweiter Ordnung 5.18 äquivalent zum System 5.17 ist.*

Die dritte Anfangsbedingung an die Rekursionsgleichung zweiter Ordnung ist:

$$v(2, n) = (n - 4) \cdot n$$

Beweis. Ohne eine dritte Anfangsbedingung erhält man mit 5.18 für $v(2, n) = (n - 4) \cdot n - 1$

$$v(2, n) = (n - 4) \cdot v(1, n) - v(0, n) = (n - 4) \cdot n - 1$$

Mit 5.17 erhält man allerdings für $v(2, n) = (n - 4) \cdot n$

$$\begin{aligned} v(2, n) &= (b(2, n)) + (r(2, n)) \\ &= ((n - 5) \cdot b(1, n) + (n - 6) \cdot r(1, n)) + (b(1, n) + r(1, n)) \\ &= ((n - 5) \cdot n + (n - 6) \cdot 0) + (n + 0) \\ &= ((n - 5) \cdot n) + (n) \\ &= ((n - 5) + 1) \cdot n \\ &= (n - 5 + 1) \cdot n \\ &= (n - 4) \cdot n \end{aligned}$$

□

Geschlossene Formel

Wie in [Har2007] beschrieben wird nun aus der Rekursionsgleichung die geschlossene Formel ermittelt.

Zunächst wird 5.18 in Standardform gebracht.

$$v(g, n) - (n - 4) \cdot v(g - 1, n) + v(g - 2, n) = 0 \quad (5.19)$$

Das charakteristische Polynom ist:

$$\chi(x) = x^2 - (n - 4) \cdot x + 1 = 0 \quad (5.20)$$

Die zwei Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind:

$$x_{0,1} = \frac{n-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-4}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot ((n-4) + \sqrt{n^2 - 8n + 12}) = \frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \quad (5.21)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot ((n-4) - \sqrt{n^2 - 8n + 12}) = \frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \quad (5.22)$$

Die *allgemeine Lösung* der Rekursionsgleichung 5.18 ist

$$v(g, n) = c_0 \cdot x_0^g + c_1 \cdot x_1^g$$

$$v(g, n) = c_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right)^g + c_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right)^g \quad (5.23)$$

Um die *spezielle Lösung* der Rekursionsgleichung zu erhalten, müssen wir die noch unbestimmten Koeffizienten c_0 und c_1 herausfinden; dazu betrachten wir die Anfangsbedingungen:

$$v(0, n) = c_0 \cdot x_0^0 + c_1 \cdot x_1^0 = 1$$

$$v(1, n) = c_0 \cdot x_0^1 + c_1 \cdot x_1^1 = n$$

$$v(2, n) = c_0 \cdot x_0^2 + c_1 \cdot x_1^2 = n \cdot (n-4)$$

Wir lösen das *lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x_0^1 & x_1^1 \\ x_0^2 & x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \cdot (n-4) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_0^2 & x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \cdot (n-4) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1 \cdot x_0 \\ x_0^2 & x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot x_0 \\ n \cdot (n-4) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \cdot (n-4) - n \cdot x_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 \cdot (x_1 - x_0) & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot (x_1 - x_0) \\ n \cdot ((n-4) - x_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 \cdot (x_1 - x_0) & 0 \\ 0 & x_1 \cdot (x_1 - x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot (x_1 - x_0) - (n \cdot ((n-4) - x_0)) \\ n \cdot ((n-4) - x_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 \cdot (x_1 - x_0) & 0 \\ 0 & x_1 \cdot (x_1 - x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot (x_1 - x_0 - (n-4) + x_0) \\ n \cdot ((n-4) - x_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x_0 \cdot (x_1 - x_0) & 0 \\ 0 & x_1 \cdot (x_1 - x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot (x_1 - (n-4)) \\ n \cdot ((n-4) - x_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n \cdot (x_1 - (n-4))}{x_0 \cdot (x_1 - x_0)} \\ \frac{n \cdot ((n-4) - x_0)}{x_1 \cdot (x_1 - x_0)} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{n \cdot x_1 \cdot (x_1 - (n-4))}{x_1 \cdot x_0 \cdot (x_1 - x_0)} \\ \frac{n \cdot x_0 \cdot ((n-4) - x_0)}{x_0 \cdot x_1 \cdot (x_1 - x_0)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit sind die Koeffizienten c_0 und c_1 eindeutig festgelegt durch:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{n}{x_0 \cdot x_1 \cdot (x_1 - x_0)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \cdot (x_1 - (n-4)) \\ x_0 \cdot ((n-4) - x_0) \end{pmatrix}$$

Betrachten wir uns die Komponenten dieses Vektors etwas genauer:

$$\begin{aligned}
x_1 - (n - 4) &= \frac{1}{2} \cdot \left((n - 4) - \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) - (n - 4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n - 4) - (n - 4) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \\
&= -\frac{1}{2}(n - 4) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \\
&= -\frac{1}{2} \left((n - 4) + \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) \\
&= -x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n - 4) - x_0 &= (n - 4) - \frac{1}{2} \cdot \left((n - 4) + \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n - 4) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \\
&= x_1
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} &= \frac{n}{x_0 \cdot x_1 \cdot (x_1 - x_0)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \cdot (x_1 - (n - 4)) \\ x_0 \cdot ((n - 4) - x_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{n}{x_0 \cdot x_1 \cdot (x_1 - x_0)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \cdot (-x_0) \\ x_0 \cdot x_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{n}{x_1 - x_0} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= \frac{1}{2} \cdot \left((n - 4) - \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left((n - 4) + \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\left((n - 4) - \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) - \left((n - 4) + \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)} \right) = -\sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)}
\end{aligned}$$

So erkennen wir

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{n}{-\sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{n}{\sqrt{(n - 6) \cdot (n - 2)}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die *spezielle Lösung* der Rekursionsgleichung ist damit bestimmt worden als:

$$\begin{aligned}
v(g, n) &= \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_0^g \\ x_1^g \end{pmatrix} = \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_0^g \\ x_1^g \end{pmatrix} \\
v(g, n) &= \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^g \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^g \right) \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Da wir zur Bestimmung der speziellen Lösung der Rekursionsgleichung nur zwei von drei Anfangsbedingungen berücksichtigt haben, müssen wir die gefundene Lösung noch korrigieren, so dass alle drei Bedingungen erfüllt werden. Die Bedingung $v(0, n) = 1$ wird nicht erfüllt, denn offensichtlich liefert 5.24 für $g = 0$ den Wert 0 und nicht den Wert 1. Wir brauchen also einen additiven Korrekturterm, der für $g = 0$ den Wert 1 besitzt und sonst 0 ist. In 0^g finden wir solchen Term.

Die zum verschränkten Rekursionssystem äquivalente *geschlossene Formel* lautet daher:

$$\begin{aligned}
v(g, n) &= 0^g + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^g \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^g \right) \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Satz 5.5. Die geschlossene Formel 5.25 genügt den drei Anfangsbedingungen der homogenen linearen Rekursionsgleichung zweiter Ordnung 5.18.

Beweis.

$$\begin{aligned}
v(0, n) &= 0^0 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^0 \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^0 \right) \\
&= 1 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot (1 - 1) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(1, n) &= 0^1 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^1 \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^1 \right) \\
&= 0 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (n-4) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot (n-4) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \\
&= \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} = n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(2, n) &= 0^2 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \cdot \left((n-4) - \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right) \right]^2 \right) \\
&= 0 + \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \frac{1}{4} \left[(n-4)^2 + 2 \cdot (n-4) \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right)^2 \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[(n-4)^2 - 2 \cdot (n-4) \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} \right)^2 \right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}} \cdot \frac{4}{4} \cdot (n-4) \cdot \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)} = n \cdot (n-4)
\end{aligned}$$

□

$v(g, n)$ $n \in \{7, \dots, 10\}$ $g \in \{0, \dots, 10\}$	$v(g, 7)$	$v(g, 8)$	$v(g, 9)$	$v(g, 10)$
$v(0, n)$	1	1	1	1
$v(1, n)$	7	8	9	10
$v(2, n)$	21	32	45	60
$v(3, n)$	56	120	216	350
$v(4, n)$	147	448	1035	2040
$v(5, n)$	385	1672	4959	11890
$v(6, n)$	1008	6240	23760	69300
$v(7, n)$	2639	23288	113841	403910
$v(8, n)$	6909	86912	545445	2354160
$v(9, n)$	18088	324360	2613384	13721050
$v(10, n)$	47355	1210528	12521475	79972140

Tabelle 5.1.: Knotenwachstum hyperbolischer Dreiecksnetze

Datenstruktur und Algorithmus für den Netzgenerator

Knoten (für die Topologie)
KID: Identifikationsnummer generation: Nummer der Generation typ: entweder roter oder blauer Knoten anz: Anzahl der Nachbarn ListKinder: Liste der KIDs der Nachfolger-Knoten ListEltern: Liste der KIDs der Vorgänger-Knoten ListGeschwister: Liste der KIDs der direkt benachbarten Knoten gleicher Generation (genau zwei Elemente)

Punkt (für die Geometrie)
PID: Identifikationsnummer origMink: Minkowski-Koordinaten beim ersten Layout origPoinc: Poincaré-Koordinaten beim ersten Layout tempMink: Minkowski-Koordinaten des aktuellen Netzzustandes tempPoinc: Poincaré-Koordinaten des aktuellen Netzzustandes

KID und PID
verknüpfen

Dreieck
DID: Identifikationsnummer Knoten1-KID: Nummer des ersten Knotens Knoten2-KID: Nummer des zweiten Knotens Knoten3-KID: Nummer des dritten Knotens

Es werden mindestens 3 „globale“ Listen benötigt:

- List<Knoten> KnotenListe: Diese Liste enthält die Knoten des Netzes.
- List<Punkt> PunktListe: Diese Liste enthält die zu den Knoten korrespondierenden Punkte für das geometrische Layout des Netzes.
- List<Dreieck> DreieckListe: Diese Liste enthält alle Dreiecke des Dreiecksnetzes.

Es gibt die Funktion $v(g, n)$ entweder rekursiv (siehe Seite 86) oder geschlossen (siehe Seite 90), die die Anzahl der Knoten in der g -ten Generation liefert.

Es gibt Funktionen zur Konvertierung zwischen Koordinaten des MINKOWSKI-Modells und der POINCARÉschen-Scheibe (siehe Seite 59).

Es gibt eine Funktion $length(n)$, die die Länge einer Dreiecksseite eines gleichwinkligen hyperbolische Dreiecks bestimmt (siehe Seite 72), wenn n Dreiecke in einem inneren Netzknoten zusammentreffen.

Das Prinzip des Netzgenerators einer $[3, n]$ -Parkettierung

1. Der Startknoten des Netzes wird auf der MINKOWSKI-Koordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verankert.

Er ist vom *Typ blau*.

2. Die n Netzknoten der ersten Generation verteilen sich äquidistant auf einem Kreis um die z -Achse und besitzen alle $\cosh(l)$ als z -Koordinate; dabei ist l die Länge der Dreiecksseiten. Die Knoten der ersten Generation sind vom *Typ blau*.
3. Die ersten n Dreiecke entstehen durch Verbinden des Startknotens mit den Knoten der ersten Generation.
4. Für den Aufbau jeder weiteren Knoten-Generation wird zunächst die Anzahl der notwendigen Knoten bestimmt; anschließend genügend generiert und in die Knotenliste eingetragen.
5. Durch geschickte Indizierung der Knoten ist der Aufbau der Netztopologie, d.h. der Knotennachbarschaft, durch Modulo-Operationen auf den Indizes der Knoten möglich.
6. Ausgehend von der Netztopologie, genauer dem Nachbarschaftsverhältnis zwischen der $(g - 1)$ -ten Knotengeneration zur g -ten Knotengeneration, kann die Typfestlegung der Knoten der g -ten Generation vorgenommen werden. Dabei ist zu beachten, dass je zwei benachbarte Knoten der $(g - 1)$ -ten Generation genau einen Knoten der g -ten Generation zum gemeinsamen Nachfolger. Dieser Nachfolger ist vom *Typ rot*. Alle anderen Knoten der g -ten Generation sind vom *Typ blau*.
7. Das geometrische Layout der g -ten Generation gelingt durch Ausnutzung der Topologie des Netzes und der unterschiedlichen Typen der Knoten: *Ein roter Nachfolger* hat den gleichen Abstand zu seinen beiden Vorgängern; allerdings besitzt er in jedem Fall einen größeren Wert in seiner z -Komponente. Zwischen zwei roten Nachfolgern befinden sich immer grüne Nachfolger. *Der erste grüne Nachfolger* eines Knotens der $(g - 1)$ -ten Generation hat den gleichen Abstand zu seinem Vorgänger wie zu seinem direkt benachbarten roten Knoten; dabei wird dieser erste grüne Nachfolger in Richtung des zweiten roten Nachfolgers seines Vorgängers ausgelegt. *Der zweite grüne Nachfolger* eines Knotens der $(g - 1)$ -ten Generation hat den gleichen Abstand zu seinem Vorgänger wie zu dem *ersten grünen Nachfolger* seines Vorgängers; dabei wird dieser zweite grüne Nachfolger in Richtung des zweiten roten Nachfolgers seines Vorgängers ausgelegt. Auf gleiche Weise werden die anderen grünen Nachfolger geometrisch ausgelegt.
8. Die Liste der Dreiecke wird entsprechend der Topologie aktualisiert.

