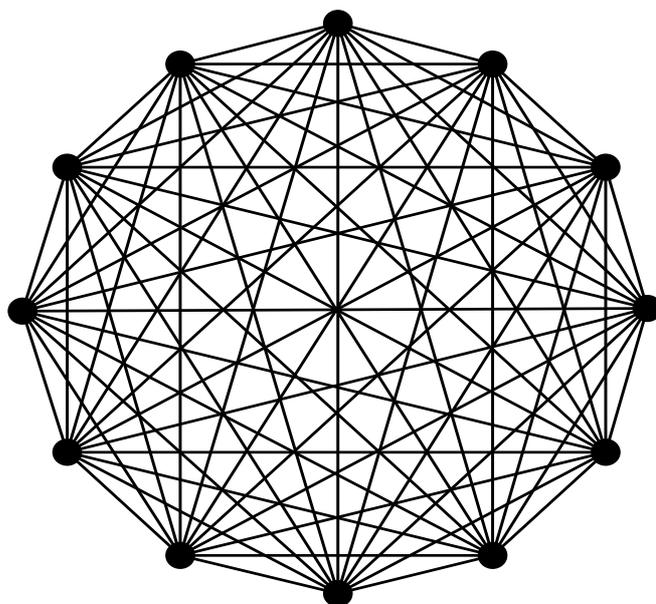


Vorlesungsmitschrift

# Graphentheorie II

aus dem Sommersemester 2004  
BEI PROF. DR. W. KLOTZ



gesetzt in  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  von

Ansgar Lampe

**Stand: 23. August 2004**

unkorrigiert



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Korrespondenzen (Matchings)</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Matching Algorithmen</b>	<b>11</b>
2.1	Ungarischer Algorithmus (1956) . . . . .	13
2.2	Der Blüten-Algorithmus von EDMONDS, 1965 . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Planarität</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Eckenfärbungen</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Abschätzungen für <math>\chi(G)</math></b>	<b>49</b>
5.1	Das Färbungsproblem auf Flächen höheren Geschlechts . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Kantenfärbungen</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>Isomorphie von Graphen</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>stark reguläre Graphen</b>	<b>81</b>
<b>9</b>	<b>Perfekte Graphen</b>	<b>95</b>
<b>10</b>	<b>Diverse (offene) Probleme</b>	<b>113</b>
10.1	Das chromatische Polynom . . . . .	113
10.2	Unit-distance-graph-problem (UDGP) . . . . .	114
10.3	Rekonstruktionsproblem . . . . .	115



# Kapitel 1

## Korrespondenzen (Matchings)

**Definition** (Korrespondenz, perfekte Korrespondenz):

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

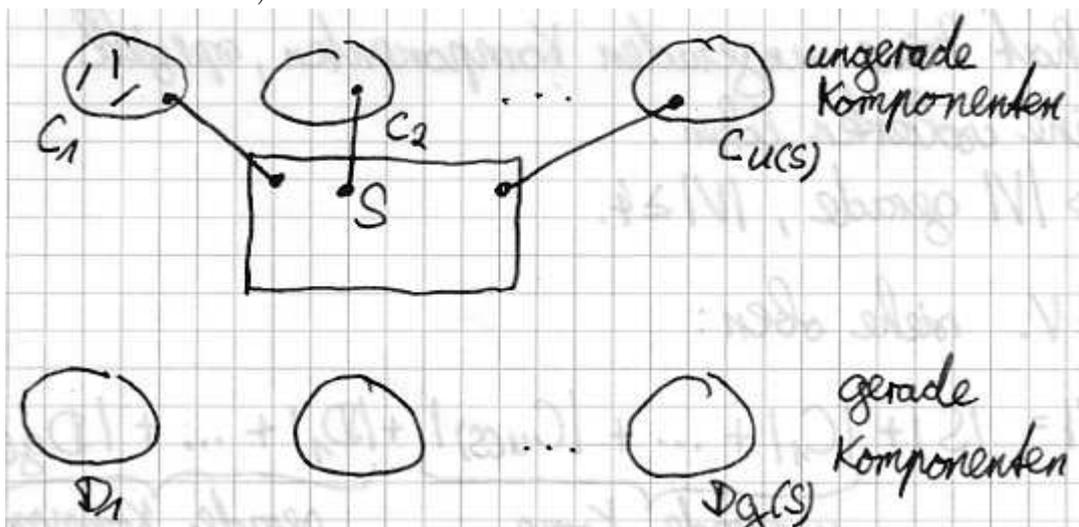
Eine **Korrespondenz** ist eine Menge disjunkter Kanten. Eine Korrespondenz  $K$  heißt **perfekt**, wenn  $K$  alle Ecken von  $G$  überdeckt. Eine perfekte Korrespondenz stellt einen 1-Faktor von  $G$  dar, d.h. einen Untergraph mit Eckenmenge  $V$ , der regulär vom Grad 1 ist.

Wann hat  $G$  eine perfekte Korrespondenz?

Es sei  $K$  eine perfekte Korrespondenz von  $G \Rightarrow |V|$  gerade.

$S \subseteq V$ . Entferne aus  $G$  die Ecken  $S$ . Der entstehende Graph ist  $G - S$ .

$u(S)$  = Anzahl der ungeraden Komponenten (also Komponenten mit ungerader Eckenanzahl) von  $G - S$



Von jeder ungeraden Komponente führt mindestens eine Kante  $\in K$  in die Menge  $S$ . Kanten  $\in K$  sind disjunkt (d.h. sie haben keine Ecke gemeinsam).

$\Rightarrow u(S) \leq |S|$  für alle  $S \subseteq V$ .

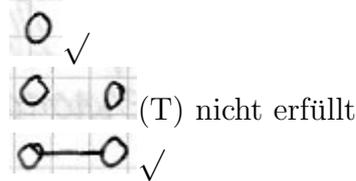
**Satz 1.1** (TUTTE, 1947): Genau dann hat  $G$  eine perfekte Korrespondenz, wenn

$$(T) \quad u(S) \leq |S| \text{ für alle } S \subseteq V.$$

gilt. (T) heißt TUTTESche Bedingung.

**Beweis :** (T) ist notwendig.  $\checkmark$  (siehe oben)

Es gelte (T). Zu zeigen:  $G = (V, E)$  hat perfekte Korrespondenz.  
Induktion über  $|V| = 1, 2$ :



Induktionsannahme: Behauptung richtig für alle Graphen mit  $< |V|$  Ecken,  $|V| \geq 3$ . Es gelte (T) für  $G = (V, E)$ .

$S = \emptyset$ ,  $u(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ ,  $u(\emptyset) = 0$ .  $G$  hat keine ungeraden Komponenten, speziell keine isolierten Ecken.  $\Rightarrow |V|$  gerade,  $|V| \geq 4$ .

$S \subseteq V$ . Siehe Abbildung oben:

$$|V| = |S| + \underbrace{|C_1| + \dots + |C_{u(S)}|}_{\text{ungerade Komponenten}} + \underbrace{|D_1| + \dots + |D_{g(S)}|}_{\text{gerade Komponenten}}$$

Liest man nun die Gleichung modulo 2, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv |S| + u(S) \pmod{2} \\ \Rightarrow (*) \quad u(S) &\equiv |S| \pmod{2} \end{aligned}$$

Man beachte, dass bei der Herleitung von (\*) nur benutzt wurde, dass  $|V|$  gerade ist, nicht aber (T).

$|V|$  gerade. Es sei  $|S| = 1$ , (T):  $u(S) \leq 1$ . Andererseits folgt aus  $|v|$  gerade  $u(S) \geq 1$  und damit gilt  $u(S) = |S| = 1$ . Man wähle nun  $S$  maximal, so dass  $u(S) = |S|$  (Anmerkung: Dieser Schritt ist nicht konstruktiv).

**Annahme :**  $G - S$  hat eine gerade Komponente  $D$ .

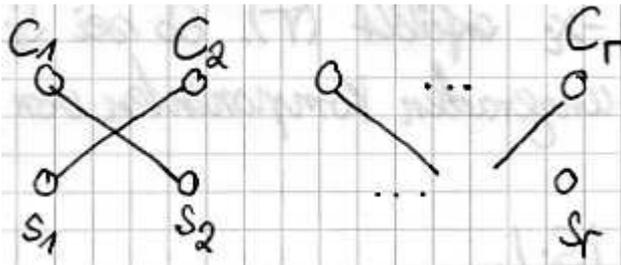
Sei  $x \in D$ , so ist  $u(\underbrace{S \cup \{x\}}_{:=R}) \geq u(S) + 1 = |S| + 1 = |R|$ .

Es muss (T) für  $R$  gelten:  $u(R) \leq |R|$ , also  $u(R) = |R|$  im Widerspruch zur Maximalität von  $S$ .

Also hat  $G - S$  nur ungerade Komponenten  $C_1, \dots, C_r$ ,  $r = u(S)$ .

$$u(S) = |S| = r, S = \{s_1, \dots, s_r\}$$

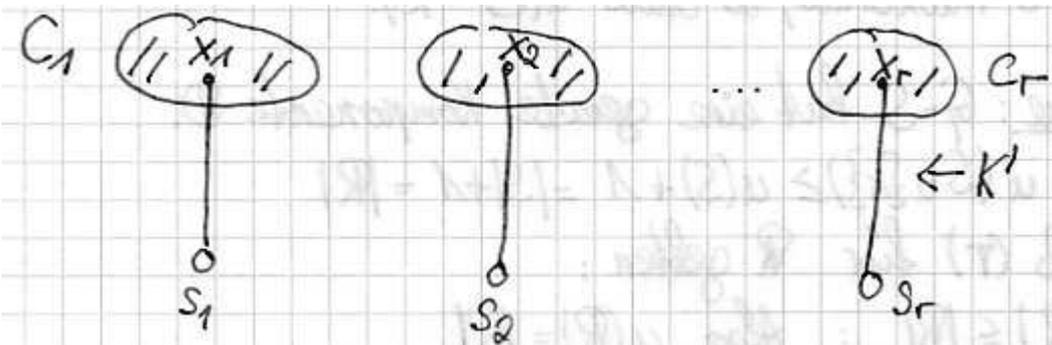
Bilde den folgenden bipartiten Graphen  $H$ : Ziehe die  $C_i s_j$ , wenn aus  $C_i$  eine Kante nach  $s_j$  führt.



**Wir zeigen:**  $H$  hat eine perfekte Korrespondenz (mit dem Heiratssatz von P. Hall).

**Annahme:** Es gibt  $C_{i_1}, \dots, C_{i_k}$  mit Nachbarn  $s_{j_1}, \dots, s_{j_l}$  in  $H$  mit  $l < k$ .

$u(\{s_{j_1}, \dots, s_{j_l}\}) \geq k > l = |\{s_{j_1}, \dots, s_{j_l}\}|$  im Widerspruch zu (T). Also hat  $H$  nach Heiratssatz eine perfekte Korrespondenz  $K'$ .  $K'$  kann auch als Korrespondenz von  $G$  aufgefasst werden. Bei geeigneter Nummerierung gilt:



**Wir zeigen:**  $C_i - x_i = (V_i, E_i)$  erfüllen (T).

Nach Induktions-Annahme hat  $C_i - x_i$  eine perfekte Korrespondenz  $K_i$ .

Dann ist  $K = K' \cup K_1 \dots \cup K_r$  perfekte Korrespondenz von  $G$ .

Bleibt zu zeigen:  $C_i - x_i$  erfüllt (T).

Es sei  $S_i \subseteq V_i$ .

$u'(S_i) =$  Anzahl der ungeraden Komponenten von  $(C_i - x_i) - S_i$ .

**Annahme:**  $u'(S_i) > |S_i|$ .

Eckenanzahl von  $C_i - x_i$  ist gerade. Es gilt

$$(*) \quad u'(S_i) \equiv |S_i| \pmod{2}$$

Dann folgt sogar:  $u'(S_i) \geq |S_i| + 2$ .

$$u(\underbrace{S \cup \{x_i\} \cup S_i}_{=: R}) = \underbrace{u(S)}_{|S|} - 1 + \underbrace{u'(S_i)}_{\geq |S_i| + 2} \geq \underbrace{|S| + 1 + |S_i|}_{|R|} \text{ und wegen (T)}$$

$u(R) \leq |R|$ , also  $u(R) = |R|$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $S$ .

□

**Problem :** Gibt es eine gute algorithmische Umsetzung dieses Beweises?

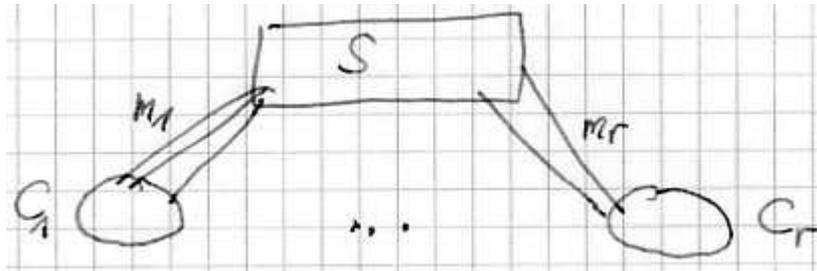
**Folgerung** (Satz von PETERSEN, 1897): Es sei  $G$  regulär vom Grad 3,  $G$  habe keine Brücken. Dann hat  $G$  eine perfekte Korrespondenz.

**Beweis :** Wir zeigen:  $G$  erfüllt (T).

Sei  $S \subseteq V$ .

**Zu zeigen:**  $u(S) = r \leq |S|$ .

Die ungeraden Komponenten von  $G - S$  seien  $C_1, \dots, C_r$ ,  $C_i = (V_i, E_i)$ .



Dann gilt:  $\sum_{x \in C_i} \gamma(x) = 2|E_i| + m_i$ . Andererseits ist aber  $G$  regulär vom Grad 3 und damit  $\sum_{x \in C_i} \gamma(x) = 3|V_i|$  ungerade, woraus folgt, dass  $m_i$  ungerade sein muss.

Es ist  $m_i \neq 1$ , da nach Voraussetzung keine Brücken existieren, also  $m_i \geq 3$ , da  $m_i$  ungerade. Damit folgt

$$3r \leq \sum_{i=1}^r m_i \leq \sum_{x \in S} \gamma(x) = 3|S|$$

$\Rightarrow r = u(S) \leq |S|$  und damit folgt die Behauptung aus Satz 1.1.

□

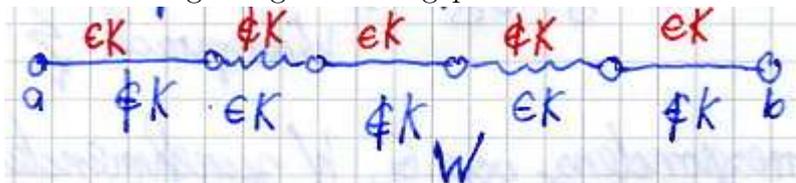
Nach wie vor haben wir das Problem, eine maximale Korrespondenz in einem ungerichteten Graphen zu finden, nicht gelöst. Dies wird auch erst in Kapitel 2 geschehen. Vorbereitend werden nun aber einige Sätze gezeigt, mit deren Hilfe sich ein Algorithmus finden läßt.. Zunächst jedoch einige Definitionen.

**Definition** (exponierte Ecke, alternierender Weg, zunehmender Weg, symmetrische Differenz):

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph,  $K$  eine Korrespondenz von  $G$ .

- $x \in V$  heißt **exponierte Ecke** bzgl.  $K$ , wenn  $x$  mit keiner Kante  $\in K$  inzidiert.
- Ein **alternierender Weg** ist ein Weg, der abwechselnd Kanten  $\in K$  und Kanten  $\notin K$  hat.
- Ein **zunehmender Weg** bzgl.  $K$  ist ein alternierender Weg mit exponierten Ecken.
- Die **symmetrische Differenz** ist  $K \oplus W := (K \cup W) - (K \cap W)$ , d.h. es werden genau die Kanten aus einer Menge  $W$  hinzugenommen, die vorher nicht in  $K$  waren, und die gestrichen, die vorher schon drin waren.

**Bemerkung** : Ist  $K$  eine Korrespondenz in  $G = (V, E)$  und  $W$  ein zunehmender Weg bzgl.  $K$ . Dann läßt sich  $K$  längs  $W$  vergrößern zu  $K'$ , indem die Kantenzugehörigkeiten umgepolt werden.



Dieser Vorgang wird durch die symmetrische Differenz beschrieben:  $K' = K \oplus W$ .  $K'$  ist Korrespondenz von  $G$  mit  $|K'| = |K| + 1$ .

**Satz 1.2** (BERGE, 1957): Die Korrespondenz  $K$  von  $G$  ist genau dann maximal, wenn es bzgl.  $K$  keinen zunehmenden Weg gibt.

**Beweis** : In der Bemerkung wurde bereits gezeigt: Wenn ein zunehmender Weg existiert, dann ist  $K$  nicht maximal.

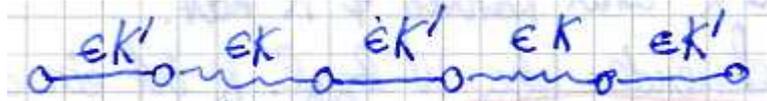
Bleibt noch die Umkehrung.

Es existiere kein zunehmender Weg bzgl.  $K$ .

**Annahme** : Es sei  $K'$  Korrespondenz von  $G$  mit  $|K'| > |K|$ .

Bilde die symmetrische Differenz  $K' \oplus K = (K' \cup K) - (K' \cap K) = K^*$ .  $K^*$  hat mehr Kanten aus  $K'$  als aus  $K$ . Sei  $G(K^*)$  der Untergraph mit den Kanten  $\in K^*$  und den zugehörigen Endpunkten. Jede Ecke in  $G(K^*)$  hat Grad  $\leq 2$ .

Jede Komponente von  $G(K^*)$  ist also entweder Weg oder Kreis. Kreise haben gleich viele Kanten  $\in K$  und  $\in K'$ . Also muss es einen Weg  $W$  geben, der mehr Kanten  $\in K'$  als  $\in K$  hat:



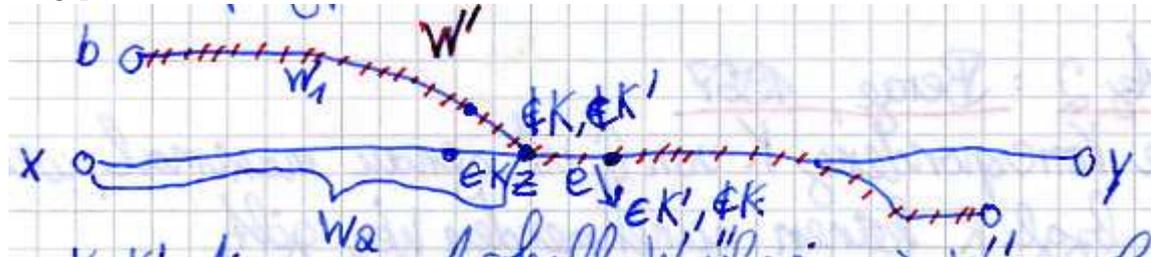
$W$  ist zunehmender Weg bzgl.  $K$  im Widerspruch zur Voraussetzung. □

**Satz 1.3 :** Seien  $K$  Korrespondenz von  $G$ ,  $W$  zunehmender Weg bzgl.  $K$ ,  $K' = K \oplus W$ ,  $b \notin W$  exponiert.

Dann gilt: Wenn es keinen zunehmenden Weg bzgl.  $K$  mit Anfangspunkt  $b$  gibt, dann auch keinen bzgl.  $K'$ .

**Beweis** (durch Kontraposition):

**Annahme :** Es existiert ein zunehmender Weg  $W'$  bzgl.  $K'$  mit Anfangspunkt  $b$ :



$K, K'$  stimmen außerhalb von  $W$  überein  $\Rightarrow W'$  muss  $W$  treffen. Sei  $z$  die erste Ecke auf  $W$  von  $b$  aus gesehen.

$W'$  kann  $W$  nicht kreuzen, denn sonst wären zwei Kanten aus  $K$  mit derselben Ecke inzident.. Sei also  $e$  die erste gemeinsame Kante von  $W$  und  $W'$ .  $\Rightarrow e \in K', e \notin K$ . Damit ist  $W'_1 \cup W_2$  zunehmender  $b, x$ -Weg bzgl.  $K$ . □

**Folgerung :** Wird die Korrespondenz fortlaufend über zunehmende Wege vergrößert, dann braucht jede exponierte Ecke nur einmal getestet zu werden.

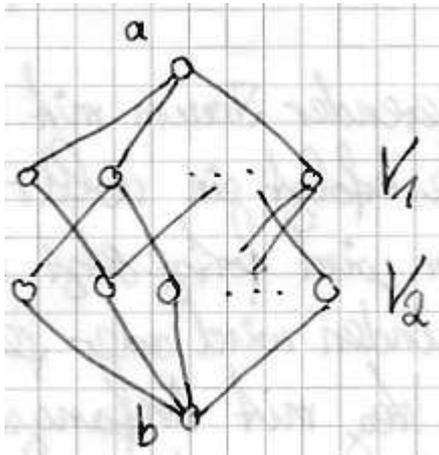
# Kapitel 2

## Matching Algorithmen

Ein Algorithmus ergibt sich aus dem Beweis des Satzes von KÖNIG (siehe OR III).

**Algorithmus** (nach dem Satz von KÖNIG): (IST DAS SCHON DER SATZ?)  
 $G = (V, E)$  bipartit mit Bipartition  $V = V_1 \cup V_2$ . |maximale Korrespondenz| = |minimale überdeckende Eckenmenge|

Ergänze künstliche Ecken  $a, b$  und verbinde  $a$  mit  $V_1$  und  $b$  mit  $V_2$



Setze alle Eckenkapazitäten = 1 für die Ecken  $\in E$ .

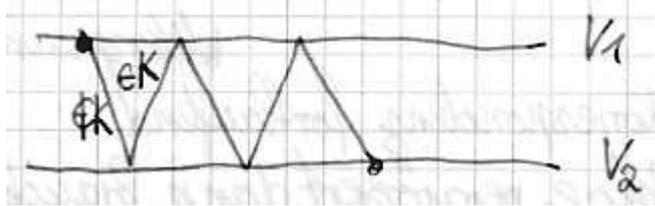
Bestimme nun mit EDMONDS-KARP einen maximalen  $a, b$ -Fluss  $F_m$ , wobei als Startfluss der triviale Fluss gewählt werden kann.

Die Kanten  $\in E$  des maximalen Flusses bilden eine maximale Korrespondenz  $K_m = \{e \in E : F_m(e) = 1\}$ .

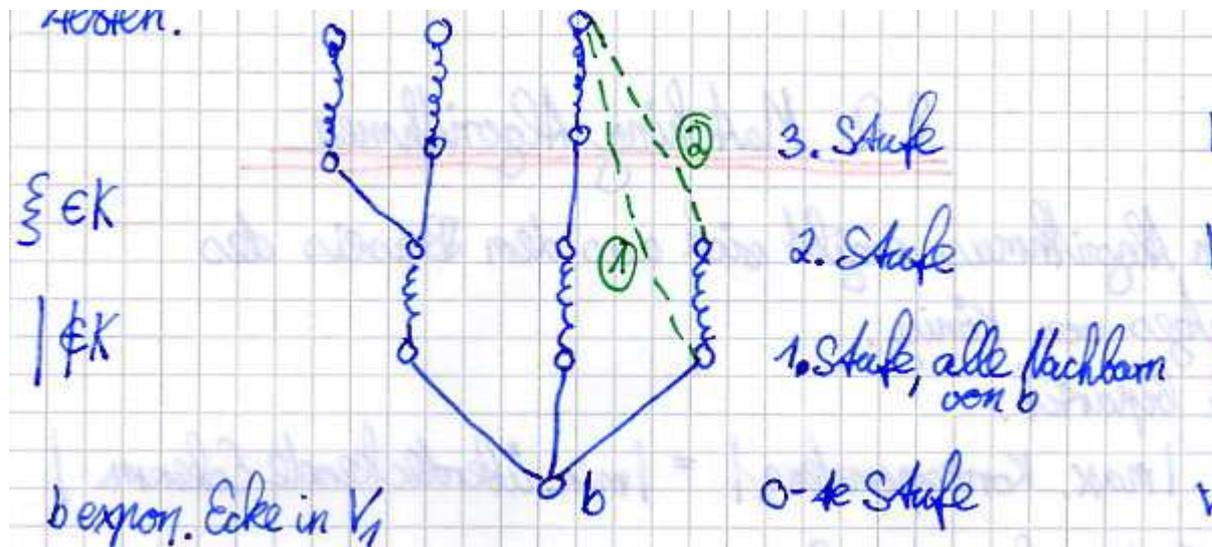
**Komplexität:**  $O(|E| \cdot |V|)$ .

**Algorithmus** (von CONRADT-PAPE, 1980): Für eine kompakte Darstellung bzw. Implementierung siehe Umdruck 1.

Sei  $G = (V, E)$  bipartit mit Bipartition  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .



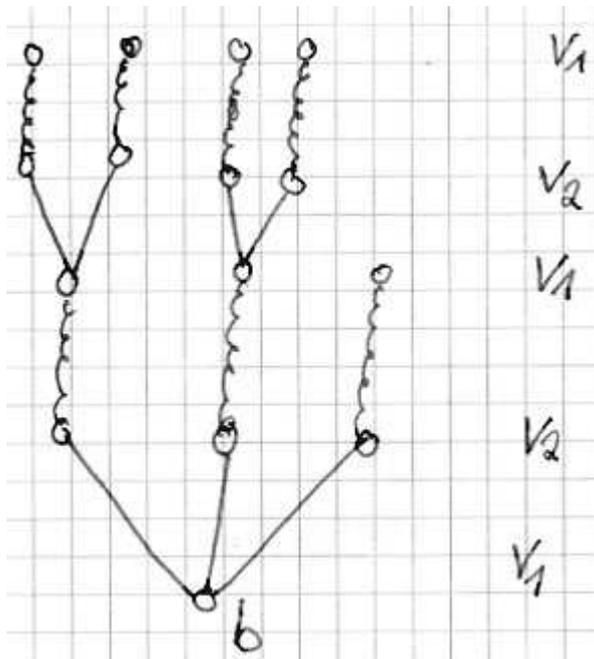
Es genügt bei bipartiten Graphen, als Anfangspunkte für zunehmende Wege exponierte Ecken in  $V_1$  zu testen.  
Sei  $b$  exponierte Ecke in  $V_1$ .



Es entsteht ein alternierender Baum mit Wurzel  $b$  wie folgt: In jeder zweiten Stufe erfolgt ein voller Breitensucheschritt, die anderen Schritte gehen einfach über Korrespondenzkanten weiter. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis ein zunehmender Weg gefunden wird oder festgestellt wird, dass kein zunehmender Weg mit Anfangspunkt  $b$  existiert. Im ersten Fall wird dann die Korrespondenz vergrößert.  
Teste dann die nächste exponierte Ecke usw.

Kanten 1) aus der Abbildung brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da sie nicht zu neuen exponierten Ecken führen.  
Kanten 2) existieren in bipartiten Graphen nicht, da sie zu Kreisen ungerader Länge führen.

**Fall:** Die exponierte Ecke  $b \in V_1$  ist durch den Test durchgefallen.



Der alternierende Baum  $B$  mit Wurzel  $b$  endet nur mit Korrespondenzkanten  $\in K$ .

$M_1$  sei die Menge der  $V_1$ -Ecken  $\in B$ .

$M_2$  sei die Menge der  $V_2$ -Ecken  $\in B$ .

$$|M_1| = |M_2| + 1, |M_2| < |M_1|$$

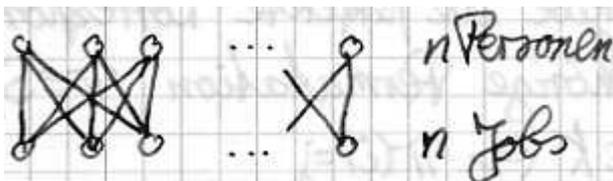
$M_2$  ist die Menge aller Nachbarn der Ecken  $\in M_1$ .  $|M_2| < |M_1|$ . Hier ist die HALL-Bedingung verletzt.

**Komplexität:**  $O(|E| \cdot |V|)$

## 2.1 Ungarischer Algorithmus (1956)

**Ausgangspunkt:** :

**Gegeben :** Zuweisungsproblem:



$G = K_{n,n}$  vollständig bipartiter Graph.

Interpretation: Großer Wert  $\hat{=}$  große Eignung.

**Gesucht:** Perfekte Korrespondenz größten Wertes.

Seien  $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ .

Wir identifizieren auch Ecken mit ihren Nummern:

$$w(x_i, y_j) = w_{ij} = w(ij)$$

Eckenbewertung  $u, v$ ;  $u : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Eckenbewertung  $u, v$  heiße **zulässig**, wenn

$$w_{ij} \leq u(i) + v(j) \quad \text{für alle } i, j.$$

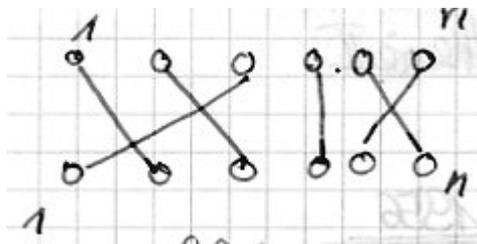
Ein Beispiel für eine zulässige Eckenbewertung ist also

$$u(i) := \max_{j=1, \dots, n} w_{ij}, \quad \text{alle } v(j) := 0.$$

Im Folgenden seien  $u, v$  zulässige Eckenbewertungen, falls nichts anderes gesagt wird.

**Satz 2.1 :** Es sei  $K$  perfekte Korrespondenz von  $G$ . Dann gilt:

$$w(K) \leq \sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$$



**Beweis :**

Beschreibe die perfekte Korrespondenz  $K$  durch die zugehörige Permutation  $\pi \in S_n$ :  $ij \in K \Leftrightarrow \pi(i) = j$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} w(K) &= \sum_{i,j \in K} w(ij) = \sum_{i,j \in K} w(i\pi(i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (u(i) + v(\pi(i))) = \sum_{i=1}^n u(i) + \underbrace{\sum_{i=1}^n v(\pi(i))}_{=\sum_{i=1}^n v(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n (u(i) + v(i)) \end{aligned}$$

□

**Folgerung :** Ist  $w(K) = \sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$ , dann ist  $w(K)$  maximal ( $K$  optimal) und  $\sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$  minimal.