Algorithmus 3 (Netzgenerator). *input:* (*int maxgeneration, int n*)

BEGIN Netzgenerator

//maxgeneration ist die Anzahl der zu generierenden

//Knoten-Generationen des Netzes

//n ist die Anzahl der hyperbolischen Dreiecke,

//die sich in jedem inneren Netzknoten treffen

WHILE (*maxgeneration < 0*) **OR** (*n < 7*) **DO**

FEHLERMELDUNG: Unzulässige Werte;
READ Usereingabe: Neuen Wert für n
READ Usereingabe: Neuen Wert für maxgeneration
END-WHILE
n und maxgeneration sind im zulässigen Wertebereich
CLEAR: KnotenListe, PunktListe, DreieckListe
Bestimme Länge der Dreieckseiten: len = length(n)
Bestimme Wert des Dreieckinnenwinkels alpha
FOR g = 0 TO maxgeneration STEP 1 DO
 IF (g==0) THEN
 Erstelle Ursprungsknoten und zugehörigen geometrischen Punkt.
 Ursprungsknoten hat den Typ Blau.
 Zugehöriger geometrischer Punkt hat die MINKOWSKI-Koordinaten
 (0, 0, 1).
 Aktualisiere: KnotenListe und PunktListe
 END-IF
 IF (g==1) THEN
 Erstelle n Nachfolger des Ursprungsknotens, verknüpfe sie mit diesem
 Verknüpfe Geschwister-Knoten miteinander.
 Zugehörige Punkte werden durch n-fache Rotation um die z-Achse des
 Punktes ($\cos(\alpha) \cdot \sinh(\text{len})$, $\sin(\alpha) \cdot \sinh(\text{len})$, $\cosh(\text{len})$)
 generiert.
 Aktualisiere: PunktListe und KnotenListe
 Aktualisiere DreieckListe: Je zwei benachbarte Punkte der ersten
 Generation ergeben mit dem Ursprungsknoten ein Dreieck.
 END-IF
 IF (g>=2) THEN
 Berechne die Anzahl der zu generierenden neuen Knoten: v(n,g)
 Verknüpfe Geschwister-Knoten der aktuellen Generation.
 Verknüpfe Knoten der Generation (g-1) mit der aktuellen
 Generation (g).
 Jeder blaue Knoten der Generation (g-1) hat (n-5) blaue nacheinander
 generierte Knoten in der Generation (g) als Nachfolger und mit
 seinen beiden Geschwistern (der Generation (g-1)) zwei geteilte
 rote Nachfolger je einen vor und nach den blauen Nachfolger.
 Jeder rote Knoten der Generation (g-1) hat (n-6) blaue nacheinander
 generierte Knoten in der Generation (g) als Nachfolger und mit
 seinen beiden Geschwistern (der Generation (g-1)) zwei geteilte
 rote Nachfolger je einen vor und nach den blauen Nachfolger.
 Erstelle zugehörige geometrische Punkte mit ungültigen Default-Werten
 als Koordinateneinträge.
 Aktualisiere PunktListe, KnotenListe
 Für jeden Knoten e der Generation (g-1):
 CALL doKinderLayout (e, len);
 Für jeden Knoten e der Generation (g-1):

```

        CALL doUpdateTriangles (e);
    END-IF
END-FOR
END Netzgenerator

Algorithmus 4 (doKinderLayout). input:(Knoten  $e$ , double  $len$ )
BEGIN doKinderLayout
    //e Elternknoten, len Abstand zwischen zwei Punkten
    Sei  $e_2$  der als zweites eingetragene Geschwisterknoten von Knoten  $e$ .
    Sei  $A$  ein Vektor aus dem  $\mathbb{R}^3$ , der die MINKOWSKI-Koordinaten
    zum Knoten  $e$  enthält.
    FOR  $i=0$  TO  $i < \text{Anzahl der Kinder von Knoten } e$  STEP 1 DO
        Bestimme in der Knotenliste die Position des aktuellen Kindes
        und speichere diese in KindPos
        Sei  $C$  ein Vektor aus dem  $\mathbb{R}^3$ , der die Koordinaten des aktuellen Kindes
        aufnehmen soll.
        IF((aktuelles Kind ist rot)  $\wedge$  ( $i=0$ ))
            Die Position  $C$  des ersten geteilten roten Nachfolgers von  $e$  wird bestimmt
            durch den Abstand zur Position  $A$  des Knotens  $e$  sowie dem Abstand
            zur Position  $B$  des zweiten Geschwister-Knotens von  $e$ .
             $C$  muss in  $H^2$  liegen.
            Es gibt zwei mögliche Lösungen  $P, P'$  des zugehörigen Gleichungssystems.
             $C$  bekommt die Werte der Lösung zugewiesen, deren dritte Komponente
            größer ist als die dritte Komponente von  $A$ .
        END-IF
        IF((aktuelles Kind ist blau)  $\wedge$  ( $i>0$ ))
            Die Position  $C$  des aktuellen ( $i$ -ten) blauen Nachfolgers von  $e$  wird
            bestimmt durch den Abstand zur Position  $A$  des Knotens  $e$  sowie dem
            Abstand zur Position  $B$  des ( $i-1$ )-ten Nachfolgers von  $e$ .
             $C$  muss in  $H^2$  liegen.
            Es gibt zwei mögliche Lösungen  $P, P'$  des zugehörigen Gleichungssystems.
             $C$  bekommt die Werte der Lösung zugewiesen, deren Abstand von der
            Position  $R$  des zweiten Geschwister-Knotens von  $e$  größer ist.
        END-IF
        IF((aktuelles Kind ist rot)  $\wedge$  ( $i>0$ ))
            //Für den zweiten geteilten roten Nachfolger muss nichts gemacht werden,
            // da dessen geometrisches Layout durch den ersten Geschwister-Knoten
            // von  $e$  durchgeführt wird.
        END-IF
        Aktualisiere in der Punktliste die zum aktuellen Kind
        gehörenden geometrischen Informationen mit dem Wert von  $C$ .
    END-FOR
END doKinderLayout

```

Algorithmus 5 (doUpdateTriangles). *input:*(Knoten e)

BEGIN doUpdateTriangles

 //e Elternknoten

 FOR $i=0$ TO $i < \text{Anzahl der Kinder von Knoten } e$ STEP 1 DO

 IF((aktuelles Kind ist rot) \wedge ($i==0$))

 Bestimme DID als Index des neuen Dreiecks.

$A = \text{Knoten ID von } e$;

$B = \text{Knoten ID des zweiten Geschwister-Knotens von } e$;

$C = \text{Knoten ID des aktuellen Kindes}$;

 Neues Dreieck ist $d = (DID, A, B, C)$.

 END-IF

 IF((aktuelles Kind ist blau) \wedge ($i>0$))

 Bestimme DID als Index des neuen Dreiecks.

$A = \text{Knoten ID von } e$;

$B = \text{Knoten ID des vorherigen Kindes von } e$;

$C = \text{Knoten ID des aktuellen Kindes}$;

 Neues Dreieck ist $d = (DID, A, B, C)$.

 END-IF

 IF((aktuelles Kind ist rot) \wedge ($i>0$))

 Für den zweiten roten Knoten ist der zweite

 Geschwister-Knoten von e zuständig!

 END-IF

 END-FOR

END doUpdateTriangles

5.3.3. Navigation im Netz

Wir wissen schon, dass in der POINCARÉ-Scheibe Punkte näher an den Scheibenrand rücken, je größer ihr hyperbolischer Abstand vom Ursprung ist. Daher ist es nötig Programmen, die eine HSOM in der POINCARÉ-Scheibe darstellen, eine Navigationsmöglichkeit zu geben, so dass auch entfernte Punkte betrachtet werden können.

Möchte man einen Knoten betrachten, dessen geometrische Repräsentation ein entfernter Punkt ist, so müssen wir das Netz transformieren, dass die Repräsentation des Knotens von Interesse im Ursprung zu liegen kommt, denn der „Fischaugen-Effekt“ bedeutet, dass die Auflösung um den Ursprung der POINCARÉ-Scheibe die größte ist und damit dort mehr Details gesehen werden können.

Betrachten wir uns die Datenstruktur unseres Netzes, so fällt auf, dass die Punkte Attribute origMink, origPoinc sowie tempMink, tempPoinc besitzen. Die Attribute orig* werden durch die Navigation im Netz nicht verändert, das ist besonders für das schnelle Zurücksetzen des Netzes in das ursprüngliche Netz-Layout nützlich. Die Attribute temp* werden durch Navigieren im Netz stetig verändert. Die Basis der geometrischen Netzveränderung ist dabei immer das original Layout, dessen geometrische Information in den Punkt-Attributen orig* abgespeichert ist, um numerische Fehler zu minimieren, die automatisch durch die Maschinenungenauigkeit entstehen.

Betrachten wir uns die Transformation in den Ursprung genauer; es sei zur Erinnerung noch darauf hingewiesen, dass das Rechenmodell das MINKOWSKI-Modell ist und nur die Darstellung in der POINCARÉ-Scheibe geschieht.

Transformation eines beliebigen Punktes von H^2 in den Ursprung U

Wir erinnern uns: Der Punkt $U \in H^2$ besitzt die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und heißt Ursprung von H^2 .

Jeder Punkt P aus H^2 lässt sich entlang einer Großhyperbel, die durch U und P verläuft, offensichtlich nach U verschieben.

Möchte man ein ganzes Punkte-Netz in H^2 so topologie- und abstandserhaltend transformieren, dass ein bestimmter Punkt in den Ursprung von H^2 transformiert wird, ist es sinnvoll, diese Transformation des Netzes wieder mit den LORENTZ-Transformationen zu beschreiben, denn LORENTZ-Transformationen verändern den Abstand zwischen zwei Punkten nicht.

Diese Transformation geschieht im Wesentlichen in zwei Schritten. Zunächst wird das Netz und damit der gewünschte Punkt so rotiert, dass seine y -Koordinate verschwindet und seine x -Koordinate positiv ist, anschließend wird ein Boost in x -Richtung durchgeführt, so dass auch seine x -Koordinate verschwindet.

Offensichtlich ist: Liegt der gewünschte Punkt schon im Ursprung von H^2 , so wird keine Transformation benötigt.

Wie ist der Rotationswinkel der gesuchten LORENTZ-Drehung?

Bekanntlich sind alle Punkte in H^2 darstellbar als $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sinh(k) \\ \sin(\alpha) \sinh(k) \\ \cosh(k) \end{pmatrix}$

An $p_3 = \cosh(k)$ an erkennen wir schon den Wert für k als $k = \operatorname{arcosh}(p_3)$.

Für die die gesuchte Rotation muss gelten: $P \mapsto P' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \cdot P$

Mit $P' \in H^2 \Rightarrow p'_1{}^2 + p'_2{}^2 - p'_3{}^2 = -1$ kann die Koordinate p'_1 bestimmt werden als $p'_1{}^2 = -1 - p'_2{}^2 + p'_3{}^2 = -1 - 0 + p_3^2 \Leftrightarrow p'_1 = \sqrt{p_3^2 - 1}$

Also muss für die gesuchte Rotation des Netzes, als Transformation des Punktes P , gelten:

$$\begin{aligned}
 H^2 \ni P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &\mapsto R_z(\varphi) \cdot P = R_z(-\varphi') \cdot P \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi') & -\sin(-\varphi') & 0 \\ \sin(-\varphi') & \cos(-\varphi') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_3^2 - 1} \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} = P' \in H^2
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Rotationswinkels betrachten wir fünf Fälle:

Fall 1: $p_1 > 0 \wedge p_2 = 0$: Es wird keine Rotation gebraucht: $\varphi = -0$

Fall 2: $p_1 < 0 \wedge p_2 = 0$: Die Rotation beträgt ganze -180° : $\varphi = -\pi$

Fall 3: $p_1 = 0 \wedge p_2 > 0$: Die Rotation beträgt -90° : $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$

Fall 4: $p_1 = 0 \wedge p_2 < 0$: Die Rotation beträgt -270° : $\varphi = -\frac{3}{2}\pi$

Fall 5: $p_2 \neq 0 \wedge p_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 R_z(\varphi) \cdot P = R_z(-\varphi') \cdot P &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi') & -\sin(-\varphi') & 0 \\ \sin(-\varphi') & \cos(-\varphi') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi') \cdot p_1 - \sin(-\varphi') \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ \sin(-\varphi') \cdot p_1 + \cos(-\varphi') \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi') \cdot p_1 + \sin(\varphi') \cdot p_2 \\ -\sin(\varphi') \cdot p_1 + \cos(\varphi') \cdot p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ 0 \\ p'_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Winkels $\varphi = -\varphi'$ setzen wir $x := \cos(-\varphi')$, $y := \sin(-\varphi')$ sowie $a := p_1$, $b := p_2$ und $c := \sqrt{p_3^2 - 1}$ und betrachten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} a \cdot x - b \cdot y \\ a \cdot y + b \cdot x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} a \cdot x - b \cdot y \\ b \cdot x + a \cdot y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ \frac{0}{b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{a}{b} - \left(-\frac{b}{a}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ \frac{0}{b} - \frac{c}{a} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{a^2+b^2}{a \cdot b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ -\frac{c \cdot b}{a \cdot b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ -\frac{c \cdot b}{a \cdot b} \cdot \frac{a \cdot b}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ -\frac{c \cdot b}{a \cdot b} \cdot \frac{a \cdot b}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ -\frac{c \cdot b}{a^2+b^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erkennen schon an dieser Stelle der obigen Umformungskette:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{c \cdot b}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \\
\sin(-\varphi') &= -\frac{c \cdot b}{a^2 + b^2} = -\frac{\sqrt{p_3^2 - 1} \cdot p_2}{p_1^2 + p_2^2} = -\frac{\sqrt{p_3^2 - 1} \cdot p_2}{p_3^2 - 1} = -\frac{\sqrt{p_3^2 - 1}}{p_3^2 - 1} \cdot p_2 \Leftrightarrow \\
-\varphi' &= \arcsin \left(-\frac{\sqrt{p_3^2 - 1}}{p_3^2 - 1} \cdot p_2 \right) \Leftrightarrow \varphi' = -\arcsin \left(-\frac{\sqrt{p_3^2 - 1}}{p_3^2 - 1} \cdot p_2 \right)
\end{aligned}$$

Durch die LORENTZ-Drehung mit dem gerade bestimmten Rotationswinkel φ lässt sich jeder Punkt aus H^2 , der nicht der Ursprung ist, in gewünschter Weise um die z -Achse drehen. Eine gewünschte Rücktransformation erhält man mit umgekehrter Drehung. Der Punkt P wurde auf den Punkt P' transformiert. Der Punkt P' besitzt keinen Rotationsanteil mehr.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sinh(k) \\ \sin(\alpha) \sinh(k) \\ \cosh(k) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(k) \\ 0 \\ \cosh(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_3^2 - 1} \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = P'$$

Der LORENTZ-Boost, der den Punkt $P' = \begin{pmatrix} \sqrt{p_3^2 - 1} \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}$ – das war der geeignet rotierte

Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ – auf den Ursprung $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von H^2 transformiert, d.h. die erste Koordinate verschwinden lässt, ist der Boost mit $-k$.

$$\begin{aligned} B_x(-k) \cdot P' &= \begin{pmatrix} \cosh(-k) & 0 & \sinh(-k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(-k) & 0 & \cosh(-k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sinh(k) \\ 0 \\ \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(-k) \sinh(k) + \sinh(-k) \cosh(k) \\ 0 \\ \sinh(-k) \sinh(k) + \cosh(-k) \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(k) \sinh(k) - \sinh(k) \cosh(k) \\ 0 \\ -\sinh(k) \sinh(k) + \cosh(k) \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sinh^2(k) + \cosh^2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dabei ist } k = \operatorname{arcosh}(p_3) \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix für die Transformation $P \mapsto P' \mapsto U$ lässt sich direkt angeben:

$$\begin{aligned} M'(\varphi, k) &= B_x(k) \cdot R_z(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(k) \cos(\varphi) & -\cosh(k) \sin(\varphi) & \sinh(k) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \sinh(k) \cos(\varphi) & -\sinh(k) \sin(\varphi) & \cosh(k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M'(-\varphi', -k) \cdot P = U, \text{ mit } -k = -\operatorname{arcosh}(p_3) \text{ und } -\varphi' = \begin{cases} -0 \text{ für } p_1 > 0 \wedge p_2 = 0 \\ -\pi \text{ für } p_1 < 0 \wedge p_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}\pi \text{ für } p_1 = 0 \wedge p_2 > 0 \\ -\frac{3}{2}\pi \text{ für } p_1 = 0 \wedge p_2 < 0 \\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{p_3^2 - 1}}{p_3 - 1} \cdot p_2\right) \text{ sonst} \end{cases}$$

Die zugehörige Rücktransformation $U \mapsto P' \mapsto P$ gelingt mit der uns schon bekannten Transformation (siehe Seite 76)

$$\begin{aligned} M(\varphi, k) &= R_z(\varphi) \cdot B_x(k) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(k) & 0 & \sinh(k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cosh(k) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sin(\varphi) \cdot \cosh(k) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cdot \sinh(k) \\ \sinh(k) & 0 & \cosh(k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M(\varphi', k) \cdot U = P, \text{ mit } k = \operatorname{arcosh}(p_3) \text{ und } \varphi' = \begin{cases} 0 & \text{für } p_1 > 0 \wedge p_2 = 0 \\ \pi & \text{für } p_1 < 0 \wedge p_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{für } p_1 = 0 \wedge p_2 > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{für } p_1 = 0 \wedge p_2 < 0 \\ -\arcsin\left(-\frac{\sqrt{p_3^2 - 1}}{p_3^2 - 1} \cdot p_2\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Algorithmus für den Netznavigator

Algorithmus 6 (Netznavigator). *input:* (int KID)

BEGIN Netznavigator

//KID wurde z.B. durch eine Benutzereingabe festgelegt.

Suche in der Punktliste nach zugehörigem Punkt P.

Es sei $G \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, der die MINKOWSKI-Koordinaten von P aufnimmt.

Bestimme Transformationsmatrix M' (siehe Seite 100)

zur Transformation von G nach U.

//Parallelisierbar:

Wende M' auf das Attribut origMink aller Punkte der PunktList an und speichere das Ergebnis in dem jeweiligen tempMink ab.

Bestimme mit Minkt2Poinc aus den Attributen tempMink die aktuelle Position in der POINCARÉ-Scheibe, speichere diese im jeweiligen tempPoinc ab.

Aktualisiere die Darstellung in der POINCARÉ-Scheibe mit den neuen

Werten in den tempPoinc-Attributen der Punkte.

END Netznavigator

Zusammenfassung.

Als wichtige Folgerungen der Ergebnisse dieses Kapitels können wir

- das Netzwachstum bestimmen,
- Netze generieren,
- im Netz navigieren.

Im Gegensatz zu in der Literatur vorgestellten Algorithmen ist hierbei eine wesentlich größere numerische Robustheit zu erwarten, da man nicht auf Randbereiche der POINCARÉ-Scheibe ausweichen muss.

6. Darstellung von Dreiecksnetzen in der POINCARÉ-Scheibe

Dieses ist das letzte zentrale Kapitel der Arbeit: Es geht um

- die Visualisierung des hyperbolischen Netzes in der EUKLIDischen Ebene.

Kapitelinhalt. In diesem Kapitel werden wir uns der Darstellung von Dreiecksnetzen in der POINCARÉ-Scheibe zuwenden. Dazu werden wir den Schnitt und den Schnittwinkel zweier Kreise definieren. Wir werden uns klar machen, wie die einzelnen Dreiecks-Seiten auszusehen haben. Für die Festlegung der Form der Dreiecks-Seite benötigen wir einen dritten Punkt, den wir mit der *Inversion am Einheitskreis* erhalten, sowie den Umkreis eines (EUKLIDischen) Dreiecks. Wir werden einen schnellen Test, ob vier Punkte auf einem Kreis liegen und ob zwei Punkte von einem dritten Punkt entfernt sind, mit *homogenen komplexen Koordinaten* kennen lernen.

Wir werden aus diesen notwendigen Vorarbeiten einen Algorithmus formulieren, der eine *Strecke* zwischen zwei Punkten, die auf einer g -Linie – genauer: auf einer hyperbolischen Gerade – liegen, generiert. Wir werden einen darauf aufbauenden Algorithmus formulieren, der aus drei Punkten, den Eckpunkten eines Dreiecks, die Seiten des Dreiecks in die POINCARÉsche Scheibe zeichnen kann.

Wir wissen schon aus Abschnitt 4.4: Hyperbolische Geraden in der POINCARÉ-Scheibe sind

entweder offene (EUKLIDische) Durchmesser der Scheibe

oder offene (EUKLIDische) Kreisbögen von Kreisen, die den Rand der Scheibe, also den Einheitskreis, orthogonal schneiden.

Wir müssen erkennen, dass EUKLIDische Kreise essentielle Grundlage für die Darstellung der POINCARÉ-Scheibe sind. Daher kommen wir nicht darum herum, für die korrekte Darstellung von Strecken in der POINCARÉ-Scheibe wesentliche Definitionen und Aussagen der EUKLIDischen Geometrie am Kreis darzustellen.

6.1. Grundlagen der EUKLIDischen Kreisgeometrie

Ein Kreis ist eindeutig festgelegt durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius: $K = (M, r)$ (vgl: Definition 2.10)

Definition 6.1. (Berührungsradius, Berührungspunkt): Sei t eine (EUKLIDische) Gerade und $P \in t$ ein Punkt. Sei $K = (M, r)$ ein Kreis, so heißt die Strecke \overline{MP} der *Berührungsradius*, genau dann wenn P ein Punkt des Kreises ist $P \in K$. P heiße *Berührungspunkt*.

Definition 6.2. (Tangente in einem Punkt eines Kreises): Sei t eine (EUKLIDische) Gerade und $K = (M, r)$ ein Kreis. P sei der Berührungspunkt von t mit K , d.h. $(P \in t) \wedge (P \in K)$. Und $Q \in t$ ein von P verschiedener Punkt. Es heißt t *Tangente von K in P* genau dann, wenn $\sphericalangle(QPM)$ einen rechten Winkel bilden. Alternativ: Wenn nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt $\overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{MQ}^2$, dann heißt t *Tangente von K in P* .

Definition 6.3. (Normale in einem Punkt eines Kreises): Sei n eine (EUKLIDische) Gerade. Sei t eine Tangente des Kreises $K = (M, r)$ im Punkt P . Schneiden sich n und t im Punkt P orthogonal, so heißt n *Normale des Kreises K in P* . Der Berührungsradius \overline{MP} ist Teil der Normalen.

Definition 6.4. (Schnittpunkte, Schnittwinkel zwischen Kreisen): Sind K_1 und K_2 zwei verschiedene Kreise, die sich in den zwei *Schnittpunkten* S_1 und S_2 schneiden, d.h. $S_1 \in K_1 \wedge S_1 \in K_2$ sowie $S_2 \in K_1 \wedge S_2 \in K_2$, so versteht man unter dem *Schnittwinkel* beider Kreise, den Winkel, den die Tangente t_1 von K_1 mit der Tangente t_2 von K_2 im Punkt S_1 (oder wegen Symmetrie S_2) beschreibt.

Definition 6.5. (orthogonale Kreise): Orthogonale Kreise sind Kreise, die sich im rechten Winkel schneiden.

Satz 6.1. Nach Satz des PYTHAGORAS gilt, zwei Kreise mit Radius r_1 und r_2 deren Mittelpunkte M_1 und M_2 den Abstand d von einander haben sind orthogonal, wenn

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2$$

Definition 6.6. (geometrische Inversion, Inversion am Einheitskreis, Inversion am Kreis): Die *komplexe Inversion* haben wir als eine MÖBIUS-Transformation $I(z), z \in \mathbb{C}$ – kennen gelernt (siehe Seite 68).

Die Hintereinanderausführung von *komplexer Inversion* und anschließender *Spiegelung an der reellen Achse* wird *geometrische Inversion* genannt. [Nee2001]

komplexe Inversion: $r \cdot e^{i\varphi} = z \mapsto I(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi} = \tilde{z}$

geometrische Inversion: $z = r \cdot e^{i\varphi} \mapsto I_r(z) = \frac{1}{z^*} = \frac{1}{r \cdot e^{-i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{i\varphi} = z'$

Die *geometrische Inversion* wird auch als *Transformation durch reziproke Radien* bezeichnet. [Nee2001], [Kle1926]

Für einen Kreis $K = (M, r) \wedge M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \wedge m = m_1 + m_2 i$ ist die *Inversion am Kreis* als Transformation eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ gegeben als [Nee2001]:

$$z \mapsto I_K(z) = \frac{r^2}{z^* - m^*}$$

Für den Einheitskreis mit dem Mittelpunkt bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die *Inversion am Einheitskreis* gegeben als Transformation eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ [Nee2001]:

$$z \mapsto I_C(z) = \frac{1}{z^*}$$

Die *Inversion am Einheitskreis* ist ein Spezialfall der *Inversion am Kreis*, denn mit dem Kreis $K = (M = O, r = 1) \wedge O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge 0 = 0 + 0i$ ergibt sich für die *Inversion am Kreis* eines Punktes $z \in \mathbb{C}$:

$$z \mapsto I_K(z) = \frac{1^2}{z^* - 0^*} = \frac{1}{z^* - 0} = \frac{1}{z^*}$$

Wir erkennen auch, dass die *Inversion am Einheitskreis* I_C identisch mit der *geometrischen Inversion* oder *Transformation mit reziprokem Radius* I_r ist.

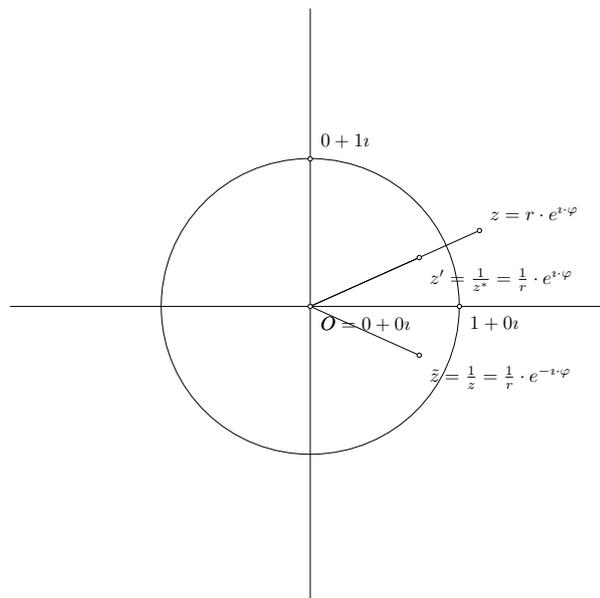


Abbildung 6.1.: Transformation mit reziprokem Radius am Einheitskreis in \mathbb{C}

Konstruktion inverser Punkte nach APPOLONIUS: Gegeben ist der Kreis $K = (M, r)$ und ein Punkt A innerhalb des Kreises. Zur Konstruktion des inversen Punktes A' wird die EUKLIDISCHE Gerade g_1 durch M und A gezeichnet. Die EUKLIDISCHE Gerade g_2 schneidet im Punkt A die Gerade g_1 orthogonal: $A = g_1 \cap g_2 \wedge \sphericalangle(g_1, g_2) = \frac{1}{2} \cdot \pi$. Die Punkte P_1 und P_2 sind Schnittpunkte der Geraden g_2 mit dem Kreis K : $\{P_1, P_2\} = g_2 \cap K$. t_{P_1} ist Tangente von K im Punkt P_1 . t_{P_2} ist Tangente von K im Punkt P_2 . Der Schnitt von t_{P_1} und t_{P_2} mit g_1 ist A' , der inverse Punkt von A bezogen auf K : $A' = t_{P_1} \cap g_1 = t_{P_2} \cap g_1$

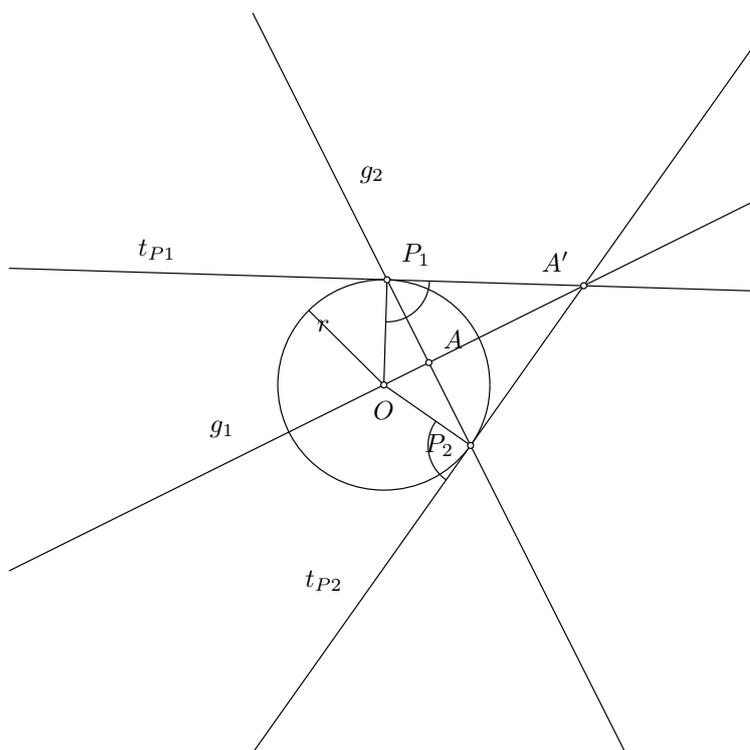


Abbildung 6.2.: APPOLONIUS: Inversion am Kreis

Vertauscht man A und A' so konstruiert dasselbe Diagramm den inversen Punkt zu einem Punkt A außerhalb eines Kreises.

Satz 6.2. Falls Kreise K_1 und K_2 sich orthogonal schneiden, dann ist für jeden Punkt $A \in K_2$, der im Innern von K_1 liegt, der inverse Punkt A' wieder Teil des Kreises K_2 – $A' \in K_2$.