**Definition** (Gleichheitsgraph):

Der **Gleichheitsgraph**  $G_{u,v}$  hat dieselben Ecken wie  $G$  und genau die Kanten  $ij$  mit  $w(ij) = u(i) + v(j)$ .

**Satz 2.2 :** Jede perfekte Korrespondenz von  $G_{u,v}$  ist optimale Korrespondenz von  $G$ .

$\sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$  ist genau dann minimal, wenn  $G_{u,v}$  eine perfekte Korrespondenz hat.

**Beweis :**  $K$  sei perfekte Korrespondenz von  $G_{u,v}$  und  $\pi$  die zu  $K$  gehörige Permutation.

$$w(K) = \sum_{i=1}^n w(i\pi(i)) = \sum_{i=1}^n (u(i) + v(\pi(i))) = \sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$$

Folg.  $\Rightarrow$  Satz 2.1  $w(K)$  maximal,  $\sum_{i=1}^n (u(i) + v(i))$  minimal.

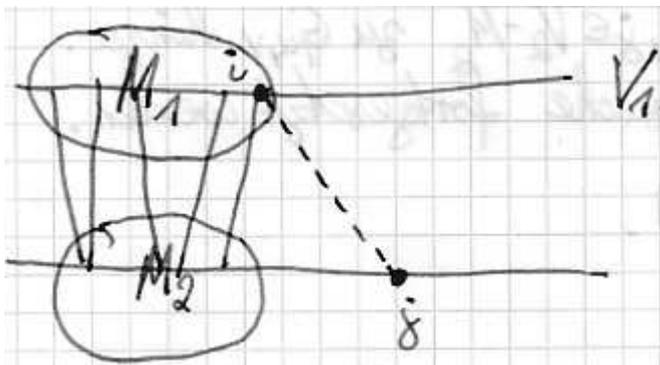
Bleibt noch die Umkehrung zu zeigen.

Es sei  $\sum_{i=1}^n (u(i) + v(i)) =: M$  minimal.

**Annahme:**  $G_{u,v}$  hat keine perfekte Korrespondenz.

Es existiert eine exponierte Ecke  $b$ , die beim Test mit CONRADT-PAPE durchfällt.

Man findet Mengen  $M_1, M_2$ , an denen die Heiratsbedingung verletzt ist.  $M_1 \subseteq V_1, M_2 \subseteq V_2, M_2$  Nachbarmenge von  $M_1, |M_1| = |M_2| + 1$ . Sei  $i \in M_1, j \in V_2 - M_2$ , sowie  $ij \notin G_{u,v}$  mit  $w(ij) < u(i) + v(j)$  (HIER IST DAS UNKLAR... VIELLEICHT HABE ICH DAS AUCH FALSCH FORMULIERT!)



Bilde  $d = \min\{u(i) + v(j) - w(ij) : i \in M_1, j \in V_2 - M_2\}$ . Offensichtlich ist dann  $d > 0$ .

Ändere die Bewertung zu  $u', v'$

$$u'(i) = u(i) - d \text{ für } i \in M_1 \quad v'(j) = v(j) + d \text{ für } j \in M_2, \quad \text{sonst } u' = u, v' = v$$

Mit dieser geänderten Bewertung gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (u'(i) + v'(i)) &= \sum_{i \in M_1} (u(i) - d) + \sum_{i \in V_1 - M_1} u(i) + \sum_{i \in M_2} (v(i) + d) + \sum_{i \in V_2 - M_2} v(i) \\ &= \sum_{i=1}^n (u(i) + v(i)) - d \underbrace{(|M_1| - |M_2|)}_{>0} < M \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Minimalität von  $M$ .

□

**Algorithmus** (Ungarischer Algorithmus): Starte mit der Anfangsbewertung  $u, v$ .

Wende CONRADT-PAPE auf  $G_{u,v}$  an.

Existiert noch keine perfekte Korrespondenz, dann findet man Mengen  $M_1, M_2$  wie im Beweis zu Satz 2.2.

Der bis dahin konstruierte alternierende Baum bleibt in  $G_{u,v}$  bzw.  $G_{u',v'}$ .

Es kommt mindestens eine Kante  $ij, i \in M_1, j \in V_2 - M_2$  zu  $G_{u,v}$  hinzu.

Hier kann die Breitensuche fortgesetzt werden.

**Komplexität:**  $O(|V|^3)$ .

## 2.2 Der Blüten-Algorithmus von Edmonds, 1965

**Vorraussetzungen :**  $G = (V, E)$  beliebiger ungerichteter Graph.

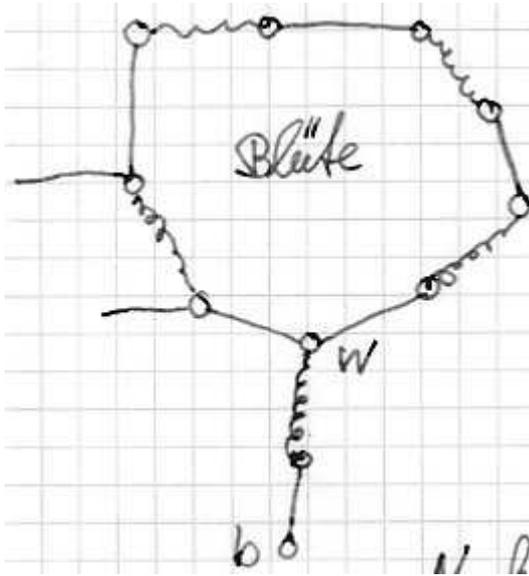
Gesucht: Maximale Korrespondenz (größte Kantenanzahl) (WAS SOLL MIR DAS SAGEN???)

**Definition** (Blüte, Blütenwurzel, Stiel der Blüte):

Sei  $K$  eine Korrespondenz von  $G = (V, E)$ .

Eine Blüte ist ein Kreis mit abwechselnd Kanten  $\in K$  und  $\notin K$ . Nur eine Ecke  $w$  inzidiert mit 2 Kanten  $\notin K$ . Der Kreis ist ungerade und

$w$  heißt die **Blütenwurzel**. Nach  $w$  führt ein alternierender Weg mit Anfangspunkt  $b$ , genannt der **Stiel der Blüte**.

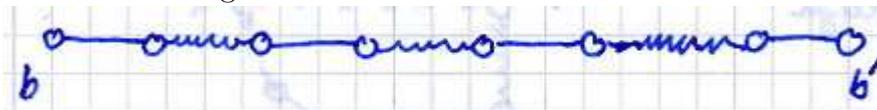


**Algorithmus** (Blütenalgorithmus von Edmonds): Für eine Implementierung siehe Umdruck 2.

$K$  Startkorrespondenz

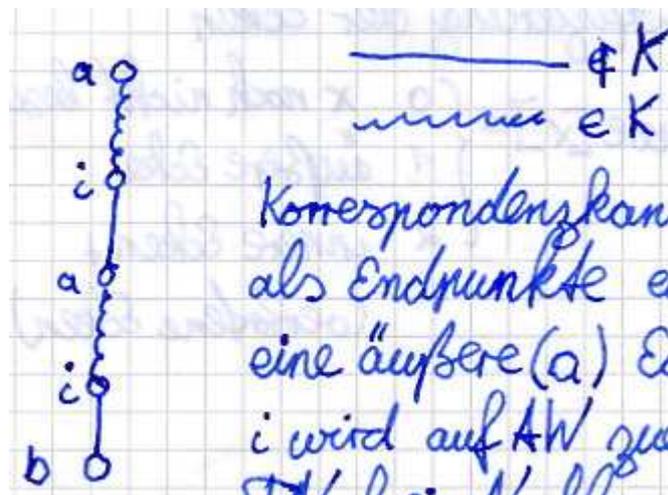
Partnerfunktion  $P(x) = y \Leftrightarrow xy \in K$ .

wenn  $x$  nicht exponiert  $P(x) = -1$ , wenn  $x$  exponiert.  $b, b'$  exponierter zunehmender Weg



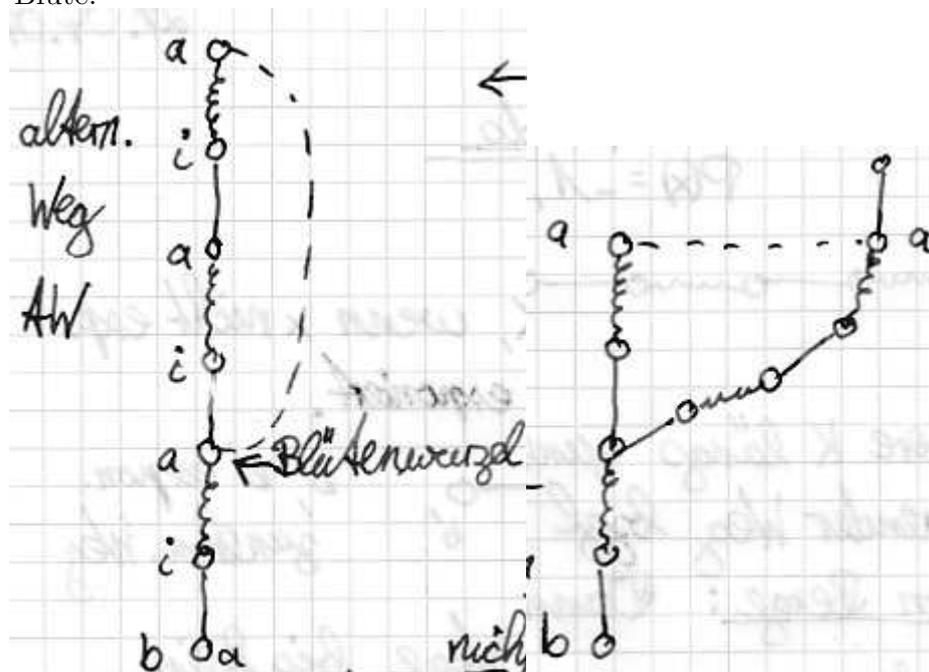
Vergrößere  $K$  längs zunehmender Wege bis kein zunehmender Weg bzgl.  $K$  mehr ex. Satz von Berge: Dann ist  $K$  maximal.

Tiefensuche Finde ausgehend von einer exponierten Ecke  $b$  einen zunehmenden Weg AW (alternierenden Weg) zu einer andern exponierten Ecke  $B'$



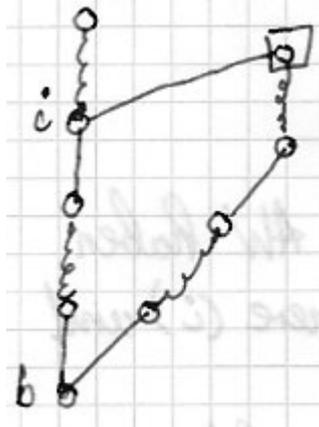
Korrespondenzkanten in AW haben als Endpunkte eine innere ( $i$ ) und eine äußere ( $a$ ) Ecke.  $i$  wird auf AW zuerst erreicht. FN freie Nachbarmenge.

Wenn eine Kante von der aktuellen äußeren Ecke (ist immer eine äußere Ecke)  $x$  zu einer anderen bereits mit  $a$ -Ecke führt, dann entsteht eine Blüte.



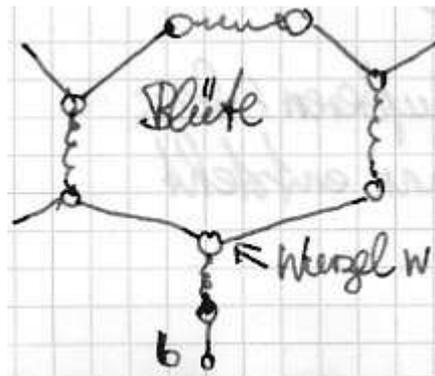
↑ Blüten können nur so entstehen, nicht so ↑, da im Tiefensuchebaum keine Kanten von  $G$  zwischen zwei Zweigen verlaufen. Innere Ecken werden nur einmal angesteuert, da mit weiteren Besuchen keine neuen Bereiche

alternierend erschlossen werden.



$$\text{Klassifizierung der Ecken Klasse}[x] = \begin{cases} 0 & x \text{ noch nicht besucht} \\ 1 & \text{äußere Ecke} \\ 2 & \text{innere Ecke} + \dots (\text{verbotene Ecken}) \end{cases}$$

Blütenbehandlung



Siehe Skizze 5

alle Blütenknoten sind durch Kanten  $\in K$  überdeckt. Auslaufende Kanten sind  $\notin K$ . Kontrahiere die Blüte in die Wurzel  $w$ .

Es entsteht  $G'$ .

Korrespondenz  $K' = K$  vermindert um die kontrahierten Kanten  $\in K$ . In  $G'$  gibt es einen zunehmenden Weg bzgl.  $K'$  mit Startknoten  $b$  genau dann, wenn es einen solchen Weg bzgl.  $K$  in  $G$  gibt.

Ecken von  $G : 0, 1, \dots, n - 1$ . Es wird tatsächlich im Verfahren für jede Blüte eine zusätzliche „Blütenecke“:  $n, n + 1, \dots$ . Die neuen Knoten entsprechen der Kontraktionsecke. Gleichzeitig wird die zugehörige Blüte gespeichert. Blütenarray. Alle wegkontrahierten Ecken der Blüte kommen in die Klasse 2, verbotene Ecken.

Es sei (nach mehreren Blütenkontraktionen) ein zunehmender Weg  $AW'$  mit Anfangspunkt  $b$  gefunden worden. Wähle in  $AW'$  eine Ecke  $z_k$  mit maximaler Nummer.

$z_k \leq n - 1 \Rightarrow AW' = AW$  zunehmender Weg in  $G$ . (Haken)

Es sei  $z_k \geq n$ .  $z_k$  ist durch Kontraktion einer Blüte  $Bl$  entstanden.  $z_k = n + \alpha$ ,  $Bl = \text{Blüten}[\alpha]$ .

$$AW' = z_0 - z_1 \dots z_{R-1} \text{---} z_R \text{---} z_{R+1} \dots z_r$$

Durchlaufe die Ecken in der Blüte  $Bl$  bis eine Ecke  $u \in Bl$  auftritt, die zu  $z_{k+1}$  benachbart ist.

Ersetze in  $AW'$   $z_k$  durch die Blütenwurzel. Ersetze  $z_k z_{k+1}$  durch den passenden alternierenden Weg von der Blütenwurzel durch  $Bl$  nach  $z_{k+1}$  (entsprechend Skizze?).

Führe die Ersetzung der Blütenknoten fort bis ein zunehmender Weg in  $G$  entsteht.

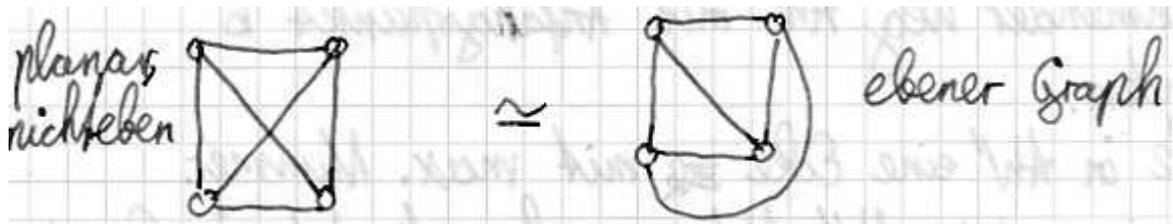
Komplexität: (Tiefensuche  $|V| \cdot |E|$ ), hier: Komplexität des Verfahrens  $O(|V|^3)$ . Auch das allgemeine gewichtete Matchingproblem ist mit derselben Komplexität, Also  $O(|V|^3)$  lösbar (auch mit einem Algorithmus von Edmonds), ist aber schwieriger, mit viel linearer Optimierung.