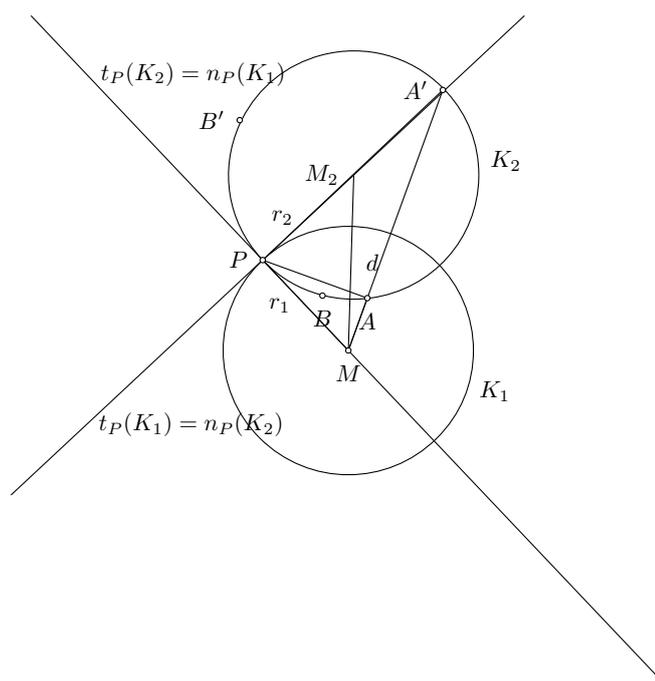


Abbildung 6.3.: Inversion an geschnittenen orthogonalen Kreisen

Beweis. Es sind K_1 und K_2 verschiedene Kreise, die sich im Punkt P orthogonal schneiden. $t_P(K_1)$ ist die Tangente in P von K_1 , $t_P(K_2)$ ist die Tangente in P von K_2 , $n_P(K_1)$ ist die Normale in P von K_1 , $n_P(K_2)$ ist die Normale in P von K_2 .

Nach Definition 6.2 und Definition 6.3 mit Satz 6.1 wissen wir: $t_P(K_1) = n_P(K_2)$ und $t_P(K_2) = n_P(K_1)$

OBdA sei $K_1 = (M, r_1)$. Zeichne die Strecken \overline{MP} , \overline{PA} und $\overline{PA'}$. Um den Satz 6.2 zu beweisen, reicht es nachzuweisen, dass die Euklidischen Dreiecke (MAP) und (MPA') ähnlich sind.

Der Winkel bei M wird von beiden Dreiecken benutzt.

Die Strecke \overline{MP} ist der Radius r_1 von K_1 , infolgedessen auch Teil der Tangente von K_2 in P .

Der Winkel $\sphericalangle(PA'A)$ und $\sphericalangle(APM)$ unterteilen denselben Bogen \widehat{PA} , \overline{MP} war Teil der Tangente von K_2 in P , daher sind die Winkel $\sphericalangle(PA'A)$ und $\sphericalangle(APM)$ gleich.

Daraus folgt, die Dreiecke (MAP) und (MPA') sind ähnlich und es gilt die Beziehung:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MA'}} \text{ also } \overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MP} \cdot \overline{MP} = \overline{MP}^2$$

□

Definition 6.7. (Umkreis eines Dreiecks): Der *Umkreis* eines Dreiecks (ABC) ist der Kreis, auf dem die drei Punkte A , B und C liegen.

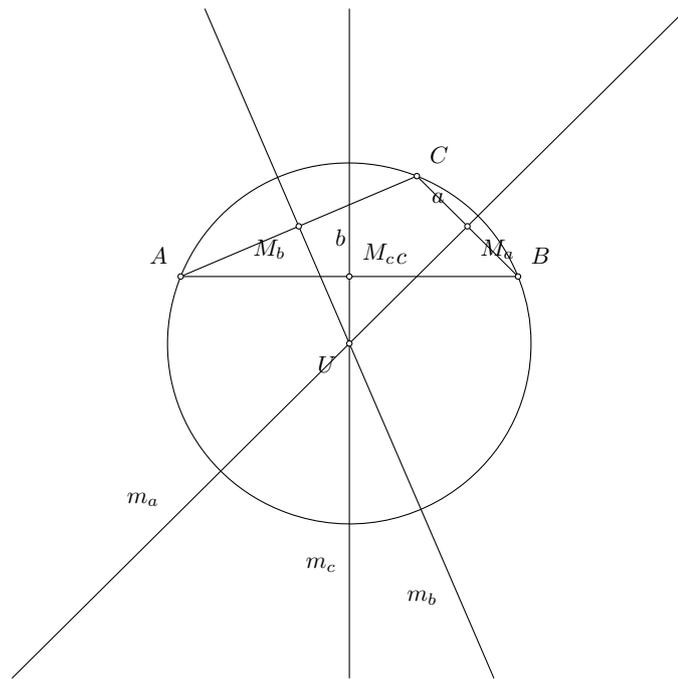


Abbildung 6.4.: Umkreis eines Dreiecks

Konstruktion des Umkreises A, B und C sind die Eckpunkte des Dreiecks (ABC) . Die Dreiecksseiten sind $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$. Die Seitenmittenpunkte sind $M_a = M_{\overline{BC}}$, $M_b = M_{\overline{AC}}$ und $M_c = M_{\overline{AB}}$. Die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c sind EUKLIDISCHE Geraden, die senkrecht zu den Dreiecksseiten a, b und c in den Seitenmittenpunkten M_a, M_b und M_c sind. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der *Umkreismittelpunkt* U : $U = m_a \cap m_b \cap m_c$. Der *Umkreisradius* r ist damit fest bestimmt als $r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$.

6.2. Komplex-homogene Koordinaten

Jeder Punkt des \mathbb{R}^2 lässt sich durch homogene Koordinaten des \mathbb{R}^{2+1} ausdrücken, indem

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ transformiert wird zu $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ebenso ist es möglich Punkte, des \mathbb{R}^2 als

komplexe Zahlen zu interpretieren, indem $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ als $z_P = p_1 + i p_2$ verstanden wird.

Diese Interpretationen haben beide ihre Berechtigung.

Mit der Darstellung in *komplex-homogenen Koordinaten* können Methoden von beiden „Welten“ verbunden werden.

Die Menge aller möglichen Punkte mit *komplex-homogenen Koordinaten* ist $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 / \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$. Die Punkte von \mathbb{CP}^1 sind repräsentiert durch Vektoren $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \wedge (z_1, z_2) \neq (0, 0)$, wobei Vektoren, die sich nur durch ein (komplexes) Vielfaches unterscheiden, miteinander identifiziert werden, d.h. $z_i = \lambda \cdot w_i$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $i \in \{1, 2\} \wedge w_i \in \mathbb{C} \wedge w_i \neq 0$ werden identifiziert.

Die ursprünglichen Punkte von \mathbb{C} werden durch Homogenisierung in $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ eingebettet, indem den Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Punkte $(z, 1) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ zugeordnet werden.

Durch diese Zuordnung bleibt nur ein einziger Punkt von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ nicht erfasst: der Punkt $(1, 0)$. Dieser Punkt (im Unendlichen) vervollständigt die normale *komplexe Ebene* zur *komplexen projektiven Geraden*. Dieser Punkt werde auch als ∞ abgekürzt.

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\} = S^2$$

6.2.1. Transformationen mit komplex-homogenen Koordinaten

Genau wie auf der reellen projektiven Geraden (oder in der reellen projektiven Ebene) lassen sich in $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ projektive Transformationen durch lineare Abbildungen auf den homogenen Koordinaten ausdrücken.

Eine projektive Transformation eines Punktes $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ hat also die Form

$$(z_1, z_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot z_1 + b \cdot z_2, c \cdot z_1 + d \cdot z_2)$$

Bemerkung. Solche Transformationen lassen insbesondere das Doppelverhältnis beliebiger vier Punkte A, B, C, D unverändert:

$$\begin{aligned} \text{dop}(A; B; C; D) &= \frac{\frac{A-C}{B-C}}{\frac{A-D}{B-D}} = \frac{(A-C) \cdot (B-D)}{(A-D) \cdot (B-C)} \\ \text{dop}(z_1; z_2; z_3; z_4) &= \frac{(z_1 - z_3) \cdot (z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4) \cdot (z_2 - z_3)} \end{aligned}$$

Das Doppelverhältnis ist die einfachste projektive Invariante.

Da wir den Raum $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ aus \mathbb{C} durch Hinzunahme nur eines einzigen Punktes gewonnen haben, liegt es nahe, sich zu verdeutlichen, was eine projektive Transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eigentlich mit den ursprünglichen Punkten von \mathbb{C} macht.

Wir können eine solche Abbildung in eine Hintereinanderausführung einer *Homogenisierung* $z \mapsto (z, 1)$, der eigentlichen Transformation T und einer *Dehomogenisierung* $(z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2}$ zerlegen.

Wir erhalten also insgesamt $z \mapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$.

Das ist eine MÖBIUS -Transformation.

6.2.2. Imaginäre Kreispunkte und Doppelverhältnis

Ist $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so ist $z_P = p_1 + \imath p_2 \in \mathbb{C}$ und $(p_1, p_2, 1)$ der homogenisierte Punkt in der reellen projektiven Ebene.

Definition 6.8. (Imaginäre Kreispunkte): Die *imaginären Kreispunkte* I und J sind zwei spezielle Elemente aus \mathbb{CP}^1 mit komplexen homogenen Koordinaten [Kle1928]:

$$I := (i, -1, 0)$$

$$J := (i, 1, 0)$$

Satz 6.3. *Alle Kreise verlaufen durch I und J .*

Beweis. In gewöhnlichen rechtwinkligen Parallelkoordinaten eines kartesischen Koordinatensystems lautet die Gleichung eines Kreises [Kle1928]:

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B \cdot y + C = 0$$

In homogenen Koordinaten nimmt die Gleichung die Gestalt an [Kle1928]:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot A \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot B \cdot y \cdot x_3 + C \cdot x_3^2 = 0$$

Die *imaginären Kreispunkte* I und J erfüllen die Kreisbedingung:

$$\begin{aligned} I : i^2 + (-1)^2 + 0^2 + e \cdot i \cdot 0 + f \cdot (-1) \cdot 0 &= 0 \\ -1 + 1 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J : i^2 + (1)^2 + 0^2 + e \cdot i \cdot 0 + f \cdot (1) \cdot 0 &= 0 \\ -1 + 1 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

□

Definition 6.9. (Klammernotation): $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, z_A = a_1 + \iota a_2 \in \mathbb{C}, z_B = b_1 + \iota b_2 \in \mathbb{C}$ und $(a_1, a_2, 1) \in \mathbb{R}^{2+1}, (b_1, b_2, 1) \in \mathbb{R}^{2+1}$

$$\begin{aligned} [A, B, I] &:= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ \iota & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 0 + a_2 1 \iota + 1 b_1 (-1) - (\iota b_2 1 - 1 1 a_1 + 0 b_1 a_2) \\ &= a_2 \iota - b_1 + a_1 - b_2 \iota \\ &= a_1 - b_1 + (a_2 - b_2) \iota \\ &= z_A - z_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A, B, J] &:= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ \iota & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_2 \iota + b_1 - a_1 - b_2 \iota \\ &= -a_1 + a_2 \iota + b_1 - b_2 \iota \\ &= -(a_1 - a_2 \iota) + b_1 - b_2 \iota \\ &= -z_A^* + z_B^* = -(z_A^* - z_B^*) = [A, B, I]^* \end{aligned}$$

Doppelverhältnis Das Doppelverhältnis, das die Eigenschaft beschreibt, dass A, B, C und D auf einem Kreis liegen, lässt sich nun darstellen als

$$\frac{[ACI][BDI]}{[ADI][BCI]}$$

Wenn diese (im allgemeinen komplexe) Zahl reell ist, liegen die vier Punkte auf einem Kreis.

Test: Liegen vier Punkte auf einem Kreis? [RG] Wir können den Test auf „Reell-Sein“ durch Vergleich mit dem konjugiert Komplexen durchführen. Da aber J das konjugiert Komplexe von I ist, erhalten wir $[ABI]^* = [ABJ]$: Somit lässt sich der Test, ob vier Punkte auf einem Kreis liegen, schreiben als:

$$\begin{aligned} \frac{[ACI][BDI]}{[ADI][BCI]} &= \frac{[ACJ][BDJ]}{[ADJ][BCJ]} \in \mathbb{R} \\ [ACI][BDI][ADJ][BCJ] - [ACJ][BDJ][ADI][BCI] &= 0 \end{aligned}$$

Test: Sind zwei Punkte von einem dritten gleich weit entfernt? [RG] Wir wollen nun die Invariante für die Eigenschaft, dass zwei Punkte B und C gleich weit von einem dritten Punkt A entfernt sind, herleiten. Ist dies der Fall, so bildet die Differenz $A - B$

(Strecke \overline{BA}) zu $C - B$ (Strecke \overline{BC}) den gleichen Winkel wie $B - C$ (Strecke \overline{CB}) zu $A - C$ (Strecke \overline{CA}):

$$\frac{\frac{A - B}{C - B}}{B - C} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{A - C}{\frac{[ABI]/[CBI]}{[BCI]/[ACI]} = \frac{[ABJ]/[CBJ]}{[BCJ]/[ACJ]} \in \mathbb{R}}$$

$$[ABI][ACI][CBJ]^2 - [ABJ][ACJ][CBI]^2 = 0$$

6.3. Algorithmen für die POINCARÉ-Scheibe

Mit obiger Vorarbeit können wir direkt den Algorithmus 14 angeben, der in der POINCARÉ-Scheibe alle Punkte einer Strecke $s = \overline{AB}$, die durch Punkte A und B in allgemeiner Lage beschränkt ist, bestimmt. Der Algorithmus 15 zum Darstellen von Dreiecken baut auf diesem Strecken-Algorithmus auf.

Voraussetzung: Die POINCARÉ-Koordinaten der Netzpunkte sind durch Transformation der MINKOWSKI-Koordinaten entstanden.

Gegeben sind zwei Punkte $A \in \mathbb{R}^2$ und $B \in \mathbb{R}^2$ in der POINCARÉ-Scheibe D_p , $K_p = (M, r_1) = \partial(D_p)$ mit $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r_1 = 1$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $A \neq B$, $|A| < 1$, $|B| < 1$.

Algorithmus 7 (lineto). *input:* (Punkt2D A , Punkt2D B)
Line = $A + \lambda \cdot (B - A) = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

Algorithmus 8 (Punkt2DtoComplex). *input:* ($P \in \mathbb{R}^2$)
 $\mathbb{C} \ni p = p_1 + ip_2$
output: return (p)

Algorithmus 9 (ComplextoPunkt2D). *input:* ($p \in \mathbb{C}$)
 $\mathbb{R}^2 \ni P = \begin{pmatrix} \Re p \\ \Im p \end{pmatrix}$
output: return (P)

Algorithmus 10 (konjungiere). *input:* ($p \in \mathbb{C}$)
 $\mathbb{C} \ni p^* = \Re(p) - \Im(p)i$
output: return (p^*)

Algorithmus 11 (InvertierePunktAmKreis). *input:* (Punkt2DP, KreisK(M, r))
 $\mathbb{C} \ni m = \text{Punkt2DtoComplex}(M)$
 $\mathbb{C} \ni p = \text{Punkt2DtoComplex}(P)$
 $\mathbb{C} \ni p' = \frac{r^2}{\text{konjungiere}(p) - \text{konjungiere}(m)}$
 $\mathbb{R}^2 \ni P' = \text{ComplextoPunkt2D}(p')$
output: return(P')

Algorithmus 12 (DreiecksUmkreis). **input:** (*Punkt2D A, Punkt2D B, Punkt2D C*)

$$(a_1 - u_1)^2 + (a_2 - u_2)^2 = r^2$$

$$(b_1 - u_1)^2 + (b_2 - u_2)^2 = r^2$$

$$(c_1 - u_1)^2 + (c_2 - u_2)^2 = r^2$$

$$\text{Löse Gleichungssystem: } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot u_1 \\ 2 \cdot u_2 \\ r^2 - u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ b_1^2 + b_2^2 \\ c_1^2 + c_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw äquivalent: } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ b_1^2 + b_2^2 \\ c_1^2 + c_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } u_1 = \frac{x}{2}; u_2 = \frac{y}{2}; r = \sqrt{z + u_1^2 + u_2^2}; U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

output:(*KreisK(U, r)*)

Algorithmus 13 (bowto). **input:** *Punkt2DA, Punkt2DB, KreisK(M, r)*

Für Kreisbogen \widehat{AB} verschiebe K in den Ursprung: $K(M, r) \mapsto K'(O = (0/0), r)$ $A \mapsto$

$$A' = A - M, B \mapsto B' = B - M$$

Winkel φ zwischen A' und B' ist identisch mit dem Winkel zwischen A und B bezogen auf den Mittelpunkt von K : $\varphi = \sphericalangle(A'OB') = \sphericalangle(AMB)$.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{A' \cdot B'}{\|A'\| \cdot \|B'\|} = \frac{a'_1 \cdot b'_1 + a'_2 \cdot b'_2}{\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2} \cdot \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}} \\ &= \frac{(a_1 - u_1) \cdot (b_1 - u_1) + (a_2 - u_2) \cdot (b_2 - u_2)}{\sqrt{(a_1 - u_1)^2 + (a_2 - u_2)^2} \cdot \sqrt{(b_1 - u_1)^2 + (b_2 - u_2)^2}} \end{aligned}$$

Alle Punkte zwischen A und B auf dem Kreisbogen \widehat{AB} erhält man durch die Rotation von A' mit anschließender Translation um U :

$$\text{Punkt2D halb} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \cdot A' + U$$

If ($|halb| < 1$)

$$\text{Then Bow} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot A' + U \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \varphi \right\}$$

$$\text{ElseBow} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot A' + U \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \pi - \varphi \right\}$$

Algorithmus 14 (poincStrecke). **input:** (*Punkt2D A, Punkt2D B*)

1. A und B liegen auf einem Durchmesser:

If Die gleiche Komponente beider Punkte ist Null:

$$((a_1 == b_1 == 0) \wedge (a_2 \neq b_2)) \vee ((a_1 \neq b_1) \wedge (a_2 == b_2 == 0)) \vee ((a_1 == b_1 == a_2 == b_2 == 0))$$

Then verbinde A und B mit einer EUKLIDischen Linie: *lineto(A, B)*

ElseIf es gibt ein eindeutiges λ als Lösung der Gleichung:

$$M = A + \lambda \cdot (B - A), \text{ d.h. } \frac{m_1 - a_1}{b_1 - a_1} == \frac{m_2 - a_2}{b_2 - a_2}$$

Then verbinde A und B mit einer EUKLIDischen Linie: *lineto(A, B)*

2. A und B liegen nicht auf einem Durchmesser, dann verbinde sie mit einem Kreisbogen \overline{AB} des Kreises $K = (U, r_2)$, auf dem A und B liegen und der K_p orthogonal schneidet. $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = 1$$

$$K_p = (M, r_1)$$

Wähle $P \in \{A, B\}$ mit $P \neq M$

$$P' = \text{InvertierePunktAmKreis}(P, K_p)$$

$$K = \text{DreiecksUmkreis}(A, B, P')$$

$$\text{bowto}(A, B, K(U, r));$$

Algorithmus 15 (poincDreieck). **input:** (Punkt2D A , Punkt2D B , Punkt2D C)
 Strecke \overline{AB} poincStrecke(A , B); poincStrecke(B , C); poincStrecke(C , A)

Alternative:

Ein etwas anderer Weg, um zur Darstellung der Kanten des Netzes in der POINCARÉ-Scheibe zu gelangen, wäre es im MINKOWSKI-Modell alle Punkte von Großhyperbelbögen zwischen jeweils zwei benachbarten Knoten zu berechnen. Diese Berechnung gelingt mit geeigneter Parametrisierung der Großhyperbelbögen. Eine geeignete Parametrisierung von Großhyperbelbögen ist im Anhang B.1.2 (siehe Seite 126) angegeben. Anschließend müssten alle diese Punkte der Großhyperbelbögen in das POINCARÉsche Scheiben-Modell transformiert werden.

Zusammenfassung.

Als Fazit dieses Kapitels ergibt sich:

- Wir können das Netz jetzt darstellen, und haben so alle „Zutaten“ für eine algorithmische Umsetzung der HSOM zusammen.

7. Zusammenfassung, Ausblick, und Dank

7.1. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die theoretische und algorithmische Vorarbeit für eine Umsetzung einer HSOM erarbeitet und dargestellt.

Im Gegensatz zu Ergebnissen der Literatur wurde dabei die Formulierung sowohl im MINKOWSKI-Modell als auch in der POINCARÉ-Scheibe ausformuliert, so dass eine Generierung des Gitters in beiden Modellen möglich wird.

Die POINCARÉ-Scheibe wird, wie bereits in der Literatur, zur Visualisierung genutzt. Anders als in der Literatur erlaubt die Generierung im MINKOWSKI-Modell eine stabilere Numerik, da keine dicht belegten Ränder berücksichtigt werden müssen.

Insgesamt ergibt sich so ein vollständiges und mathematisch elegantes Modell. Dieses Modell erlaubt einerseits, ein hyperbolisches Gitter mathematisch elegant zu erzeugen und andererseits in allen diskutierten Räumen Distanzen zu bestimmen. (Die Bestimmung von Distanzen ist wichtig für jedwede Visualisierung im hyperbolischen Raum, unabhängig von einer Gitterstruktur).

Im Rahmen dieser Arbeit wurden dazu die Grundlagen als auch der nötige Pseudocode hergeleitet. Eine algorithmische Umsetzung würde den Rahmen der Diplomarbeit sprengen, und ist Bestandteil einer weiteren Arbeit. Mithilfe einer konkreten Umsetzung hätte man dann ein effizientes und mathematisch elegantes Werkzeug an der Hand, das es erlaubt, komplexe Datentopologien (etwa skalenfreie Netze) gut auf dem Rechner zu darzustellen, sowie interaktives Browsen zuzulassen.

Aufbauend auf den hier gelegten Grundlagen sind offensichtlich weitere algorithmische Prozeduren leicht realisierbar. Wie in der Arbeit dargestellt wurde, wächst die Anzahl der Neuronen im hyperbolischen Gitter sehr schnell mit jeder weiteren Knoten-Generation, so dass in der Praxis nur ein Teil der Neuronen tatsächlich gebraucht wird. Diesem kann effizient durch eine dynamische Struktur Rechnung getragen werden: Der Netz-Generator, der momentan generationsweise Knoten produziert, ließe sich erweitern, so dass speziell auswählbare Knoten „Kinder bekommen“. Mit solcher Erweiterung wäre es möglich, sogenannte **growing SOMs** im hyperbolischen Raum zu erhalten.

Des Weiteren offeriert die zweidimensionale POINCARÉ-Scheibe Freiheiten zur Visualisierung zusätzlicher Informationen: Farbinformationen oder zusätzliche Höhenlinien für die Neuronen könnten etwa die Auslastung der Neuronen oder diffizilere Konzepte wie etwa

Klassengrenzen und topologische Verwerfungen anzeigen. Hierzu ließe sich ein im Bereich der **SOM** bekanntes Konzept, die ***U*-Matrix** und Erweiterungen¹, verallgemeinern: Die ***U*-Matrix** (Ultsch 1993) stellt die lokalen Distanzbeziehungen im hochdimensionalen Datenraum als 3-dimensionale Landschaft mit Bergen und Tälern dar. Berge entsprechen dabei grossen Entfernungen der Daten. Daten in einem gemeinsamen Tal gehören zusammen.

Die ***P*-Matrix** (Ultsch 2003) stellt die Dichte der Daten über dem Gitter dar. Die Dichte wird dabei unter Verwendung einer informationstheoretisch optimalen Dichteschätzung, der sog. Pareto-Dichteschätzung, errechnet.

Die ***U**-Matrix** (Ultsch 2003) kombiniert Distanz und Dichte, so dass in dichten Bereichen die Distanz zwischen Daten wenig ins Gewicht fällt. In dünn besiedelten Bereichen des hochdimensionalen Datenraumes werden die Distanzstrukturen der ***U*-Matrix** hingegen betont.

Mithilfe solcher Tools liesse sich schnell ein sehr mächtiges interaktives Tool zum Mining und zur Visualisierung großer Datensätze bereitstellen.

7.2. Danke

Danken möchte ich an dieser Stelle Herrn **Prof. Dieter Mayer** vom Institut für theoretische Physik der TU Clausthal für die vielen und ausgiebigen Gespräche über hyperbolische Geometrie, insbesondere bedanke ich mich für die Literaturhinweise zu den wirklich lezenswerten Arbeiten von FELIX KLEIN und ROBERT FRICKE.

Ebenso bin ich meinem Diplomarbeitbetreuer **Dipl.-Inform. Alexander Hasenfuß** zu Dank verpflichtet, der sich immer wieder Zeit genommen hat, mich wissenschaftlich zu beraten.

Herrn **Prof. Wilfried Lex** danke ich für seine sehr gut vorbereiteten und wunderbar gehaltenen Vorlesungen „Informatik 1 und 2“, „Logik“ und „Fibonaccizahlen - Schönheit und Nutzen in Informatik und Mathematik“, die ich hier an der TU Clausthal während meines Studiums hören konnte, insbesondere für die vielen und ausführlichen historischen Anmerkungen.

Bei Herrn **Prof. Walter Klotz** vom Institut für Mathematik der TU Clausthal danke ich für seine eindrucksvollen Vorlesungen „Graphentheorie 1 und 2“, und dafür, dass er mir während meines Studiums bei mathematischen Problemen stets bereitwillig zugehört hat.

Herrn **Prof. Jürgen Dix** und Frau **Prof. Barbara Hammer** bin ich sehr verbunden, dass sie mir die interessante Aufgabe als Übungsbetreuer zu den Vorlesungen „Theoretische Informatik 1“ und „Informatik 3“ in mehreren Semestern übertragen haben.

Ganz zum Schluss danke ich meinen Eltern, meinen Freunden und vor allem Yi Jiang, meiner Verlobten und zukünftigen Frau, für ihr unterstützendes Interesse an meiner Arbeit.

¹ ALFRED ULTSCH Professor am Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg führte die ***U*-Matrix** und die ***P*-Matrix** sowie die ***U**-Matrix** zur visuellen Unterstützung von SOMs ein.

Anhang A.

Pseudocode für den Netzgenerator

Da der Algorithmus des Netzgenerators einfach aussieht, aber die Umsetzung tatsächlich an einigen Stellen nicht ganz so einfach ist, wird hier noch ein Beispiel einer Umsetzung im Pseudocode gegeben. Die Notation des Pseudocodes lehnt sich sehr stark an die Programmiersprache C++ an und weicht von ihr nur wenig ab.

Wie im Abschnitt 5.3.2 (siehe Seite 92) schon genau so geschrieben:

Es werden mindestens 3 „globale“ Listen benötigt: `List<Knoten> KnotenListe;`
`List<Punkt> PunktListe;` `List<Dreieck> DreieckListe`

Es gibt $v(g, n)$ entweder rekursiv (siehe Seite 86) oder geschlossen (siehe Seite 90) als Funktion, die die Anzahl der Knoten in der g -ten Generation liefert.

Es gibt Funktionen zur Konvertierung zwischen Koordinaten des MINKOWSKI-Modells und der POINCARÉschen-Scheibe (siehe Seite 59).

Es gibt eine Funktion $length(n)$, die die Länge einer Dreiecksseite eines gleichwinkligen hyperbolische Dreiecks bestimmt (siehe Seite 72), wenn n Dreiecke in einem inneren Netzknoten zusammentreffen.

```
Pseudocode 1 (Netzgenerator). input:(int maxgeneration, int n)
//maxgeneration ist die Anzahl der zu generierenden Knoten-Generationen
//n ist die Anzahl der Dreiecke, die in einem Netzknoten zusammen treffen.
{//Begin(Netzgenerator)
    KnotenListe.clear();
    PunktListe.clear();
    DreieckListe.clear();

    //Hyperbolische Länge einer Dreiecksseite in Abhängigkeit von n.
    double len = length(n);

    //Dreiecksinnenwinkel
    double alpha = 2*pi/n;

    for (int g=0; g <= maxgeneration; g++)
    {
```

```

if (g==0)
{
    //der Ursprungsknoten wird erstellt
    Knoten k = new Knoten;
    Punkt p = new Punkt;
    k.KID = -1; k.generation=0; k.typ=blau; k.anz=n;
    p.PID = -1; p.origMink =  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;
    p.origPoinc = Mink2Poinc(p.origMink);
    p.tempMink = p.origMink;
    p.tempPoinc = p.origPoinc;
    KnotenListe.pushback(k);
    PunktListe.pushback(p);
} //end(if: g==0)

if (g==1)
{
    //die erste Generation auf einem Ring
    for(int a=0; a<n; a++)
    {
        //Topologie
        Knoten k = new Knoten;
        k.KID = a; k.generation=1; k.typ=blau; k.anz=n;
        k.ListEltern.pushback(-1);
        k.ListGeschwister.pushback( (a+1) mod n );
        k.ListGeschwister.pushback( (a-1) mod n );
        KnotenListe.pushback(k);

        //Geometrie
        Punkt p = new Punkt;
        p.PID = a;
        p.origMink =  $\begin{pmatrix} \cos(a * \alpha) * \sinh(\text{len}) \\ \sin(a * \alpha) * \sinh(\text{len}) \\ \cosh(\text{len}) \end{pmatrix}$ ;
        p.origPoinc = Mink2Poinc(p.origMink);
        p.tempMink = p.origMink;
        p.tempPoinc = p.origPoinc;
        PunktListe.pushback(p);

        //Dreiecke
        if((a mod 2)==0)
        {
            //zwei benachbarte Knoten der ersten Generation
            //bilden mit dem Ursprungsknoten ein Dreieck