# Kapitel 3

## Planarität

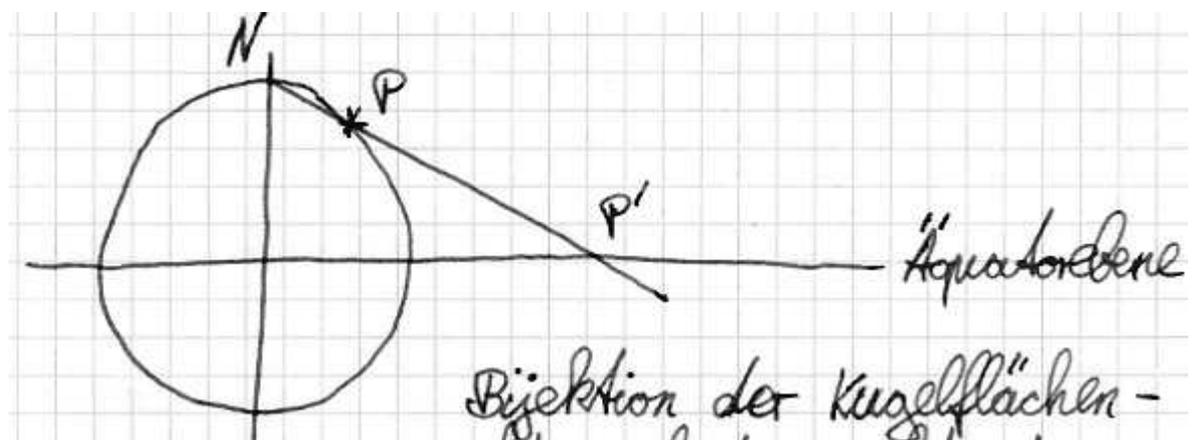
**Definition (planar):**

$G = (V, E)$  heißt **planar**, wenn  $G$  in die Ebene (ohne Kantenüberschneidungen) eingebettet werden kann.

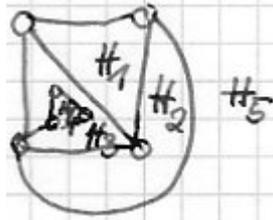


**Stereographische Projektion :**  $G$  planar  $\Leftrightarrow G$  kann in die Kugelfläche eingebettet werden.

Unter der **stereographischen Projektion** versteht man die Bijektion der Kugelflächenpunkte auf die Punkte der Äquatorebene.  $N$  entspricht der Punkt unendlich ( $\infty$ ).

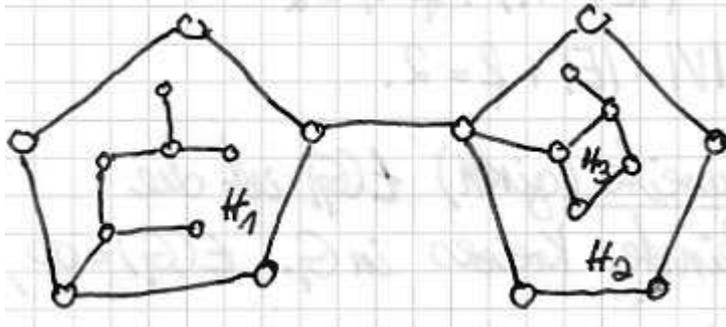


Diese Abbildung bildet ebene Graphen auf in die Kugelfläche eingebettete Graphen ab. Ein ebener Graph zerlegt die Ebene in endlich viele Gebiete, unter denen sich Immer ein Außengebiet / unbeschränktes Gebiet befindet..

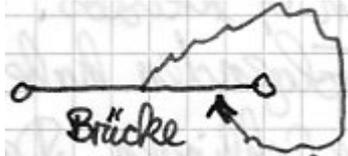


Durch stereographische Projektion kann man jedes Gebiet zum Außengebiet machen.

Wir wollen nun versuchen, die Anzahl der Gebiete eines ebenen Graphen zu bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst einige Abbildungen:



Man sieht hier, dass es einen Unterschied macht, ob man eine Brücke oder einen Kreis hat, denn eine Brücke liegt am Rand von nur einem Gebiet, alle anderen Kanten am Rand von zwei Gebieten.



Man stellt fest, dass für jedes Gebiet eine Kante mehr zum Graphen hinzukommt als Ecken da sind, da eine Kante zum Abschliessen des Gebietes benötigt wird. Bei einfachen Brücken dagegen bleibt die Differenz aus Kanten und Ecken gleich und es kommt kein Gebiet dazu. Etwas genauer beschreibt diesen Sachverhalt der folgende Satz.

**Satz 3.1 :** (Eulersche Polyederformel) Es sei  $G = (V, E)$  zusammenhängender ebener Graph.

$G$  zerlege die Ebene in  $F$  Gebiete, dann gilt:

$$|V| - |E| + f = 2$$

Die Zahl 2 ist die Eulercharakteristik der Fläche, also hier des  $\mathbb{R}^2$ , bei der Torusfläche steht hinten eine 0.

**Beweis :** Induktion über  $f$ .

$f = 1 \Rightarrow G$  ist Baum.

$$|E| = |V| - 1 \Rightarrow \underbrace{|E| - |V|}_1 + \underbrace{f}_1 = 2\sqrt{\phantom{x}}$$

Es sei  $f \geq 2$

Die Behauptung sei richtig für alle ebenen Graphen mit  $< f$  Gebieten.

$G$  hat einen Kreis  $C$ ,  $e$  sei eine Kante  $\in C$ .  $e$  liegt im Rand von 2 Gebieten,  $G - e$  hat  $f - 1$  Gebiete.

Skizze 3-5 (Ein Graph mit einem Gebiet, an dessen Rand eine Kante weggenommen wird)

DIE FEHLT NOCH!!!

Nun kann man die Induktionsannahme auf  $G - e$  anwenden:

$$\begin{aligned} |V| - (|E| - 1) + f - 1 &= 2 \\ \Rightarrow |V| - |E| + f &= 2. \end{aligned}$$

□

**Definition** (Tailleweite, engl.: girth):

Die **Tailleweite** (girth)  $t(G)$  ist die Länge eines kleinsten Kreises in  $G$ .  $t(G) = \infty$ , wenn  $G$  kreislos.

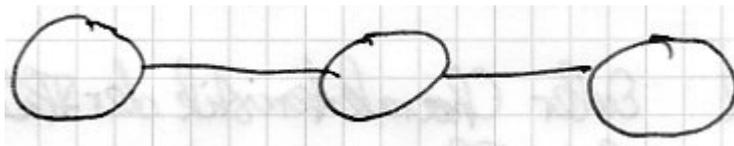
Im Folgenden habe  $G$  keine Mehrfachkanten und keine Schlingen. Dann ist  $t(G) \geq 3$ .

**Satz 3.2 :** Für jeden planaren Graphen gilt:

$$|E| \leq \frac{t(G)}{t(G) - 2}(|V| - 2),$$

wenn  $t(G) < \infty$ .

**Beweis :** Es liege  $G$  als ebener Graph vor.



Ist  $G$  nicht zusammenhängend, dann können die Komponenten von  $G$  so durch Kanten verbunden werden, dass der erweiterte Graph  $G' = (V, E')$  zusammenhängend und planar ist.

$$|E| \leq |E'| \leq \frac{t(G)}{t(G) - 2}(|V| - 2)$$

wird gezeigt. Also kann man  $G$  zusammenhängend voraussetzen und damit Satz 3.1 auf  $G$  anwenden. Zähle die Kanten von  $G$  gebietsweise ab. Das gibt eine Summe  $S$ .

$$f \cdot t(G) \leq S \leq 2|E|$$

Da wir die Polyederformel anwenden wollen, formen wir um:

$$\begin{aligned} |V| - |E| + f &= 2 \cdot t(G) \\ |V|t(G) - |E|t(G) + \underbrace{ft(G)}_{\leq 2|E|} &= 2t(G) \\ t(G)(|V| - |E|) + 2|E| &\geq 2t(G) \\ |E|(t(G) - 2) &\leq |V|t(G) - 2t(G) \\ |E| &\leq \frac{t(G)}{t(G) - 2}(|V| - 2). \end{aligned}$$

Eine Umformung davon ist

$$\frac{t(G) - 2 + 2}{t(G) - 2} = 1 + \frac{2}{t(G)} - 2$$

monoton fallend mit  $t(G)$

□

**Satz 3.3 :**

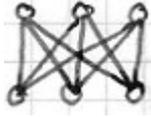
- (i) Ist  $G = (V, E)$  planar,  $|V| \geq 3$ , dann ist  $|E| \leq 3|V| - 6$ .  
Ist  $t(G) \geq 4$ , dann ist  $|E| \leq 2|V| - 4$ .
- (ii)  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  sind nicht planar

**Beweis :**

- (i) klar  $\checkmark$  (Weshalb?)

(ii)  $K_5$ 

$$|V| = 5, |E| = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \stackrel{?}{\leq} 3|V| - 6 = 9 \quad \text{⚡}$$

 $K_{3,3}$ 

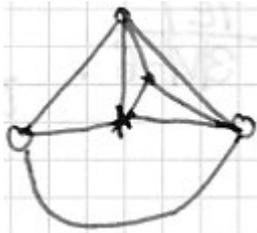
$K_{3,3}$  hat keine Kreise ungerader Länge.  $\Rightarrow t(G) \geq 4$

$$|E| \stackrel{?}{\leq} 2|V| - 4 = 8 \quad \text{⚡ (nach Einsetzen von V und E)}$$

□

**Definition** (maximaler planarer Graph):

Es gibt planare Graphen mit mit  $|E| = 3|V| - 6$ . Man nennt diese **maximale planare Graphen**.



**Satz 3.4 :** Es sei  $G = (V, E)$  planar. Dann existiert eine Ecke  $a \in G$  mit Grad  $\gamma(a) \leq 5$ .

**Beweis :** Wir schätzen mit Satz 3.3 den durchschnittlichen Eckengrad ab:

$$\frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \gamma(x) = 2 \frac{|E|}{|V|} \leq \frac{2}{|V|} (3|V| - 6) = 6 - \frac{12}{|V| < 6}$$

$\Rightarrow$  Es existiert  $a$  mit  $\gamma(a) \leq 5$ .

□

**Bemerkung :** Der Beweis funktioniert allgemein für  $|E| < 3|V|$ , nicht nur im Falle der Planarität, in dem sich Satz 3.3 allgemein anwenden läßt.

**Definition** (Dicke, biplanar):

Die kleinste Anzahl  $t$ , so dass  $G$  kantendisjunkte Vereinigung von  $t$  planaren Graphen ist, heißt die **Dicke** von  $G$ ,  $\Theta(G)$ . Will man dies in Formeln fassen, so ist das auch möglich:

$$G = (V, E) = G_1 \cup \dots \cup G_t, G_i = (V_i, E_i) \text{ planar.}$$

Man kann annehmen:  $V_i = V$ ;  $E = \uplus_i E_i$  disjunkte Vereinigung.

$G$  heißt **biplanar**, wenn  $\Theta(G) \leq 2$ .

**Anwendung der Biplanarität :** Gedruckte Schaltungen.  $\Theta(G)$  ist schwer zu bestimmen.

**Satz 3.5 :** Es ist

$$\Theta(G) \geq \frac{|E|}{3|V| - 6}$$

**Beweis :** Auch dieser Satz wird im Wesentlichen mit Hilfe von Satz 3.3 bewiesen:

$G = G_1 \cup \dots \cup G_t$ ,  $G_i$  planar,  $t = \Theta(G)$ .

$$|E| = \sum_{i=1}^t |E_i| \leq t(3|V| - 6) \Rightarrow t \geq \frac{|E|}{3|V| - 6}$$

□

**Folgerung :**  $\Theta(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$

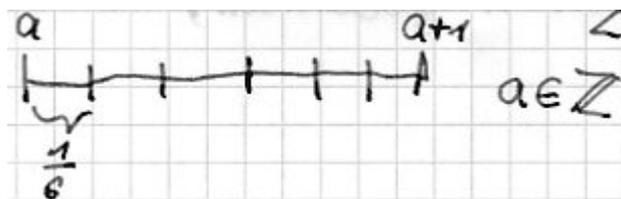
**Beweis :** klar für  $n \leq 5$  ✓.

Es sei  $n \geq 6$ .

Wende Satz 3.5 an:  $|V| = n$ ,  $|E| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$

$$\Theta(K_n) \geq \lceil \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{3n-6} \rceil = \lceil \underbrace{\frac{1}{6} \frac{n(n-1)}{n-2}}_{\alpha} \rceil \quad \text{ggT}(n-1, n-2) = 1, \text{ggT}(n, n-2) \leq$$

2.  $\alpha$  ist für  $n \geq 6$  nicht ganz.



$$\lceil \alpha \rceil = \lfloor \alpha \rfloor + 1 = \lfloor \alpha + 1 \rfloor \quad \Theta(K_n) \geq \lfloor \underbrace{\frac{1}{6}n \frac{(n-2)+1}{n-2}}_{1 + \frac{1}{n-2}} + 1 \rfloor = \lfloor \frac{1}{6}(n+6) +$$

$$\underbrace{\frac{1}{6} \frac{n}{n-2}}_{\frac{1}{6}(1 + \frac{2}{n-2})} \rfloor \quad \Theta(K_n) \geq \lfloor \frac{1}{6}(n+7) + \underbrace{\frac{1}{6} \frac{2}{n-2}}_{< \frac{1}{6}} \rfloor = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$$

Hier noch ne Skizze?? Hier stand vorher inhaltlich nochmal Abb3-9

$\frac{n+7}{6}$  wächst mit  $n$  in Schritten der Länge  $\frac{1}{6}$ . Zusatzglied  $< \frac{1}{6}$ , kein Einfluss beim Abrunden.

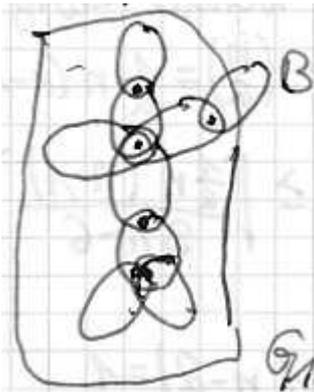
□

Bekannt:  $\Theta(K_n) = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$  für alle  $n$  außer für  $n = 9$  und  $n = 10$ .  $\Theta(K_9) = \Theta(K_{10}) = 3$ .

Vermutung:  $\Theta(K_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{2(m+n-2)} \rceil$

**Satz 3.6 :**  $G$  ist genau dann planar, wenn alle Blöcke von  $G$  planar sind.

**Beweis :**



Induktion über die Anzahl der Blöcke von  $G$ .  $r = 1$ :  $G$  ist selber Block  $\checkmark$ .

Es sei  $r \geq 2$ , Behauptung richtig für  $< r$  Blöcke.

Es sei  $B$  ein Endblock von  $G$ .  $B$  enthält genau eine Artikulation  $x$  von  $G$ .