```

```

        Dreieck d = new Dreieck;
        d.Knoten1-KID = -1;
        d.Knoten2-KID = a mod n;
        d.Knoten3-KID = (a+1) mod n;
        DreieckListe.pushback(d);
    }//end(if: (a mod 2)==0)
}//end(for: Angehörige der ersten Generation)
}//end(if: g==1)

if(g >= 2)
{
    //jede weitere Generation ...

    //Feststellen des ersten Knotens der Eltern-Generation
    // in der KnotenListe
    int PosFirstEltern = 0;
    for (int i = 0; i < g-1; i++)
        PosFirstEltern += v(i,n);

    //Erste Position in der KnotenListe
    //von Knoten der aktuellen Generation
    int PosFirst = PosFirstEltern + v(g-1,n);

    //Erste Position in der KnotenListe
    //von Knoten der Kinder-Generation
    int PosFirstKinder = PosFirst + v(g,n);

    //Topologie
    for (int a = PosFirst; a < PosFirstKinder; a++)
    {
        //Verknüpfe aktuelle Generation untereinander
        Knoten k = new Knoten;
        //Die Knotenidentität startet bei -1
        //aber die Positionierung bei 0
        k.KID = a-1;
        k.generation=g;
        k.anz=n;
        //k.typ; //kann erst später festgestellt werden

        //Verknüpfe mit beiden Geschwistern
        k.ListGeschwister.pushback( (((a-PosFirst)+1) mod (PosFirstKinder-
PosFirst)) + PosFirst-1 );
        k.ListGeschwister.pushback( (((a-PosFirst)-1) mod (PosFirstKinder-
PosFirst)) + PosFirst-1 );
    }
}

```

```

        KnotenListe.pushback(k);
    } //end(for: Verknüpfe aktuelle Generation untereinander)

    //Verbinde Knoten der Generation g-1 mit g
    int Kindercounter = PosFirst;
    for(int a=PosFirstEltern; a < PosFirst; a++ )
    {
        //Jeder blaue Knoten hat (n-5) blaue Nachfolger
        //und zwei geteilte rote Nachfolger
        //Jeder rote Knoten hat (n-6) blaue Nachfolger
        //und zwei geteilte rote Nachfolger

        Knoten e = KnotenList[a]; //Der aktuelle Elternknoten
        Knoten k; //Der aktuelle Kinderknoten

        //erster geteilter roter Nachfolger
        k = KnotenList[ ((Kindercounter - PosFirst) -1) mod (PosFirst-
Kinder - PosFirst) + PosFirst];

        k.typ=rot;
        k.ListeEltern.pushback(e.KID);
        e.ListeKinder.pushback(k.KID)

        if (e.typ == blau)
        {
            for (int kg=0; kg < (n-5); kg++)
            {
                //blaue Kinder
                k = KnotenList[ ((Kindercounter - PosFirst)) mod
(PosFirstKinder - PosFirst) + PosFirst];
                k.typ = blau;
                k.ListeEltern.pushback(e.KID);
                e.ListeKinder.pushback(k.KID);
                Kindercounter++;
            } //end(for: blaue Kinder)
        } //end(if blauer Knoten)
        if (e.typ == rot)
        {
            for (int kg=0; kg < (n-6); kg++)
            {
                //blaue Kinder
                k = KnotenList[ ((Kindercounter - PosFirst)) mod
(PosFirstKinder - PosFirst) + PosFirst];
                k.typ = blau;

```

```

        k.ListeEltern.pushback(e.KID);
        e.ListeKinder.pushback(k.KID);
        Kindercounter++;
    }//end(for: blaue Kinder)
} //end(if roter Knoten)

//zweiter geteilter roter Nachfolger
k = KnotenList[ ((Kindercounter - PosFirst) mod (PosFirstKinder - PosFirst) + PosFirst)];
e.ListeKinder.pushback(k.KID)
k.typ=rot;
k.ListeEltern.pushback(e.KID);
Kindercounter++;

} //end(for: Verbinde g-1 mit g)

//Erstelle geometrische Punkte der g-ten Generation

for(int i=PosFirst; i < PosFirstKinder; i++)
{
    Punkt p = new Punkt;
    p.PID = i-1;
    //Default Werte sollen ungültige sein.
    //Gültige Werte erst später möglich!
    p.origMink=(-1,-1,-1);
    p.origPoinc=(-1,-1);
    p.tempMink=p.origMink;
    p.tempPoinc=p.origPoinc;
    PunktListe.pushback(p);
} //end(for erstelle geometrische Punkte)

//Geometrie: Layout der Punkte der g-ten Generation
for(int i = PosFirstEltern; i < PostFirst; i++)
{
    //aktueller Elternknoten der (g-1)-ten Generation
    Knoten ek = KnotenList[i];

    //lege das geometrische Layout der Kinder des Knotens fest:
    doKinderLayout(ek, len);
} //end(for lege Geometrie fest)

//Aktualisierung der Dreiecksliste
for(int i = PosFirstEltern; i < PostFirst; i++)
{

```

```

//aktueller Elternknoten der (g-1)-ten Generation
Knoten ek = KnotenList[i];

//Aktualisiere die DreiecksListe
//mit den Knoten der g-ten Generation.
doUpdateTriangles(ek);
} //end(for lege Geometrie fest)

} //end(if: (g >= 2) )
} //end (for: generationen)
} //end(Netzgenerator)

```

Pseudocode 2 (doKinderLayout). *input:* (Knoten e , double len)

```

// e Elternknoten, len Abstand zwischen zwei Punkten
{ //Begin(doKinderLayout)   Knoten e2 = KnotenList[e.ListGeschwister[1] + 1];
  vector3D A = PunktList[e.KID + 1].origMink;
  for(int i=0; i < e.ListKinder.length(); i++)
  {
    int KindPos = e.ListKinder[i]+1;
    Knoten Kind = KnotenList[KindPos];
    Punkt Ret = new Punkt;
    Ret.PID = KindPos - 1;

    vector3D C =  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ ; //unbestimmte Belegung
    if((Kind.typ == rot)  $\wedge$  (i==0))
    {
      //Die Position C des ersten geteilten roten Nachfolgers von e wird bestimmt
      //durch den Abstand zur Position A des Knotens e sowie dem Abstand
      //zur Position B des zweiten Geschwister-Knotens von e.
      //C muss in  $H^2$  liegen.
      //Es gibt zwei mögliche Lösungen  $P, P'$  des zugehörigen Gleichungssystems.
      //C bekommt die Werte der Lösung zugewiesen, deren dritte Komponente
      größer
      // ist als die dritte Komponente von A.
      vector3D B = PunktList[e2.KID + 1].origMink;
       $L = \{P, P'\}$  mit  $P \in \mathbb{R}^3, P' \in \mathbb{R}^3$  Lösung des Gleichungssystems mit den
      Unbekannten  $p_1, p_2, p_3$ :

```

$$1. p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1$$

$$2. -a_1 p_1 - a_2 p_2 + a_3 p_3 = \cosh(len)$$

$$3. -b_1 p_1 - b_2 p_2 + b_3 p_3 = \cosh(len)$$

```

if( $P.z > A.z$ )  $C = P$ ;
    else if ( $P'.z > A.z$ )  $C = P'$ ;
} //end (if rot)
if( $(Kind.typ == blau) \wedge (i > 0)$ )
{
    //Die Position  $C$  des aktuellen ( $i$ -ten) blauen Nachfolgers von  $e$  wird be-
stimmt
    //durch den Abstand zur Position  $A$  des Knotens  $e$  sowie dem Abstand
    //zur Position  $B$  des ( $i-1$ )-ten Nachfolgers von  $e$ .
    //C muss in  $H^2$  liegen.
    //Es gibt zwei mögliche Lösungen  $P, P'$  des zugehörigen Gleichungssystems.
    //C bekommt die Werte der Lösung zugewiesen, deren Abstand von der
Position  $R$  des
    //zweiten Geschwister-Knotens von  $e$  größer ist.
    vector3D  $B = PunktList[e.ListKinder[i-1]+1].origMink$ ;
    vector3D  $R = PunktList[e2.KID + 1].origMink$ ;
     $L = \{P, P'\}$  mit  $P \in \mathbb{R}^3, P' \in \mathbb{R}^3$  Lösung des Gleichungssystems mit den
Unbekannten  $p_1, p_2, p_3$ :

    1.  $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1$ 
    2.  $-a_1p_1 - a_2p_2 + a_3p_3 = \cosh(len)$ 
    3.  $-b_1p_1 - b_2p_2 + b_3p_3 = \cosh(len)$ 

if ( $d_H(P, R) < d_H(P', R)$ )  $C = P'$ ;
    else if ( $d_H(P, R) > d_H(P', R)$ )  $C = P$ ;
} //end (if blau)
//Für den zweiten geteilten roten Nachfolger muss nichts gemacht werden, da
dessen
//geometrisches Layout durch den ersten Geschwister-Knoten von  $e$  durchgeführt
wird.
Ret.origMink =  $C$ ;
Ret.origPoinc =  $Mink2Poinc(C)$ ;
Ret.tempMink = Ret.origMink;
Ret.tempPoinc = Ret.origPoinc;
PunktList[KindPos] = Ret;
} //end (for Kinder in Liste von  $e$ ) //end(doKinderLayout)

```

Pseudocode 3 (doUpdateTriangles). *input:*(Knoten e)

```

// e Elternknoten
{//Begin(doKinderLayout)    for(int i=0; i < e.ListKinder.length();i++)
    {
        int KindPos = e.ListKinder[i]+1;
        Knoten Kind = KnotenList[KindPos];
        if((Kind.typ==rot) ^ (i == 0))
            {
                int A = e.KID;
                int B = e.ListGeschwister[1];
                int C = Kind.KID;
                int DID = DreieckList.length();
                Dreieck d = new Dreieck;
                d = (DID,A,B,C);
                DreieckList.pushback(d);
            }//end (if rot)
        if((Kind.typ==blau) ^ (i > 0))
            {
                int A = e.KID;
                int B = e.ListKind[i-1];
                int C = Kind.KID;
                int DID = DreieckList.length();
                Dreieck d = new Dreieck;
                d = (DID,A,B,C);
                DreieckList.pushback(d);
            }//end (if blau)
        // Für den zweiten roten Knoten ist der zweite Geschwister-Knoten von e zu-
ständig!    }//end(for Kinder in Liste) //end:doUpdateTriangles

```

Anhang B.

Großhyperbel und Großkreis

Dieser Abschnitt des Anhangs soll zeigen, wie ähnlich die sphärische Gerade, das ist der Großkreis, und die Gerade im MINKOWSKI-Modell, das ist die Großhyperbel, formal parametrisiert werden können.

In Definition 3.11 (siehe Seite 24) haben wir kennengelernt, dass der Großkreis der Schnitt einer Kugel mit einer EUKLIDischen Ebene, die den Kugelmittelpunkt enthält, ist. In selber Definition als den Großkreisbogen (die Orthodrome) als zugehörige kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten kennengelernt.

In Definition 4.8 (siehe Seite 34) haben wir kennengelernt, dass die Großhyperbel der Schnitt der oberen Schale eines zwei-schaligen Hyperboloiden mit einer EUKLIDischen Ebene, die den Ursprung enthält, ist. In selber Definition als den Großhyperbelbogen als zugehörige kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten kennengelernt.

B.1. Parametrisierungen

B.1.1. Parametrisierung des Großkreises

Definition B.1. (sphärischer Tangentenvektor): Es sei E ein EUKLIDischer zwei-dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 . Und S^2 sei eine Sphäre im \mathbb{R}^3 , der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel liege bei $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiterhin sei $K = S^2 \cap E$ ein Großkreis und $p \in K$ ein Punkt. Dann heißen die Vektoren $u \in E$ mit $\langle p, u \rangle = 0$ *sphärische Tangentenvektoren* an K im Punkt p .

Definition B.2. (Großkreis-Parametrisierung): Sei $K \subset S^2$ ein Großkreis, $p \in K$. Und sei u ein Tangentenvektor an K in p mit $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 1$, dann gilt

$$K = \{x \mid x = c(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot u, 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi\} \quad (\text{B.1})$$

Um den Großkreis von einem Punkt a zu einem Punkt b analytisch zu bestimmen benötigen wir den zugehörigen Tangentenvektor u . Dieser lässt sich mit dem sphärischen Abstand d_S (siehe Seite 30) bestimmen:

Es gelten:

1. $a = c(d_S(a, a)) = \cos(0) \cdot a + \sin(0) \cdot u = a$ (gilt offensichtlich)

$$\begin{aligned}
2. \quad b &= c(d_S(a, b)) = \cos(d_S(a, b)) \cdot a + \sin(d_S(a, b)) \cdot u \\
\Rightarrow u &= \frac{1}{\sin(d_S(a, b))} \cdot b - \frac{\cos(d_S(a, b))}{\sin(d_S(a, b))} \cdot a
\end{aligned}$$

Der Großkreisbogen Kb von a nach b ist somit gänzlich bestimmt als:

$$Kb = \{x \mid x = \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot u, 0 \leq t \leq d_S(A, B)\} \quad (\text{B.2})$$

B.1.2. Parametrisierung der Großhyperbel

Definition B.3. (hyperbolischer Tangentenvektor): Es sei E ein EUKLIDISCHER zwei-dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 . Und H^2 sei die MINKOWSKI-Schale im \mathbb{R}^3 . Weiterhin sei $G = H^2 \cap E$ eine Großhyperbel und $p \in G$ ein Punkt. Dann heißen die Vektoren $u \in E$ mit $\langle\langle p, u \rangle\rangle = 0$ *hyperbolische Tangentenvektoren* an G im Punkt p .

Definition B.4. (Großhyperbel-Parametrisierung): Sei $G \subset H^2$ eine Großhyperbel, $p \in G$. Und sei u ein Tangentenvektor an G in p mit $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 1$, dann gilt

$$G = \{x \mid x = c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot u, t \in \mathbb{R}\} \quad (\text{B.3})$$

Um die Großhyperbel von einem Punkt a zu einem Punkt b analytisch zu bestimmen benötigen wir den zugehörigen Tangentenvektor u . Dieser lässt sich mit dem hyperbolischen Abstand d_H (siehe Seite 35) bestimmen:

Es gelten:

$$\begin{aligned}
1. \quad a &= c(d_H(a, a)) = \cosh(0) \cdot a + \sinh(0) \cdot u = a \quad (\text{gilt offensichtlich}) \\
2. \quad b &= c(d_H(a, b)) = \cosh(d_H(a, b)) \cdot a + \sinh(d_H(a, b)) \cdot u \\
\Rightarrow u &= \frac{1}{\sinh(d_H(a, b))} \cdot b - \frac{\cosh(d_H(a, b))}{\sinh(d_H(a, b))} \cdot a
\end{aligned}$$

Der Großhyperbelbogen Gb von a nach b ist somit gänzlich bestimmt als:

$$Gb = \{x \mid x = \cosh(t) \cdot a + \sinh(t) \cdot u, 0 \leq t \leq d_H(A, B)\} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Winkelbestimmung

Nicht nur die Parametrisierungen des Großkreises und der Großhyperbel sehen ähnlich aus sondern auch das Verfahren zur analytischen Winkelbestimmung in der sphärischen Ebene und im MINKOWSKI Modell der hyperbolischen Ebene besitzt Ähnlichkeiten.

B.2.1. Sphärischer Winkel

Definition B.5. (Sphärische Winkelbestimmung): Sei die Mantelfläche der Einheitskugel die Sphäre S^2 .

Sei $Kb_1 = \{x \mid x = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot u \text{ mit } 0 \leq t \leq L_1 \in \mathbb{R}\} \in S^2$ ein Großkreisbogen der Länge L_1 und $Kb_2 = \{x \mid x = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot v \text{ mit } 0 \leq t \leq L_2 \in \mathbb{R}\} \in S^2$ ein Großkreisbogen der Länge L_2 . Kb_1 und Kb_2 gehen vom Punkt p aus. Die Tangentenvektoren u und v erfüllen die Eigenschaft $\|u\| = 1$ und $\|v\| = 1$. Dann ist die Winkelgröße von Kb_1 und Kb_2 in p definiert als die Winkelgröße der Tangentenvektoren u und v , d.h. die eindeutige Zahl $\sphericalangle(Kb_1; p; Kb_2) \in [0; \pi]$ mit

$$\sphericalangle(Kb_1; p; Kb_2) = \arccos(\langle u, v \rangle) \quad (\text{B.5})$$

B.2.2. Hyperbolischer Winkel im MINKOWSKI-Modell

Definition B.6. (Hyperbolische Winkelbestimmung): Sei die MINKOWSKI-Schale H^2 .

Sei $Gb_1 = \{x \mid x = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot u \text{ mit } 0 \leq t \leq L_1 \in \mathbb{R}\} \in H^2$ ein Großhyperbelbogen der Länge L_1 und $Gb_2 = \{x \mid x = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot v \text{ mit } 0 \leq t \leq L_2 \in \mathbb{R}\} \in H^2$ ein Großhyperbelbogen der Länge L_2 . Gb_1 und Gb_2 gehen vom Punkt p aus. Die Tangentenvektoren u und v erfüllen die Eigenschaft $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 1$ und $\langle\langle v, v \rangle\rangle = 1$. Dann ist die Winkelgröße von Gb_1 und Gb_2 in p definiert als die Winkelgröße der Tangentenvektoren u und v , d.h. die eindeutige Zahl $\sphericalangle(Gb_1; p; Gb_2) \in [0; \pi]$ mit

$$\sphericalangle(Gb_1; p; Gb_2) = \arccos(\langle\langle u, v \rangle\rangle) \quad (\text{B.6})$$

Abbildungsverzeichnis

3.1. Synklastisch gekrümmte Fläche	20
3.2. Antiklastisch gekrümmte Fläche	20
3.3. Sattelfläche	21
3.4. Sphäre S^2	21
3.5. Traktrix und der zugehörige Rotationskörper: Pseudosphäre	22
3.6. Großkreis und Großkreisbogen	25
3.7. Sphärisches Dreieck. Abbildung entnommen aus [Kle1890a]	26
3.8. Hyperbolisches Dreieck. Abbildung entnommen [Wik2007]	27
4.1. einschaliges Hyperboloid, Doppelkegel und zweischaliges Hyperboloid	31
4.2. Hyperboloid-Schale des MINKOWSKI-Modells	32
4.3. Großhyperbel und Großhyperbelbogen	34
4.4. Kegel, zweischaliges Hyperboloid, KLEINSche Scheibe. Abbildung entnommen aus [Kle1928]	44
4.5. Vergleich der Transformationen des MINKOWSKI-Modells in die KLEINSche Scheibe und POINCARÉ Scheibe. Abbildung basiert auf [Ito2006]	48
4.6. Transformation zwischen KLEINScher Scheibe und POINCARÉscher Scheibe. Abbildung entnommen [Mon2001] und [Kle1928]	55
4.7. Transformationen der Scheiben-Modelle in das Modell der oberen Halbebene. Abbildung basiert auf Zeichnungen in [Kle1928]	57
5.1. Prinzip-Skizze: Netzwachstum [3,7]-Parkettierung	83
5.2. Prinzip-Skizzen zum Knotenwachstum hyperbolischer Dreiecksnetze	84
6.1. Transformation mit reziprokem Radius am Einheitskreis in \mathbb{C}	105
6.2. APPOLONIUS: Inversion am Kreis	106
6.3. Inversion an geschnittenen orthogonalen Kreisen	107
6.4. Umkreis eines Dreiecks	108

Literaturverzeichnis

Benutzte Artikel [Kle1871b], [Kle1873], [Kle1874], [Kle1890c] aus Zeitschriften auf www.springerlink.com lassen sich aus dem Universitätsnetz der TU Clausthal ohne persönliche Anmeldung bei *SpringerLink* lesen. Teilweise sind sie ebenfalls wie [Kle1871a] und [Kle1928] öffentlich zugänglich, d.h. es ist keine Anmeldung notwendig, z.B. bei dem Server des *Göttinger Digitalisierungszentrums* <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/de/index.html>

- [Ada2005] ADAMSKI, John: *Shooting Pool in a Non-Euclidean Universe*. Sommer 2005 http://www.cims.nyu.edu/vigrenew/ug_research/JohnAdamski05.pdf
- [AF2003] ABLOWITZ, Mark J. ; FOKAS, Athanassios S.: *Complex Variables - Introduction and Applications*. second edition. Cambridge University Press, 2003 (Cambridge Texts in applied Mathematics). – ISBN 0–521–53429–1 **64, 70**
- [And1999] ANDERSON, James W.: *Hyperbolic Geometry*. Springer London, 1999 (Springer Undergraduate Mathematics Series). – ISBN 1–85233–156–9 **28, 70**
- [ÁT2005] ÁLVAREZ PAVIA, J.C. ; THOMPSON, A.C.: On the Perimeter and Area of the Unit Disc. In: *Amer. Math. Monthly* 112 2 (2005), Nr. 112, S. 141–154. – <http://www.math.poly.edu/~alvarez/pdfs/disc.pdf>
- [Bea1991] BEARDON, Alan F.: An introduction to hyperbolic geometry. In: BEDFORD, T. (Hrsg.) ; KEANE, M. (Hrsg.) ; SERIES, C. (Hrsg.): *Ergodic Theorie, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*. Oxford : Oxford University Press, 1991, Kapitel 1, S. 1–33
- [Bec2003] BECKER, Michael: *Hyperbolische und sphärische Trigonometrie, Einführung*. <http://www.ijon.de/mathe/htrig/node2.html>. Version: Mai 2003. – Zuletzt besucht am 22.2.2008 **39, 68**
- [Bor2006] BORGART: (*Webseite*) *Mathematik-Online-Kurs: Gruppentheorie*. <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs36/seite69.html>. Version: 3.11.2006. – Ein Projekt der Universitäten Stuttgart und Ulm, unterstützt durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg. - Zuletzt besucht am 21.2.2008 **36**

-
- [Bär2006] BÄR, C.: (*Vorlesungsskript:*) *Elementare Geometrie 1 (WS 2005/06)*. 10. Juli 2006 users.math.uni-potsdam.de/~baer/ElemGeo/skript.pdf 30, 35
- [Bär2007] BÄR, C.: (*Vorlesungsskript:*) *Elementare Geometrie 2 (SS 2007)*. 4. September 2007 users.math.uni-potsdam.de/~baer/ElemGeo2/skript2.pdf 35
- [CFKP1997] CANNON, James W. ; FLOYD, William J. ; KENYON, Richard ; PARRY, Walter R.: *Hyperbolic Geometry*. In: LEVY, Silvio (Hrsg.): *Flavors of Geometry* Bd. 31. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. – ISBN 0-521-62048-1 (Gebunden), 0-521-62962-4 (Taschenbuch)), S. 59–115. – <http://www.msri.org/publications/books/Book31/files/cannon.pdf> 14, 29, 58
- [Dei2007] DEISER, Oliver: *Reelle Zahlen, Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*. VI. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2007 (Springer-Lehrbuch). – 541 S. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-45388-8>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-45388-8>. – ISBN 978-3-540-45387-1 (Print), 978-3-540-45388-8 (Online). – Softcover 30
- [Dud1982] DUDEN ; Fachredaktion des Bibliographischen Institutes (Hrsg.): *Schüler Duden – Die Mathematik II*. 2., völlig neu bearb. u. erw. Auflage – Bearbeitet von HARALD SCHEID unter Mitarbeit von ROLF BALDY, WOLFGANG SPIEGEL und LUTZ WARLICH. Mannheim, Wien, Zürich : Dudenverlag, 1982 19
- [FK2006] FISCHER, Helmut ; KAUL, Helmut: *Mathematik für Physiker Band 3: Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Mathematische Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*. Bd. 3. 2., überarbeitete Ausgabe. Teubner, 2006. – 416 S. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8351-9000-9>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8351-9000-9>. – ISBN 978-3-8351-0031-2 (Print), 978-3-8351-9000-9 (Online) 33
- [Gol2004] GOLDMAN, Bill: *THE POINCARÉ UPPER HALF PLAN*. 24. September 2004. – <http://egl.math.umd.edu/documents/poincare.pdf>
- [Har2007] HARTMANN, Robert: *Lösen von (linearen) Rekursionsgleichungen*. 27.02 2007 http://www.tu-clausthal.de/~ifrh/inf1-ws2006-07_zusatzmaterial-rekursionsgleichungen.pdf 86
- [Hat2002] HATCH, Don: *Hyperbolic Planar Tessellations*. Version: April 2002. <http://www.plunk.org/~hatch/HyperbolicTesselations/> Zuletzt besucht am 15.3.2008 64
- [Hau1995] HAUSMANN, Barbara: *Anschauliche Geometrie: Computergestützte Visualisierung geometrischer Strukturen*. Erlangen, Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, Doktorarbeit, 1995 54, 58, 65, 66
-

-
- [Ito2006] ITO, Tadao: (*Webseite:*) *Hyperbolic Non-Euclidean World - Disks and Hyperboloid*. http://www1.kcn.ne.jp/~iitto/us3_poinc.htm. Version: 2006. – Zuletzt besucht August 2007 48, 128
- [Joy1998] JOYCE, David E.: *Hyperbolic Tessellations*. Version: April Dezember 1998. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html#tess_5_4 Zuletzt besucht am 15.3.2008 65
- [Kat2000] KATZ, Uli F.: (*Vorlesungsskript:*) *Rechenmethoden - Ergänzungsvorlesung zur Physik II, SS 2000*. 18.08. 2000 <http://www.pi1.physik.uni-erlangen.de/~katz/ss00/script/script.pdf>, <http://www.pi1.physik.uni-erlangen.de/~katz/ss00/>
- [KF1897] KLEIN, Felix ; FRICKE, Robert: (*Monographie:*) *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Bd. I - Die gruppentheoretischen Grundlagen. Leipzig : B.G.Teubner, 1897. – <http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=05290001&seq=7> 68
- [KF1912] KLEIN, Felix ; FRICKE, Robert: (*Monographie:*) *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Bd. II - Die functionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. Leipzig und Berlin : B.G.Teubner, 1912. – <http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=05350001&seq=5> 68
- [Kis2006] KISSLING, Harald: (*Ausarbeitung zum Vortrag:*) *Die Poincarégruppe in der relativistischen Quantenmechanik - Hauptseminar Gruppen in der Physik*. Universität Stuttgart, 11. Juli 2006 www.itap.physik.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/gtsem/HSGruppen_Kissling.pdf
- [Kle1871a] KLEIN, Felix: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1871), 30. August 1871, Nr. 17, S. 419 – 434. – <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D53655> 11, 129
- [Kle1871b] KLEIN, Felix: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. In: *Mathematische Annalen* Volume 4 (1871), Dezember, Nr. 4, S. 573–625. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02100583>. – DOI 10.1007/BF02100583. – ISSN 0025–5831 (Print) 1432–1807 (Online) 11, 129
- [Kle1873] KLEIN, Felix: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie - zweiter Aufsatz. In: *Mathematische Annalen* Volume 6 (1873), Juni, Nr. 2, S. 112–145. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01443189>. – DOI 10.1007/BF01443189. – ISSN 0025–5831 (Print) 1432–1807 (Online) 11, 129
- [Kle1874] KLEIN, Felix: Nachtrag zu dem „zweiten Aufsätze über Nicht-Euklidische Geometrie“ (diese Annalen Bd. VI., S. 112ff.). In: *Mathematische Annalen*
-

-
- Volume 7 (1874), Dezember, Nr. 4, S. 531–537. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02104922>. – DOI 10.1007/BF02104922. – ISSN 0025–5831 (Print) 1432–1807 (Online) 11, 129
- [Kle1890a] KLEIN, Felix: (*Autographie der Vorlesung:*) *Nicht-Euklidische Geometrie, Teil 1 (WS 1889/1890)*. 1890 <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN516972847> 26, 128
- [Kle1890b] KLEIN, Felix: (*Autographie der Vorlesung:*) *Nicht-Euklidische Geometrie, Teil 2 (SS 1890)*. 1890 <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN516972847>
- [Kle1890c] KLEIN, Felix: Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. In: *Mathematische Annalen* Volume 37 (1890), Dezember, Nr. 4, S. 544–572. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01724772>. – DOI 10.1007/BF01724772. – ISSN 0025–5831 (Print) 1432–1807 (Online) 11, 15, 24, 129
- [Kle1926] KLEIN, Felix ; BLASCHKE, W. (Hrsg.): *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Bd. XXII: (*Monographie:*) *Vorlesungen über höhere Geometrie*. dritte Auflage. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1926. – <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D236424> 105
- [Kle1928] KLEIN, Felix ; COURANT, R. (Hrsg.): *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Bd. XXVI: (*Monographie:*) *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*. Nachdruck bearbeitet von Walther ROSEMANN 1968. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1928. – <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D286471> 11, 44, 55, 57, 110, 128, 129
- [Lam1992] LAMPINEN, Jouko: On Clustering Properties of Hierarchical Self-Organizing Maps. In: ALEKSANDER, Igor (Hrsg.) ; TAYLOR, John (Hrsg.): *Artificial Neural Networks*, 2 Bd. II. Amsterdam, Netherlands : North-Holland, 1992. – ISBN 0444894888, S. 1219–1222. – http://www.lce.hut.fi/publications/ps/Lampinen_ICANN-92.ps
- [Lin2007] LINHART, Johann: (*Vorlesungsskript:*) *Geometrie, SS 2007*. 18. Juni 2007 <http://www.mat.sbg.ac.at/staff/linhart/geom.pdf> 14
- [LRP1995] LAMPING, John ; RAO, Ramana ; PIROLI, Peter: A Focus+Context Technique Based on Hyperbolic Geometry for Visualizing Large Hierarchies. In: *Proc. ACM Conf. Human Factors in Computing Systems, CHI*, ACM, 1995, S. 401–408. – <http://www.ramanarao.com/papers/startree-chi95.pdf>
- [MK2008] MODES, Carl D. ; KAMIEN, Randall D.: *Hard Discs on the Hyperbolic Plane*. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0708/0708.4334v3.pdf. Version: 1. Februar 2008
-