$G_1 = G - (B - x)$ . Nach Induktionsannahme:  $G_1$  planar. Zeichne  $G_1$  ohne Kantenüberschneidungen mit Ecke  $x$  im Rand des Außengebietes, entsprechend für  $B$ . Hefte  $G_1$  und  $B_1$  an  $x$  zusammen  $\Rightarrow G$  planar. (warum geht das zusammenheften bei  $x$  immer? Könnte ja auch ne Kante drumrum sein, oder?)

□

Vorlesung 04.05.04

**Definition :**

Eine **Unterteilung** von  $G = (V, E)$  entsteht, indem man auf den Kanten von  $G$  neue Grad-2-Ecken einführt.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $G$  ist planar.

- (ii) Jeder Untergraph von  $G$  ist planar.
- (iii) Jede Unterteilung von  $G$  ist planar.
- (iv) Es gibt eine planare Unterteilung von  $G$ .

**Satz 3.7** Kuratowski, 1930: Ein Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält.

Beweis folgt bald (nach einer anderen Version des Satzes).

Kontraktion einer Kante  $e$ :

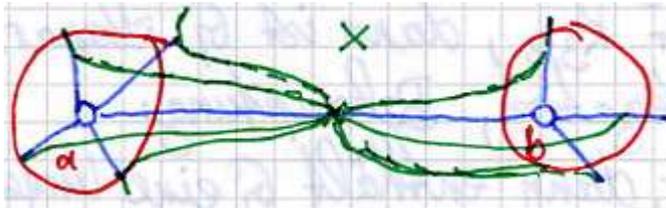
Markiere auf  $e$  eine neue Ecke  $x$ .

Skizze (Kante  $e$  von  $a$  nach  $b$  mit darauf) FEHLT...

Führe alle Kanten, die nach  $a$  oder  $b$  führen nach  $x$ . Lösche  $a, b$ . Ersetze dabei entstehende Mehrfachkanten durch eine einzige. Der entstehende Graph sei  $G/e$ .

$G$  planar  $\Rightarrow G/e$  planar.

Anschaulicher Beweis dazu:



Kontraktion  $G'$  von  $G = \text{Graph}$ , der aus  $G$  durch eine Folge von Kantenkontraktionen entstanden ist.

Kontraktionsversion des Satzes von Kuratowski:

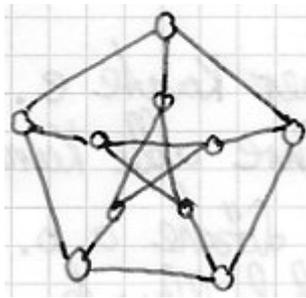
**Satz 3.8** Kontraktionsversion des Satzes von Kuratowski:  $G = (V, E)$  ist genau dann planar, wenn  $G$  keinen Untergraphen hat, der sich zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  kontrahieren läßt.

**Beweis** Unter Verwendung von Satz 3.7:  $K_5, K_{3,3}$  nicht planar  $\Rightarrow$  In einem planaren Graphen kann es keinen Untergraphen geben, der sich zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  kontrahieren läßt.

Umkehrung: Es sei  $G$  nicht planar.

Satz 3.7:  $G$  enthält Unterteilung von  $K_5, K_{3,3}$ . Die Teilpunkte auf den Kanten können wegkontrahiert werden  $\Rightarrow$  es entsteht  $K_5$  bzw.  $K_{3,3}$ .

□



**Beispiel (Petersen Graph):**

Der Petersen Graph läßt sich zu  $K_5$  kontrahieren (durch Kontraktion der Kanten von den inneren zu den äußeren Knoten).

**Beweis** von Satz 3.7: Bedingung des Satzes ist notwendig.  $\checkmark$

Umkehrung:

Zu zeigen: Hat  $G = (V, E)$  keine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ , dann ist  $G$  planar.

Wir beweisen die Negation:

**Behauptung :** Ist  $G$  nicht planar, dann enthält  $G$  eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .

Induktion über die Eckenanzahl  $|V|$ :

Alles klar bei  $|V| \leq 5$   $\checkmark$

Es sei  $|V| \geq 6$ .

Induktionsannahme: Behauptung richtig für alle Graphen mit  $< |V|$  Ecken.

Es sei  $G = (V, E)$  nicht planar.

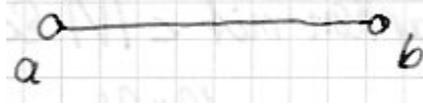
Zu zeigen:  $G$  enthält Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ . ( $|E| \leq 3|V| - 6$ ? Wozu gehört das?)

Entferne aus  $G$  Kanten bis  $|E| \leq 3|V| - 5$  ist. Dabei bleibt  $G$  nicht planar (Komplexität hier:  $O(|E|) = O(|V|)$ ).

Zerlege  $G$  in seine Blöcke:

$G = B_1 \cup \dots \cup B_r$ .

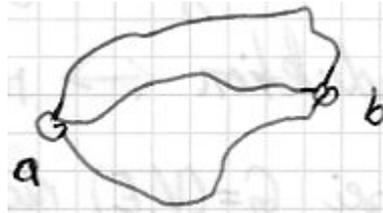
Satz 3.6:  $G$  hat einen nichtplanaren Block, etwa  $B_1$ . Ist  $r \geq 2$ , dann ist  $|V(B_1)| < |V|$  und  $B_1$  enthielte nach Induktionsannahme eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ . Also kann man im Weiteren von  $r = 1$ ,  $G = B_1$  ausgehen. Damit wird  $G$  zweifach zusammenhängend (weil Block).  $G$  hat keine Grad-1-Ecke. Grad-2-Ecken können als Durchgangsecken gelöscht werden (d.h. die Kante einfach durchgezogen werden). Man kann davon von  $\gamma(x) \geq 3$  für alle  $x \in V$  ausgehen.  $G$  hat eine Ecke  $a$  mit Grad  $\gamma(a) \leq 5$ , siehe Beweis zu Satz 3.4.  $b$  sei Nachbar von  $a$ .



$H = G - ab$ .  $H$  ist zusammenhängend, da sonst  $ab$  Brücke wäre. Widerspruch zu  $G$  zweifach zusammenhängend.

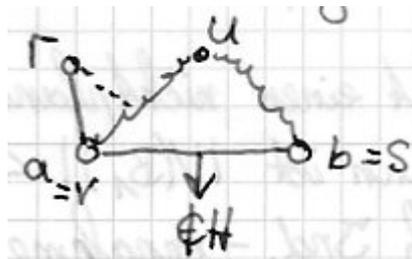
**Definition :**

**Lokale Zusammenhangszahl** (in Def vor dem Satz auslagern...)  
 $\kappa_H(a, b)$  = maximale Anzahl unabhängiger  $a, b$ -Wege (Satz von Menger:) = minimale Anzahl einer  $a, b$ -trennenden Eckenmenge  $T$ .



$$\kappa_H(a, b) \geq 1$$

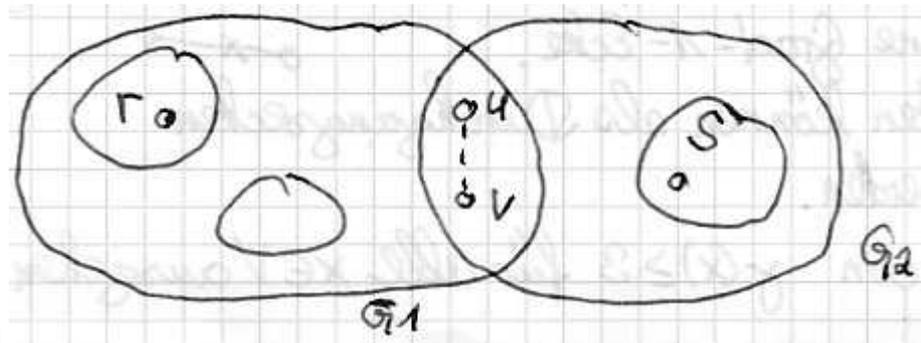
**Fall 1**  $\kappa_H(a, b) = 1$ : Es ex. eine  $a, b$ -trennende Eckenmenge  $T = \{u\}$  in  $H$ . Es sei  $r$  Nachbar von  $a$ ,  $r \neq u$ ,  $r \neq b$ .



In  $G$  ist  $T = \{u, v\}$  eine  $r, s$ -trennende Eckenmenge.

Es gibt eine Zerlegung  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = \{u, v\}$  (genauer:  $= G(u, v)$ ) mit  $r \in G_1$ ,  $s \in G_2$ .

Skizze (für trennende Eckenmenge und die Zerlegung... viele große



Kreise :-)

Sind  $u, v$  in  $G$  nicht benachbart, dann füge man die künstliche Kante  $uv$  hinzu. Es entsteht  $G' \supseteq G$ .

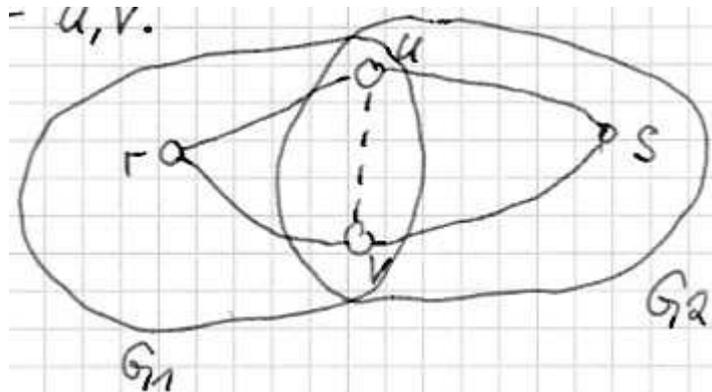
Annahme:  $G_1, G_2$  sind beide planar.

Dann lassen sich  $G_1, G_2$  überschneidungsfrei zeichnen mit der Kante  $uv$  im Rand des Außengebietes. Diese Darstellungen von  $G_1, G_2$  lassen sich überschneidungsfrei an der Kante  $uv$  zusammenheften.  
 $\Rightarrow G', G$  planar. Widerspruch.

Also ist  $G_1$  oder  $G_2$ , etwa  $G_1$  nicht planar.

Induktionsannahme:  $G_1$  hat eine Unterteilung  $U'$  von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .  
 $U'$  kann die künstliche Kante  $uv$  enthalten.

Es gibt in  $G$  zwei unabhängige  $r, s$ -Wege; diese Wege laufen über  $u$  und  $v$ .

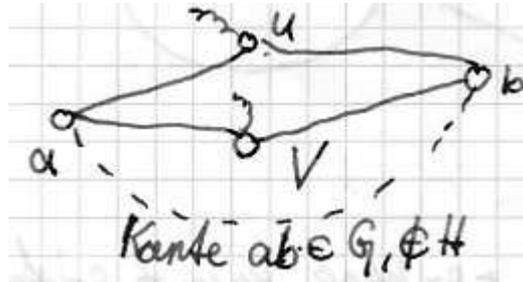


Ersetze in  $U'$  die Kante  $uv$  durch den Weg  $u \dots s \dots v$  in  $G_2$ . Dann wird aus  $U'$  eine Unterteilung  $U$  von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  in  $G$ .

Genau wie in diesem Fall kann man verfahren, wenn sich in  $G$  irgendwelche zwei Ecken  $r, s$  durch zwei andere Ecken  $u, v$  trennen lassen. Also können wir im Weiteren voraussetzen, dass  $G$  3-fach zusammenhängend ist.

(Wegen  $\gamma(a) \leq 5$  ist ein planarer Graph höchstens 5-fach zusammenhängend)

**Fall 2**  $\kappa_H(a, b) = 2$ : Es existieren in  $H$  zwei  $a, b$ -trennende Ecken  $u, v$ .

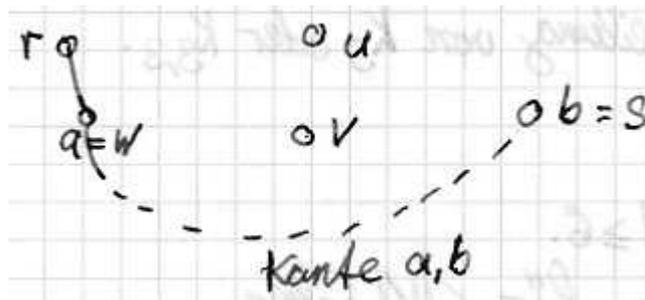


Annahme:  $a$  hat in  $G$  nur die Nachbarn  $u, v, b$ .  
 $b$  hat in  $G$  nur die Nachbarn  $u, v, a$ .

Nach Fall 1 kann man voraussetzen:  $G$  3-fach zusammenhängend.  
 $|V| \geq 6 \Rightarrow$  Es muss in  $G$  von  $u, v$  ausgehend Wege zu weiteren Ecken  $\neq a, b, u, v$  geben.

$\Rightarrow \{u, v\}$  trennt  $G$ . Widerspruch.  $G$  sollte jetzt 3-fach zusammenhängend sein.

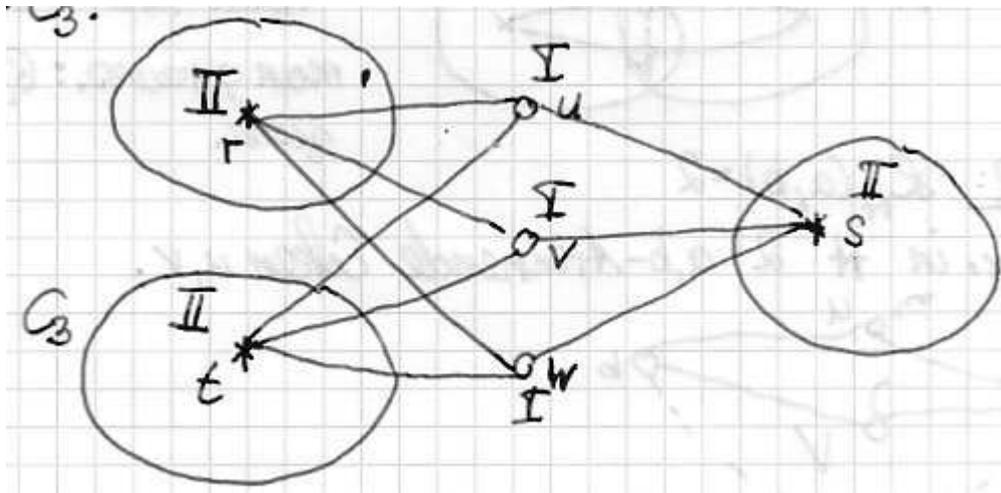
Eine der Ecken  $a$  oder  $b$ , etwa  $a$ , hat einen weiteren Nachbarn  $r$ ,  
 $r \notin \{u, v, b\}$



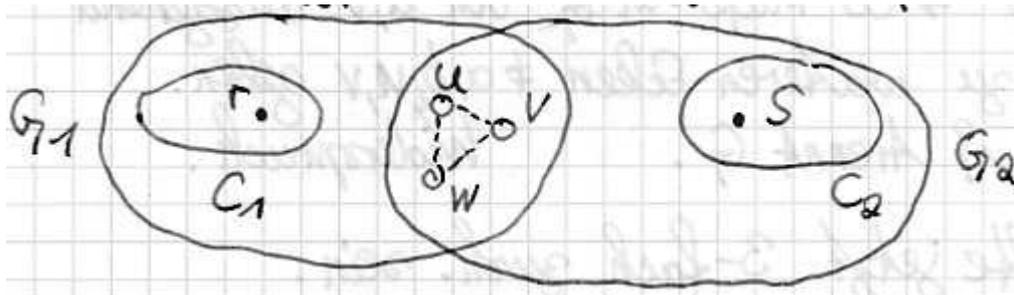
Dann ist die  $T = \{u, v, w\}$  eine  $r, s$ -trennende Eckenmenge in  $G$ .

Komponentenzerlegung  $G - T = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_\rho$ ,  $\rho \geq 2$ ,  $r \in C_1$ ,  
 $s \in C_2$ .

Fall  $\rho \geq 3$



$t \in C_3$  Es gibt Tripel unabhängiger  $r, s$ -Wege bzw.  $t, s$ -Wege. Diese bilden eine Unterteilung von  $K_{3,3}$ . Man kann jetzt von  $\rho = 2$  ausgehen.  $G - T = C_1 \cup C_2$ ,  $r \in C_1$ ,  $s \in C_2$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .



Ergänze  $u, v, w$  eventuell durch künstliche Kanten zu einem Dreieck. Es entsteht  $G' \supseteq G$ .  $G' = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = T$ .

$G_1 - T = C_1$  zusammenhängend.

$G_2 - T = C_2$  zusammenhängend.

Annahme:  $G_1, G_2$  beide planar.

In einer ebenen Darstellung können  $G_1, G_2$  nicht sowohl Ecken im Inneren des Dreiecks  $T$  als auch im Äußeren von  $T$  haben, denn dann wären  $u, v, w$  trennend für  $G_1, G_2$ . Zeichne  $G_1$  im Inneren von  $T$ ,  $G_2$  im Äußeren von  $T$ . Beide Darstellungen können überschneidungsfrei an  $T$  zusammengeheftet werden.

$\Rightarrow G'$  planar  $\Rightarrow G$  planar. Widerspruch.

$\Rightarrow G_1$  oder  $G_2$ , etwa  $G_1$  ist nicht planar.

Induktionsannahme anwenden:  $G_1$  hat Unterteilung  $U$  von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .

$U$  kann künstliche Kanten enthalten. Es gibt 3 unabhängige  $r, s$ -Wege. Diese bilden ein Tripel  $TW$  von unabhängigen Wegen von

$u, v, w$  nach  $s$ .

Fall:  $U$  enthält genau eine künstliche Kante, etwa  $uv$ .



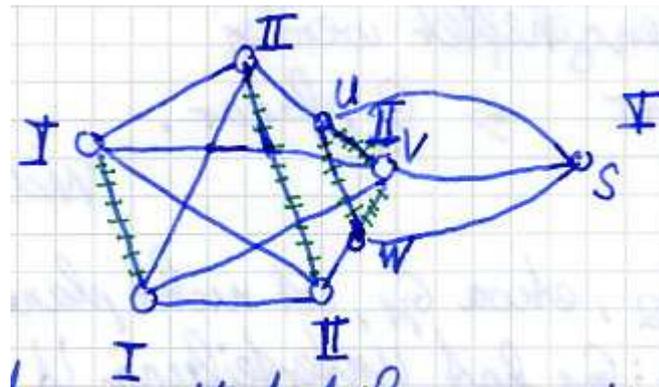
Ersetze in  $U$  die Kante  $uv$  durch den Weg  $u \dots s \dots v$  in  $G_2$ .

Fall:  $U$  habe 2 künstliche Kanten, etwa  $uv$  und  $vw$ .

Ist  $v$  Durchgangsecke von  $U$ , d.h.  $\gamma_U(v) = 2$ , dann kann man  $uv, vw$  ersetzen durch den Weg  $u \dots s \dots w$  in  $G_2$ . Dann erhält man eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  in  $G$ . In diesem Fall ist  $uw \notin U$ .

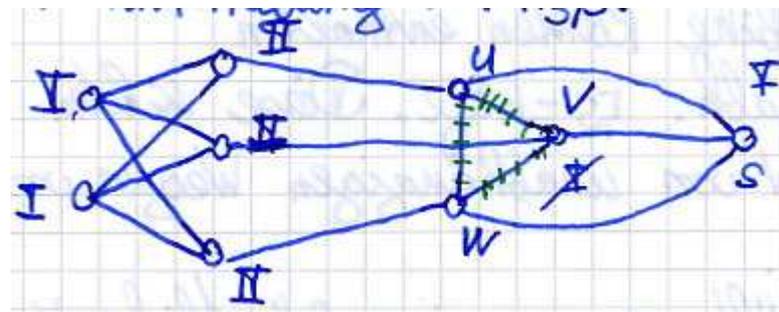
Es sei jetzt  $v$  Verzweigungsecke von  $U$ ,  $\gamma_U(v) = 3$  ( $K_{3,3}$ ) oder  $\gamma_U(v) = 4$  ( $K_5$ ).

Fall:  $U$  ist Unterteilung von  $K_5$



Es entsteht eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  in  $G$ .

Fall:  $U$  Unterteilung von  $K_{3,3}$



Es entsteht eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  in  $G$ .

Wie im Fall 2 kann man stets verfahren, wenn man 3 trennende

Ecken  $u, v, w$  in  $G$  findet.

Man kann im Folgenden voraussetzen:  $G$  4-fach zusammenhängend.

**Fall 3**  $\kappa_H(a, b) \geq 3$ : Es gibt in  $H = G - ab$  3 unabhängige  $a, b$ -Wege  $W_1, W_2, W_3$

Fall 3.1:



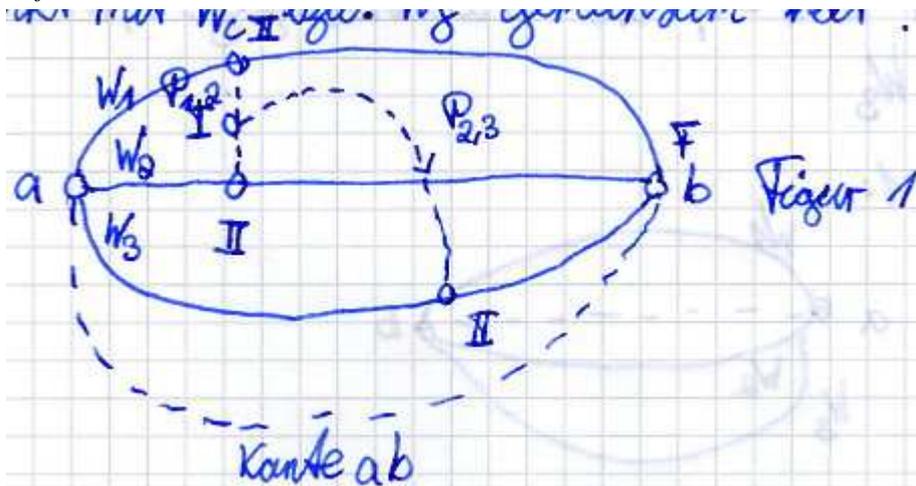
Es gibt ein Paar  $W_i, W_j$ , so dass in  $G - W_k$  kein Weg zwischen  $W_i$  und  $W_j$  existiert ( $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ). Wäre  $H = G - ab$  planar, dann könnte man in einer ebenen Darstellung von  $H$  die Kante  $ab$  überschneidungsfrei zwischen  $W_i$  und  $W_j$  einziehen.

$\Rightarrow G$  planar. Widerspruch.  $H$  ist nicht planar. Starte die Tour durch Fall 1, 2, 3 neu mit  $H$  anstelle von  $G_1$  mit derselben Ecke  $a$ ,  $\gamma(a) \leq 4$ . Man gerät dann höchstens noch ein weiteres Mal in diesen Fall 3.1. Spätestens mit  $\gamma(a) \leq 3$  findet man in  $G$  eine trennende Eckenmenge mit höchstens 3 Ecken, so dass der Beweis in Fall 1 oder Fall 2 endet.

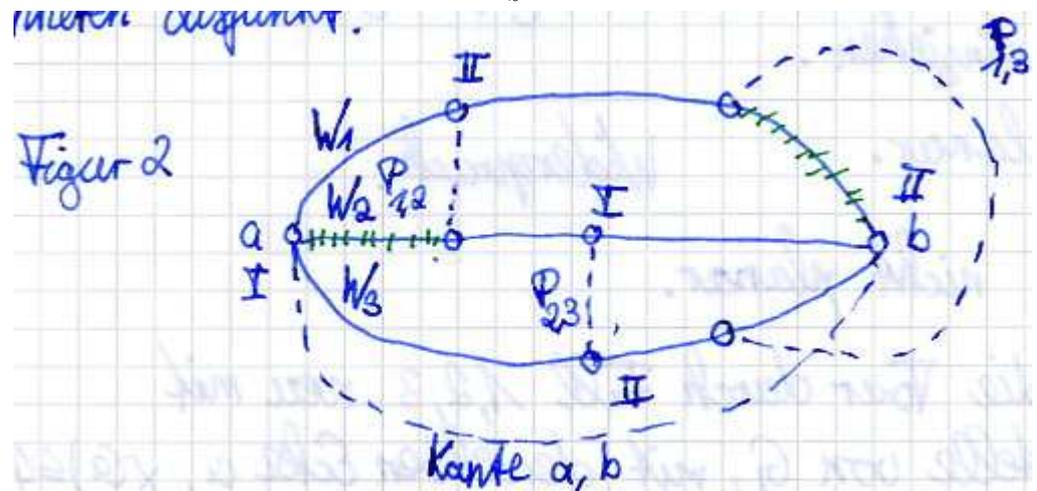
Fall 3.2:

Zu je 2 Wegen  $W_i, W_j$  gibt es einen  $W_i, W_j$  verbindenden Weg  $P_{i,j}$  in  $G - W_k$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

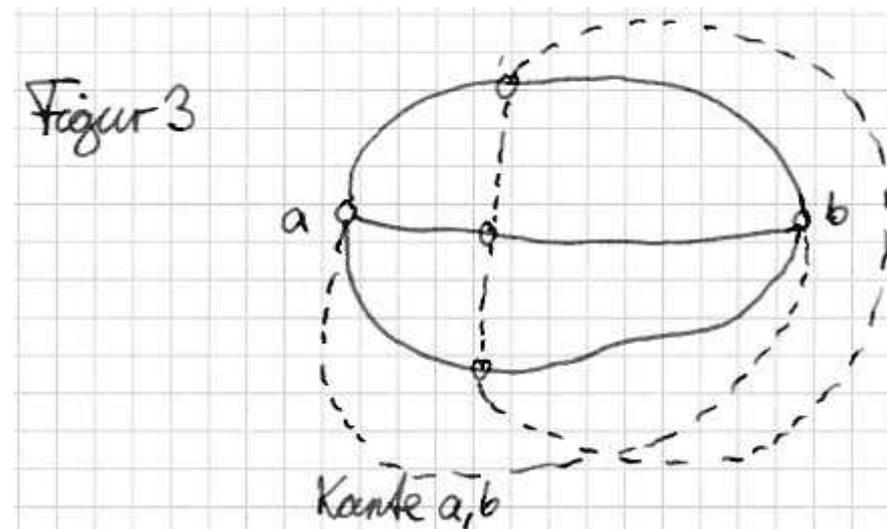
$P_{i,j}$  kann so gewählt werden, dass er nur den Endpunkt mit  $W_i$  bzw.  $W_j$  gemeinsam hat.



Treffen sich Querwege, etwa  $P_{1,2}$  und  $P_{2,3}$  in einem inneren Punkt, dann gibt es in  $H$  eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  (siehe Figur 1). Wir können dann annehmen, dass die  $P_{i,j}$  im Inneren disjunkt sind.



Man findet eine Unterteilung von  $K_{3,3}$ , solange nicht alle Anfangspunkte der  $P_{i,j}$  paarweise zusammenfallen.



In diesem Fall findet man in  $G$  eine Unterteilung von  $K_5$

□

**Bemerkung** zum Beweis von Satz 3.7: Der Beweis enthält ein Verfahren, mit dem man in einem nicht planaren Graphen eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  finden kann.

Induktion  $\leftrightarrow$  rekursive Programmierung.

11.05.04

**Planaritätstest :** Aus dem Beweis zum Satz von Kuratowski.

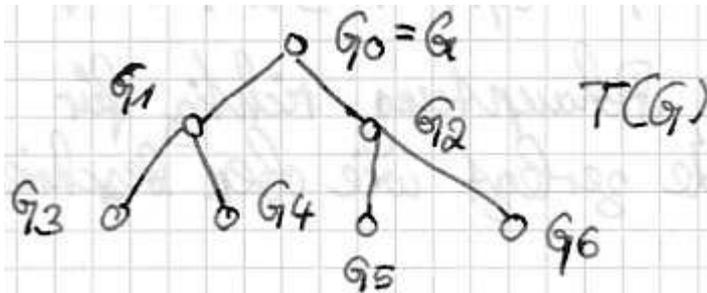
**Eingabe:** ungerichteter Graph  $G = (V, E)$

**Preprocessing:**  $|V| \geq 6$ ,  $|E| \leq 3|V| - 5$   
 $G$  2-fach zusammenhängend (Blockzerlegung)  
 $\gamma(x) \geq 3$  für alle  $x \in V$ .

Danach Fälle 1, 2, 3 aus dem Beweis bearbeiten.

Fall 3.1 wird eventuell 2-mal durchlaufen, wird hier als ein Durchlauf angesehen. Nach einem Durchlauf erhält man folgendes Ergebnis:

- (i)  $G$  ist planar. STOP
- (ii)  $G$  hat Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .  
 $\Rightarrow G$  nicht planar. STOP
- (iii) Es gibt eine Zerlegung  $G +$  künstliche Kanten  $= G_1 \cup G_2$ .  
 $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $|V_1 \cap V_2| \leq 3$ ,  $V_1 \not\subseteq V_2$ ,  
 $V_2 \not\subseteq V_1$   
 Bearbeite  $G_1, G_2$  von Vorne wie  $G$ .  
 Es entsteht auf diese Weise ein binärer Baum  $T(G)$  aus Untergraphen  $G_i$ .



$G$  nicht planar, wenn ein Untergraph  $G_i$  nicht planar ist.

$G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle  $G_i$  sind planar.

Wir zeigen: Knotenanzahl in  $T(G)$  ist  $O(|V|)$ .

Alle Operationen zur Bearbeitung von  $G_i$  haben hier Komplexität  $O(|V|)$ .  
 Beachte:  $|E| \leq 3|V| - 5$ .

- Breitensuche (Komponentenzerlegung, Querverbindungen)
- Blockzerlegung

- Bestimmung von  $\leq 3$  unabhängigen Wegen bzw.  $\leq 3$  trennenden Ecken, Flussalgorithmus, hier:  $\leq 3$  zunehmende Wege,  $3 \times$  Breiten-suche.

Gesamtkomplexität:  $O(|V|^2)$

Es gibt lineare Planaritätstests (Komplexität  $O(|V|)$ ) z.B. von Hopcroft, Tarjan, 1974.

**Lemma :** Knotenanzahl in  $T(G)$  ist  $|T(G)| \leq 2|V| - 7$  für alle  $|V| \geq 4$ .

**Beweis :** Induktion über  $|V|$ .

$|V| = 4$ ,  $G$  planar,  $|T(G)| = 1 \leq 2 \cdot 4 - 7$

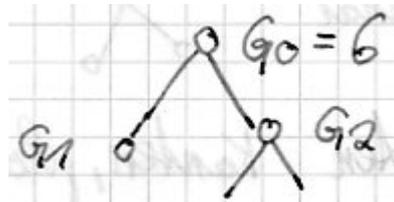
Es sei  $|V| \geq 5$ , Behauptung richtig für  $< |V|$  Ecken.