-
- [Moh1930] MOHRMANN, Hans: *Einführung in die nicht-euklidische Geometrie*. 1. Auflage. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1930 9, 14
- [Mon2001] MONTGOMERY, Jennifer: (*Webseite:*) *A Triangle in the Hyperbolic Plane*. <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/montgomery/index.html>. Version: 2001. – Zuletzt besucht am 4. Juni 2008 55, 128
- [Nee2001] NEEDHAM, Tristan: Möbiustransformationen und Inversion. In: *Anschauliche Funktionentheorie*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2001. – ISBN 978-3-486-24578-3, Kapitel 3, S. 141 – 157. – Übersetzt von Norbert Herrmann und Ina Paschen – http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de/fm/694/3-486-24578_p.pdf 69, 104, 105
- [Ont2005] ONTRUP, Jörg: (*Vortragsfolien:*) *Envisioning Text - Learning Semantic Maps in Hyperbolic Space*. International Conference on Intelligent Information Systems, Gdańsk, 2005 <http://www.techfak.uni-bielefeld.de/ags/ni/publications/media/Ontrup2005-ETL.pdf>
- [OR2002] ONTRUP, Jörg ; RITTER, Helge: Hyperbolic Self-Organizing Maps for Semantic Navigation. In: DIETRICH, Thomas (Hrsg.) ; BECKER, Suzanna (Hrsg.) ; GHAHRAMANI, Zoubin (Hrsg.): *Advances in Neural Information Processing Systems 14: Proceedings of the 2001 Neural Information Processing Systems (NIPS) Conference (2 Volume Set) (Hardcover)* Bd. 14. Cambridge, MA : The MIT Press, September 2002. – ISBN 0262042088, S. 1417–1424. – <http://darkstar.spinfo.uni-koeln.de/forschung/papers/hyperbolic-self-organizing-maps.pdf>
- [PS2004] PERSSON, Per-Olof ; STRANG, Gilbert: A Simple Mesh Generator in MATLAB. In: *SIAM Review* 46 (2004), Juni, Nr. 2, 329-345. <http://www-math.mit.edu/~persson/mesh/persson04mesh.pdf>
- [RG] RICHTER-GEBERT, Jürgen: (*Vorlesungsskript:*) *Projective Geometrie - Vorlesung 6: Komplexe Zahlen und Geometrie* <http://www-m10.ma.tum.de/~richter/Vorlesungen/ProjectiveGeometrie/Kapitel/S6.pdf> 111
- [Rit1999] RITTER, Helge: Self-Organizing Maps on non-euclidean Spaces. In: OJA, Erkki (Hrsg.) ; KASKI, Samuel (Hrsg.): *Kohonen Maps*. Amsterdam : Elsevier, 1999. – ISBN 044450270X, S. 97–108. – <http://www.techfak.uni-bielefeld.de/techfak/ags/ni/publications/papers/Ritter1999-SOM.ps.gz> 4, 41, 67
- [Rob1996] ROBLES, Colleen: *The HYPERBOLIC GEOMETRY Exhibit*. <http://www.geom.uiuc.edu/~crobles/hyperbolic/>. Version: 15.Jul.1996. – Zuletzt besucht am 10.3.2008 60
-

-
- [Sch2005] SCHINDLER, Mirco: (*Vortragsfolien:*) *Kohonenetze – Self-Organizing Maps*. Clausthal, 2005 http://www2.in.tu-clausthal.de/~hammer/lectures/seminar_ml/Kohonen-Netze.pdf
- [Sch2007] SCHINDLER, Mirco: (*Vortragsfolien:*) *Hyperbolic Self-Organizing Map (HSOM)*. Clausthal, 2007 http://www2.in.tu-clausthal.de/~hammer/lectures/som_sem/Schindler.pdf
- [Val2004] VALENCIA, William: *TILING THE HYPERBOLIC PLANE BY TRIANGLES*. 13. Mai 2004. – <http://egl.math.umd.edu/software/tess/hyper.ps>
- [Wal2002] WALTER, Jörg A.: *On Interactive Visualization of High-dimensional Data using the Hyperbolic Plane*. 2002. – <http://www.cs.tau.ac.il/~asharf/shrek/courses/workshop06b/InteractiveVisu.pdf>
- [Wal2004] WALTER, Jörg A.: H-MDS: A new approach for Interactive Visualization with Multidimensional Scaling in the Hyperbolic Space. In: *Information Systems, Elsevier* 29 (2004), Nr. 4, S. 274–292. – <http://www.techfak.uni-bielefeld.de/~walter/pub/Walter03-infosys-submit.ps.gz>
- [Wen2006] WENDLAND, Dr. H.: (*Skript zum Seminar:*) *Hyperbolische Geometrie, SS 2006*. 14. Juni 2006 <http://users.math.uni-potsdam.de/~wendland/Lehre/Hyperbolischerie/skriptsem.pdf> 27, 28, 35
- [Wik2007] WIKIMEDIA.ORG: *Hyperbolic Triangle*. http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Hyperbolic_triangle.svg. Version:01 2007. – Zuletzt besucht am 4.6.2008 27, 128
- [WOWR2003] WALTER, Jörg ; ONTRUP, Jörg ; WESSLING, Daniel ; RITTER, Helge: *Interactive Visualization and Navigation in Large Data Collections Using the Hyperbolic Space*. 2003. – <http://www.techfak.uni-bielefeld.de/~walter/pub/WalterOntrupWesslingRitter03-icdm.pdf>
- [WR2002] WALTER, Jörg A. ; RITTER, Helge: On Interactive Visualization of High-dimensional Data using the Hyperbolic Plane. In: *Proceedings of the 8th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Edmonton, Alberta, Canada : ACM New York, NY, USA, July 23-26 2002. – ISBN 1-58113-567-X, S. 123 – 132. – <http://www.techfak.uni-bielefeld.de/~walter/pub/Walter-kdd02.ps.gz>
- [Wäs2002] WÄSCH, Dominic: *Markov-Abbildungen in der hyperbolischen Geometrie*. Clausthal-Zellerfeld, Gemeinsame Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der TU Clausthal, Diplomarbeit, 2002 28, 58, 65, 69
- [Zei1970] ZEITLER, Herbert: *Beiträge für den mathematischen Unterricht*. Bd. 3: *Hyperbolische Geometrie*. 1. Auflage. München : Bayerischer Schulbuch-Verlag, 1970 7, 8
-

Stichwortverzeichnis

- äquiforme Figuren, 13
- EUKLIDische Bewegung, 41
- EUKLIDischer Abstand, 30
- KLEINSche Scheibe D_{KI} , 46
 - Metrik d_{KI} , 47
- LORENTZ-Gruppe, 36
 - eigentliche LORENTZ-Gruppe, 36
 - eigentliche orthochrone LORENTZ-Gruppe, 36
- LORENTZ-Transformation, 35
 - LORENTZ-Boost, 37
 - LORENTZ-Drehung, 36
- MÖBIUS-Transformation, 67
 - Drehstreckung, 68
 - Gruppe der MÖBIUS-Transformationen, 68
 - Inversion, 68, 104
 - Verschiebung, 68
- MINKOWSKI-Modell, 32
 - Metrik d_H , 35
- MINKOWSKI-Produkt, 32
- POINCARÉsche Scheibe D_P
 - Metrik d_P , 54
- POINCARÉsche Scheibe D_P , 53
- POINCARÉ-Gruppe, 38
- RIEMANNsche Zahlenkugel, 58
- Abbildung
 - KLEINSche Scheibe \rightarrow MINKOWSKI-Modell, 46
 - MINKOWSKI-Modell \rightarrow KLEINSche Scheibe, 46
 - MINKOWSKI-Modell \rightarrow POINCARÉsche Scheibe, 53
 - MINKOWSKI-Modell \rightarrow Obere Halbebene, 55
 - POINCARÉsche Scheibe \rightarrow MINKOWSKI-Modell, 53
 - Obere Halbebene \rightarrow MINKOWSKI-Modell, 55
- ABC-Problematik, 8
- Algorithmus: bowto, 113
- Algorithmus: ComplextoPunkt2D, 112
- Algorithmus: doKinderLayout, 95
- Algorithmus: doUpdateTriangles, 95
- Algorithmus: DreiecksUmkreis, 113
- Algorithmus: Erstelle_ersten_Dreiecksring, 82
- Algorithmus: Erstelle_Startdreieck, 80
- Algorithmus: InvertierePunktAmKreis, 112
- Algorithmus: konjugiere, 112
- Algorithmus: lineto, 112
- Algorithmus: Netzgenerator, 93
- Algorithmus: Netznavigator, 101
- Algorithmus: poincDreieck, 114
- Algorithmus: poincStrecke, 113
- Algorithmus: Punkt2DtoComplex, 112
- Axiom
 - EUKLIDisches Parallelenaxiom, 9
 - HILBERTSches Parallelenaxiom, 9
 - Autonomes Axiomensystem, 8
 - Axiom der Ähnlichkeit, 13
 - Axiom der Vollständigkeit, 14
 - Axiome der Kongruenz, 12
 - Axiome der projektiven Geometrie, 10
 - Heteronomes Axiomensystem, 8
- Benachbarte Dreiecke, 71
- Bewegungsgruppe
 - EUKLIDische Bewegungsgruppe, 41
 - Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene im MINKOWSKI-Modell, 40

-
- Defekt des hyperbolischen Dreiecks, 27
 - Definition
 - Ähnlichkeitstransformation, 13
 - Doppelkegel, 31
 - Doppelverhältnis, 109, 111
 - Dreieck, 11
 - Bewegung, 13
 - gefülltes Dreieck, 11
 - Inneres, 11
 - offene Dreiecksfläche, 11
 - Rand, 11
 - Seite, 11
 - Umkreis, 107
 - Winkelbezeichnung, 12
 - Dreiecksgruppe, 63
 - E-Fläche, 11
 - Eigenschaft der Form, 13
 - Eigenschaft der Lage, 13
 - Fläche, 18
 - GAUSSSches Krümmungsmaß, 19
 - Hauptkrümmung, 19
 - Normalkrümmung, 19
 - Sattelfläche, 20
 - Flächeninhalt
 - EUKLIDisches Dreieck, 25
 - hyperbolisches Dreieck, 28
 - sphärisches Dreieck, 27
 - g-Linie, 10
 - Gerade, 14
 - Geometrie
 - EUKLIDische Geometrie, 23
 - RIEMANNSche Geometrie, 23
 - RIEMANNScher Raum, 23
 - absolute Geometrie, 9
 - elliptische Geometrie, 23
 - hyperbolische Geometrie, 23
 - parabolische Geometrie, 23
 - parabolischer Raum, 23
 - projektive Geometrie, 9
 - sphärische Geometrie, 23
 - Großhyperbel, 34
 - Parametrisierung, 126
 - Großhyperbelbogen, 34
 - Großkreis, 24
 - Parametrisierung, 125
 - Großkreisbogen, 24
 - Gruppen-Wirkung, 69
 - HSOM, 81
 - hyperbolischer Abstand, 35
 - hyperbolischer Tangentenvektor, 126
 - Hyperboloid, 31
 - Inversion
 - geometrische Inversion, 104
 - Inversion am Einheitskreis, 104
 - Inversion am Kreis, 104
 - komplexe Inversion, 68, 104
 - Isometrie, 30
 - kausal, 33
 - komplexe Ebene, 109
 - komplexe projektive Gerade, 109
 - Komplexe Zahlen, 67
 - Kongruenz
 - von Figuren, 13
 - Kosinussatz
 - EUKLIDisch , 26
 - Seiten-Kosinussatz
 - hyperbolisch, 28
 - sphärisch, 27
 - Winkel-Kosinussatz
 - hyperbolisch, 28
 - sphärisch, 27
 - Krümmung
 - antiklastisch, 19
 - Krümmung einer Kurve, 18
 - Krümmungskreis, 18
 - Krümmungsradius, 18
 - synklastisch, 19
 - Kreis, 13
 - Rand, 13
 - Berührungspunkt, 104
 - Berührungsradius, 104
 - Einheitskreis, 42
 - gefüllter Kreis, 13
 - Inneres eines Kreises, 13
 - Mittelpunkt, 13
 - Normale, 104
-

-
- offene Sehne, 13
 - orthogonale Kreise, 104
 - Radius, 13
 - Schnittwinkel, 104
 - Sehne, 13
 - Tangente, 104
 - Kreisscheibe, 21
 - Kurve, 18
 - ebene Kurve, 18
 - Raum-Kurve, 18
 - lichtartig, 33
 - Matrizen geometrischer Operationen auf H^2 , 40
 - Metrik, 30
 - metrische Eigenschaft, 13
 - metrischer Raum, 30
 - Obere Halbebene OHE , 55
 - Metrik d_{OHE} , 57
 - Orthodrome, 24
 - Pseudocode: doKinderLayout, 122
 - Pseudocode: doUpdateTriangles, 123
 - Pseudocode: Netzgenerator, 117
 - Pseudosphäre, 21
 - Punkt, 10
 - idealer Punkt, 43
 - ultraidealer Punkt, 43
 - Raum, 12
 - raumartig, 33
 - Rotations-Matrizen des \mathbb{R}^3 , 36
 - Schenkel, 12
 - Sinussatz
 - EUKLIDisch , 26
 - hyperbolisch, 28
 - sphärisch, 27
 - spezielle projektive unitäre Gruppe, 68
 - Sphäre, 21
 - sphärischer Exzess, 27
 - sphärischer Abstand, 30
 - sphärischer Tangentenvektor, 125
 - Strahl, 12
 - Halbgerade, 12
 - Richtung, 12
 - Strecke, 10
 - größer, 12
 - kleiner, 12
 - Traktrix, 21
 - Vektorrechnung
 - Betrag, 17
 - Kreuzprodukt, 17
 - Skalarprodukt, 17
 - Signatur, 17
 - Vollkugel, 21
 - Winkel, 12
 - Winkelbestimmung
 - hyperbolische Winkelbestimmung, 127
 - sphärische Winkelbestimmung, 127
 - zeitartig, 33
-