$G$  werde zerlegt wie oben beschrieben.  $G = G_1 \cup G_2$ .

**Fall 1 :**  $|V_1| < 4$ ,  $|V_2| < 4$ .  $G_1, G_2$  planar.

$$|T(G)| = 3 \leq 2 \cdot 5 - 7.$$

**Fall 2 :**  $|V_1| < 4$ ,  $|V_2| \geq 4$ .  $G_1$  planar.



$$|T(G)| = 2 + |T(G_2)| \leq 2 + 2 \cdot |V_2| - 7 \leq 2 + 2(|V| - 1) - 7 = 2|V| - 7$$

**Fall 3 :**  $|V_1| \geq 4$ ,  $|V_2| \geq 4$ .

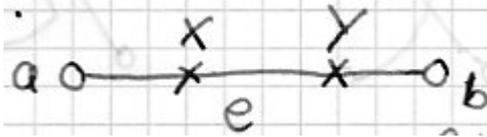
$$\begin{aligned} |T(G)| &= 1 + |T(G_1)| + |T(G_2)| \\ &\leq 1 + 2|V_1| - 7 + 2|V_2| - 7 = 2(|V_1| + |V_2|) - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |V_1| + |V_2| &= |V| + |V_1 \cap V_2| \leq |V| + 3 \\ \Rightarrow |T(G)| &\leq 2(|V| + 3) - 13 = 2|V| - 7 \end{aligned}$$

□

**Satz 3.9 :** Jeder Graph  $G = (V, E)$  hat eine biplanare Unterteilung.

**Beweis :**  $e = ab \in E$

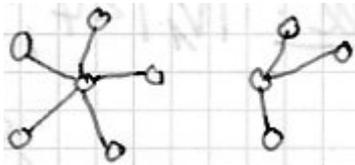


Unterteile jede Kante  $e$  mit zwei Teilpunkten  $x, y$ . Es entsteht  $G' = (V', E')$ .  $G' = G_1 \cup G_2$ ,  $G_i = (V_i, E_i)$ .  $V_1 = V_2 = V'$ .

Nehme in  $G_1$  alle Kanten  $ax, yb$  auf.

Nehme in  $G_2$  alle Kanten  $xy$  auf.

$G_1$  besteht aus disjunkten Sternen, planar.



$G_2$  besteht selber schon aus disjunkten Kanten, planar.

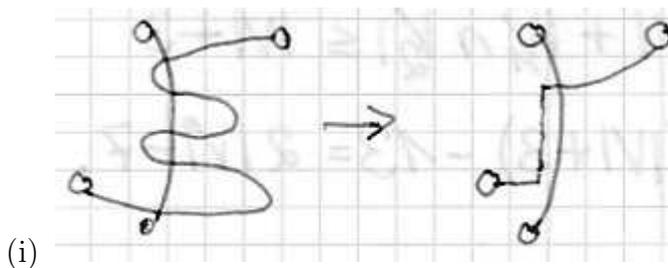
□

**Definition** (einfach):

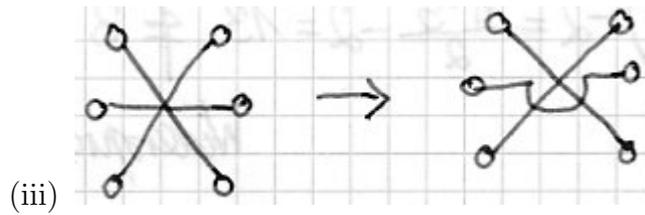
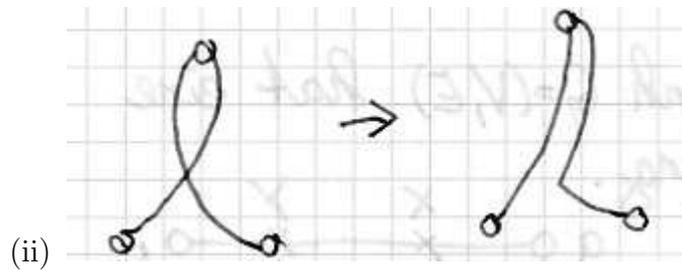
Eine ebene Darstellung heißt des Graphen  $G = (V, E)$  heißt **einfach**, wenn gilt:

- (i) Je zwei Kanten schneiden sich höchstens einmal.
- (ii) Je zwei benachbarte Kanten treffen sich nur in dem gemeinsamen Endpunkt.
- (iii) Keine drei Kanten überschneiden sich einem Punkt.

Abbildungen dazu:

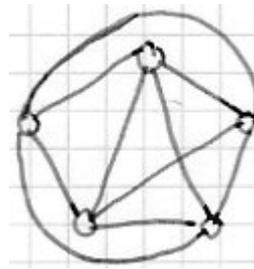


(i)

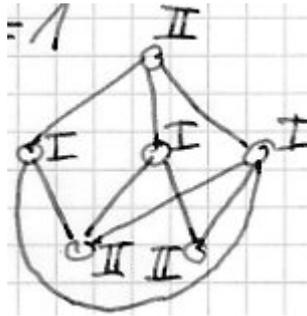


**Definition** (Kreuzungszahl):

Die **Kreuzungszahl** (crossing number) des Graphen ist die kleinste Anzahl von Überschneidungen in einer einfachen ebenen Darstellung von  $G$ ; Schreibweise:  $cr(G)$ .



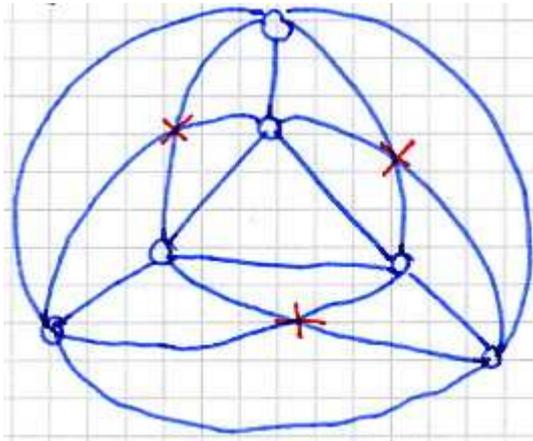
$cr(G) = 0 \Leftrightarrow G$  planar  $cr(K_5) = 1$



$cr(K_{3,3}) = 1$

**Satz 3.10** :  $cr(K_6) = 3$

**Beweis** :



Annahme:  $cr(K_6) \leq 2$ .

Nach Entfernen von zwei Kanten entstünde ein planarer Graph  $G_1 = (V_1, E_1)$ .  $|V_1| = 6$ ,  $|E_1| = \binom{6}{2} - 2 = \frac{6 \cdot 5}{2} - 2 = 13 \leq 3 \cdot |V_1| - 6 = 12$ .  
Widerspruch.  $\Rightarrow cr(K_6) = 3$

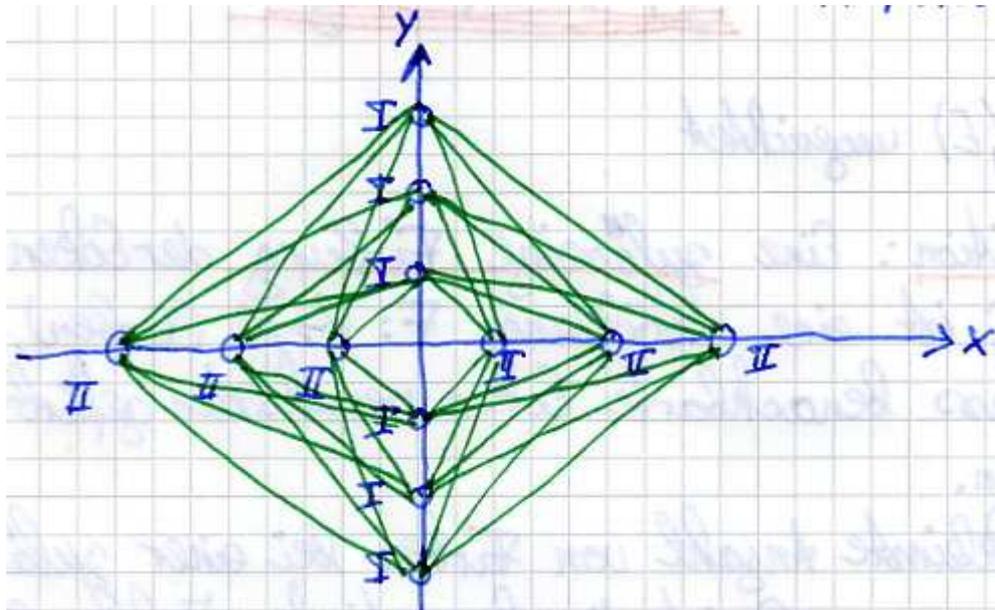
□

Bekannt:  $cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  (R. Guy, 1972)  
„=“bewiesen für  $n \leq 10$ . Vermutung: „=“für alle  $n$ .

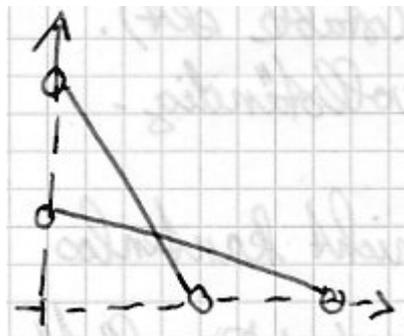
**Satz 3.11** : Es ist  $cr(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

**Beweis** : Wir setzen hier voraus  $m = 2s$ ,  $n = 2t$  (sonst etwas modifizieren).

Verteile die  $m+n$  Ecken von  $K_{m,n}$  auf den Achsen eines  $x$ - $y$ -Koordinatensystems in der Ebene. Je  $s$  Ecken auf der positiven / negativen  $y$ -Achse. Je  $t$  Ecken auf der positiven / negativen  $x$ -Achse.



Gleiche Anzahl von Überschneidungen in jedem Quadranten.  
Wir bestimmen die Anzahl der Überschneidungen im ersten Quadranten. Jede Überschneidung wird wie folgt durch ein Eckenpaar auf der  $y$ -Achse und ein Eckenpaar auf der  $x$ -Achse erzeugt.



Anzahl dieser Überschneidungen:  $\binom{s}{2} \cdot \binom{t}{2}$

$$cr(K_{m,n}) \leq 4 \binom{s}{2} \cdot \binom{t}{2} = s(s-1)t(t-1) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$

□

Vermutung: Es gilt immer „=“ in Satz 3.9  
Bewiesen für  $m \leq 6$  und alle  $n$ .

# Kapitel 4

## Eckenfärbungen

$G = (V, E)$  ungerichtet.

**Definition** (zulässige Färbung, chromatische Zahl):

Eine **zulässige Färbung** der Ecken von  $G$  ist eine Abbildung  $F : V \rightarrow M$  ( $M$  Farbenmenge), so dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt werden. Die kleinste Anzahl von Farben bei einer zulässigen Färbung von  $G$  ist die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$ .

Im Folgenden: Färbung = zulässige Färbung.

Farbklasse bzgl.  $F$  = Menge von Ecken derselben Farbe. Jede Farbklasse ist eine Menge unabhängiger (d.h. paarweise nicht benachbart) Ecken (stable set).

Die Bestimmung der chromatischen Zahl  $\chi(G)$  ist NP-vollständig.

$\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$  ist kantenlos.

$\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$  ist bipartit.

Problem: Ist  $\chi(G) = 3$ ? Ist bereits NP-vollständig.

$\chi(K_n) = n$ .

$C_n$  Kreis der Länge  $n$ ,  $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & , \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ 3 & , \text{ wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Färbungen heißen äquivalent, wenn sie dieselben Farbklassen haben.

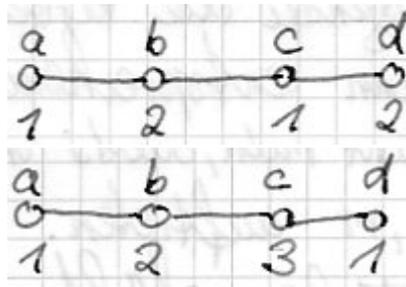
$|V| = n$ , Farben:  $1, 2, \dots, n$ .

Es sei  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  Anordnung der Ecken von  $G$ . Die sequentielle Färbung  $F$  bzgl. der gegebenen Anordnung ist:

(i)  $F(a_0) = 1$

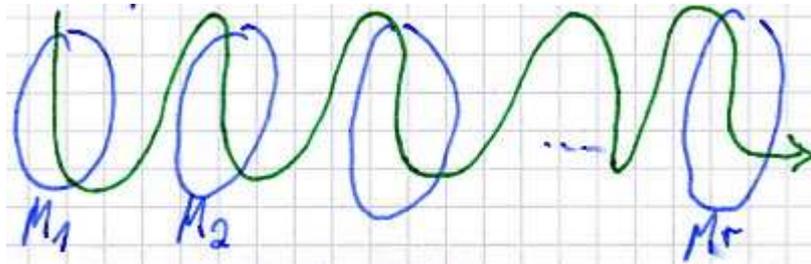
(ii) Es seien  $F(a_1), \dots, F(a_{i-1})$  bereits definiert,  $i \geq 1$ .

Man nehme für  $F(a_i)$  die kleinste Farbe, die an den Nachbarn von  $a_i$  noch nicht vorkommt.



**Satz 4.1 :** Es gibt eine Anordnung  $a_0, \dots, a_{n-1}$  der Ecken von  $G$ , so dass die sequentielle Färbung bzgl.  $a_0, \dots, a_{n-1}$  genau  $\chi(G)$  Farben benötigt.

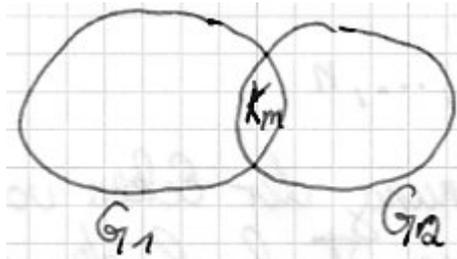
**Beweis :** Es sei  $F$  eine zulässige Färbung von  $G$  mit  $\chi(G)$  Farben. Farbklassen von  $F$ :  $M_1, \dots, M_r, r = \chi(G)$ .



Nummeriere die Ecken farbklassenweise. Die sequentielle Färbung bzgl. dieser Anordnung braucht genau  $r = \chi(G)$  Farben.

□

**Satz 4.2 :** Es sei  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = K_m$  vollständig.



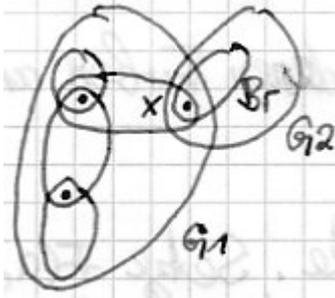
Dann ist  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .

**Beweis :** Es sei  $r = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ . Färbe  $G_1$  mit  $\leq r$  Farben. Farben  $1, 2, \dots, r$ . Die Ecken des  $K_m$  werden paarweise verschieden gefärbt. Durch Umbenennung der Farben erreicht man, dass in  $K_m$  genau die Farben  $1, \dots, m$  auftreten.  $G_2$  kann entsprechend mit  $\leq r$  Farben gefärbt werden, so dass die Färbungen für  $G_1, G_2$  auf  $K_m$  übereinstimmen.

Das gibt zusammen eine zulässige Färbung von  $G$  mit  $r$  Farben.

□

**Folgerung :** Es sei  $G = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$  die Blockzerlegung von  $G$ . Dann gilt:  $\chi(G) = \max\{\chi(B_i) : i = 1, \dots, r\}$ .



**Beweis :** Induktion über die Anzahl der Blöcke  $r$ . Klar für  $r = 1$ .

Es sei  $r \geq 2$ , Behauptung richtig für  $r - 1$ .

$B_r$  sei Endblock von  $G$ .  $B_r$  ist an einer Artikulation  $x$  am Restgraphen angehängt.  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 = (G - B_r) + x$ ,  $G_2 = B_r$ .

Induktionsannahme und Satz 4.2:  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(B_r)\} = \max\{\chi(B_1), \chi(B_2), \dots, \chi(B_r)\}$

□

**Bemerkung :** Es ist sinnvoll, der Bestimmung von  $\chi(G)$  eine Blockzerlegung voranzustellen.

### Färbungsheuristiken:

Sequentielle Färbungen mit empfohlener Anordnung der Ecken.

**LF-Heuristik** (LF: Largest First).

Ordne die Ecken dem Grad nach fallend. Färbe sequentiell.

**DSATUR** (Degree Saturated)

Sequentielle Färbung mit dynamischer Anordnung der Ecken.

**Definition** (Sättigungsgrad):

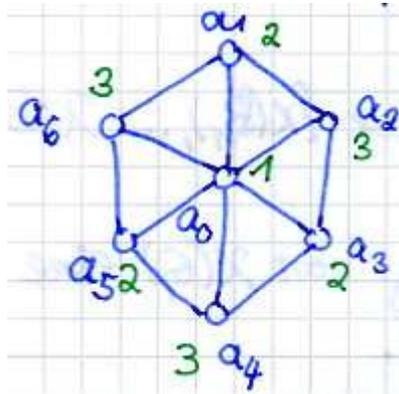
Es sei  $F$  eine Teilfärbung von  $G$ .  $x \in V$ .

**Sättigungsgrad**  $\gamma_S(x) =$  Anzahl der verschiedenen Farben an den Nachbarn von  $x$ .

(i)  $a_0$  sei Maximalgradecke. Setze  $F(a_0) = 1$ .

(ii) Es seien  $a_0, \dots, a_{i-1}$  bereits gefärbt,  $i \geq 1$ .  $a_i$  sei ungefärbte Ecke größten Sättigungsgrades. Färbe  $a_i$  mit der kleinsten Farbe, die an den Nachbarn von  $a_i$  nicht vorkommt.

Rad (Wheel),  $W_6$   
 hier: Länge 6,  $\chi(W_6)3$ .



$|V| = n$ , Farben  $1, 2, \dots, n$ .

**Satz 4.3 :** Es sei  $F$  zulässige Färbung von  $G = (V, E)$ ,  $V = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ .  
 Farbanzahl( $i$ ) = Anzahl der verschiedenen Farben von  $F$  an den Ecken  
 $a_0, \dots, a_i$ .

Dann können die Farben so umbenannt werden, dass gilt:

(\*) An den Ecken  $a_0, \dots, a_i$  treten genau die Farben  $1, 2, \dots, \text{Farbanzahl}(i)$   
 auf für  $i = 0, \dots, n - 1$ .

**Bemerkung :** „Die Farben bis zur Ecke  $a_i$  treten lückenlos auf;  $1, 1, \dots, \text{Farbanzahl}(i)$ .“

Umbenennung bedeutet Übergang zu einer äquivalenten Färbung, Gesamtanzahl der verwendeten Farben unverändert.

**Beweis** (von Satz 4.3): Die neue Färbung wird induktiv hergestellt. Es sei etwa  $F(a_0) = k > 1$ .

Vertausche überall die Farben 1 und  $k$ . So wird  $F(a_0) = 1$ .

Es sei  $i \geq 1$ . Es gelte (\*) bereits für  $i - 1$ .

Farbanzahl( $i-1$ ) =  $k$ . An den Ecken  $a_0, \dots, a_{i-1}$  treten genau die Farben  $1, \dots, k$  lückenlos auf.

**1. Fall** ( $F(a_i) \leq k$ ): Farbanzahl( $i$ ) =  $k$ , (\*) gilt auch für  $i$ .

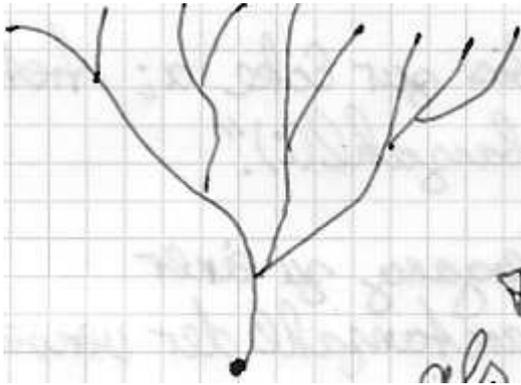
**2. Fall** ( $F(a_i) = k + 1$ ): Farbanzahl( $i$ ) =  $k + 1$ , (\*) gilt auch für  $i$ .

**3. Fall** ( $F(a_i) > k + 1$ ): Vertausche überall die Farben  $F(a_i)$  und  $k + 1$ .  
 So wird  $F(a_i) = k + 1$ . Farbanzahl( $i$ ) =  $k + 1$ . Also gilt dann (\*)  
 auch für  $i$ .

□

**Algorithmus** (BSC, BROWN 1972, BRELASZ 1979): Es erfolgt nur eine Beschreibung der wesentlichen Schritte. Der Algorithmus befindet sich auf Umdruck 3.

Backtracking = Tiefensuche durch einen Baum, dessen Blätter die zu untersuchenden möglichen Färbungen darstellen.



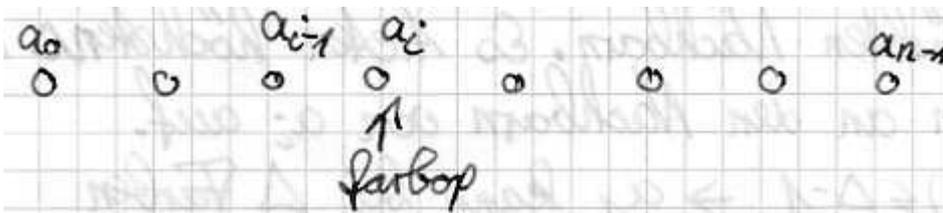
Jeder Durchlauf der *while*-Schleife ergibt eine sequentielle Färbung  $F$  von  $G$ . Ist  $F$  besser als  $F_{op}$ , dann wird  $F = F_{op}$  die aktuelle optimale Färbung.

In jedem Vorwärtsschritt geht man wie bei DSATUR vor. Die nächste zu färbende Ecke  $a_i$  ist eine Ecke größten Sättigungsgrades.

Die Menge der freien Farben von  $a_i$  ist Menge der Farben  $\leq \min\{farbop - 1, \underbrace{\text{Farbanzahl}(i - 1) + 1}_{\text{nach Satz 4.3}}\}$ , die an den Nachbarn von  $a_i$  noch nicht vorkommt.

Der erste Durchlauf der *while*-Schleife ist DSATUR.

Ist eine neue Optimalfärbung  $F_{op}$  erreicht, dann erfolgt ein Rückschritt bis zur Ecke  $a_{i-1}$ .



Dabei ist  $a_i$  von  $a_0$  aus gesehen die erste Ecke, an der die aktuell optimale Farbanzahl  $farbop$  auftritt.

Man startet den Vorwärtslauf neu an der Ecke  $a_{i-1}$ . Zuvor ist aus den freien Farbmengen von  $a_0, \dots, a_{i-1}$  die Farbe *farbop* zu streichen.

# Kapitel 5

## Abschätzungen für $\chi(G)$

$G = (V, E)$  ungerichtet,  $|V| = n$ . Im Folgenden sei  $G$  stets zusammenhängend.

**Satz 5.1 :** Sei  $\Delta = \Delta(G)$  der Maximalgrad von  $G$ . Dann gilt

- (i)  $\chi(G) \leq \Delta + 1$
- (ii)  $\chi(G) \leq \Delta$ , wenn  $G$  nicht regulär ist.

**Beweis :**

- (i) Jede sequentielle Färbung braucht höchstens  $\Delta + 1$  Farben.
- (ii)  $G$  zusammenhängend. Es sei  $a_1$  eine Ecke mit  $\gamma(a_1) \leq \Delta - 1$ . Es seien  $a_1, \dots, a_{i-1}$  bereits bestimmt,  $i \geq 2$ . Es sei  $a_i$  aus der Nachbarmenge von  $a_1, \dots, a_{i-1}$ .

Die sequentielle Färbung bezüglich  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  braucht höchstens  $\Delta$  Farben. Jede Ecke  $a_i$ ,  $i \geq 2$ , hat wenigstens einen ungefärbten Nachbarn. Es treten höchstens  $\Delta - 1$  Farben an den Nachbarn von  $a_i$  auf.  $\gamma(a_1) \leq \Delta - 1 \Rightarrow a_1$  kann bei  $\Delta$  Farben ebenfalls von allen Nachbarn verschieden gefärbt werden.

□

**Satz 5.2 (BROOKS, 1941):** Es ist  $\chi(G) = \Delta + 1$  genau dann, wenn  $G = K_n$  vollständig oder  $G = C_{2m+1}$  ungerader Kreis ist.

**Beweis :**  $\chi(K_n) = n = \underbrace{\Delta(K_n)}_{n-1}$ ;  $\chi(C_{2m+1}) = 3 = \underbrace{\Delta}_{2} + 1$

**Umkehrung:** Es sei  $\chi(G) = \Delta + 1$

Nach Satz 5.1 ist  $G$  regulär vom Grad  $\Delta$ . Es sei  $G$  nicht vollständig und

auch kein Kreis ungerader Länge, regulär vom Grad  $\Delta$  und  $G$  zusammenhängend.

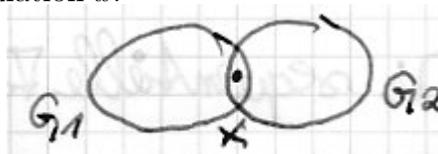
**Wir zeigen:**  $\chi(G) \leq \Delta$ .

$\Delta = 1$ : HIER FEHLT NOCH EIN BILD DES  $K_2$  (LINIE).  $G = K_2$ .  
Widerspruch.

$\Delta = 2$ :  $\Rightarrow G$  Kreis gerader Länge,  $\chi(G) = 2 = \Delta \checkmark$

Es sei  $\Delta \geq 3$ .  $G$  nicht vollständig.  $\Delta \leq |V| - 2$ .  $|V| \geq \Delta + 2 \geq 5$ .

**Annahme:**  $G$  hat eine Artikulation  $x$ .



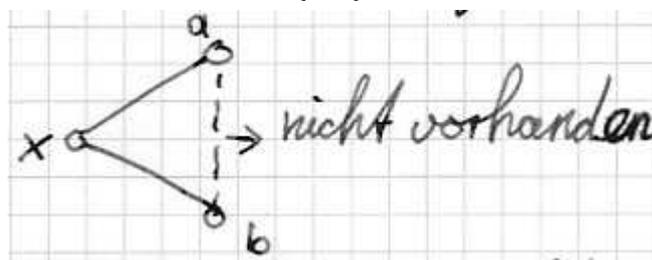
$$G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \{x\}.$$

Aus Kapitel 4, Satz 4.1 folgt:  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$   
 $G$  regulär  $\Rightarrow G_1, G_2$  nicht regulär.

Wegen Satz 5.1:  $\chi(G_1), \chi(G_2) \leq \Delta \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta \checkmark$

Wir können voraussetzen:  $G$  zweifach zusammenhängend.

**Zwischenbehauptung :** Es gibt eine Ecke  $x \in V$  mit Nachbarn  $a, b$ ,  
 $ab \notin E$ , so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist.



Damit kann der Beweis zu Ende gebracht werden. Nummeriere die Ecken von  $G - \{a, b\}$  wie im Beweis zu Satz 5.1 2).

$$a_1 = x, \dots, a_{n-2}$$

Wähle  $a_i$  aus der Nachbarmenge von  $a_1, \dots, a_{i-1}$  in  $G - \{a, b\}$ .

Setze  $a_{n-1} = a, a_n = b$ .

Färbe sequentiell bezüglich  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 = x$ .

$F(a_n) = 1 = F(a_{n-1}), \dots$ , auch  $a_1 = x$  hat höchstens  $\Delta - 1$  Farben in der Nachbarschaft. Diese sequentielle Färbung braucht höchstens  $\Delta$  Farben.

□

**Zwischenbehauptung :** [(im Beweis zu Satz 5.2)]  $G$  regulär vom Grad  $\Delta \geq 3$ ,  $|V| \geq 5$ ,  $\chi(G) \geq 2$ , d.h.  $G$  sei 2-fach zusammenhängend.  
 Dann gibt es eine Ecke  $x \in V$  mit Nachbarn  $a, b$ , so dass  $ab \in E$ ,  $G - \{a, b\}$  ist zusammenhängend.

**Beweis** (der Zwischenbehauptung):

$x \in V$  beliebige Ecke.

Annahme: alle  $\Delta$  Nachbarn von  $x$  sind untereinander benachbart.

$\Rightarrow x$  bildet mit seinen Nachbarn einen vollständigen Untergraphen  $K_{\Delta+1}$ .

$\Rightarrow G = K_{\Delta+1}$ . Widerspruch.

Also gibt es zu  $x$  zwei Nachbarn  $a, b$  mit  $ab \notin E$ .

Wäre  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend, dann wäre die Behauptung bewiesen.

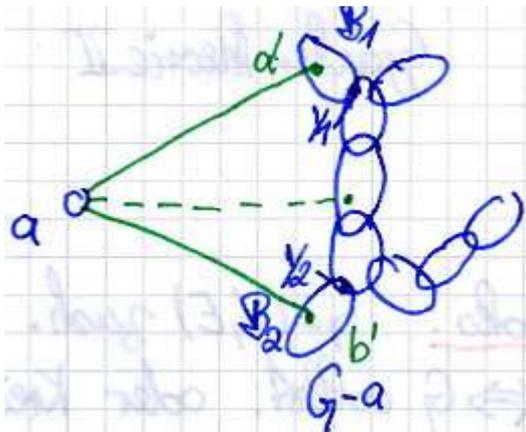
Also setzen wir voraus, dass  $G - \{a, b\}$  unzusammenhängend ist.

$G$  2-fach zusammenhängend.  $\Rightarrow \chi(G) = 2$ .

$G - a$  ist zusammenhängend.  $(G - a) - b$  unzusammenhängend.

$b$  ist Artikulation von  $G - a$ .

$G - a$  zerfällt in mindestens zwei Blöcke.



$G - a$  hat 2 Endblöcke  $B_1, B_2$ .

$B_1$  hängt an genau einer Artikulation  $y_1$  am Rest von  $G - a$ .

$B_2$  hängt an genau einer Artikulation  $y_2$  am Rest von  $G - a$ .

$\gamma(a) = \Delta \geq 3$

Damit  $y_1$  nicht Artikulation von  $G$  wird, muss es eine Kante  $aa'$ ,  $a' \in B_1$ ,  $a' \neq y_1$  geben.

Entsprechend existiert ein Nachbar  $b'$  von  $a$ ,  $b' \in B_2$ ,  $b' \neq y_2$ .

$a', b'$  sind nicht benachbart. Kanten verlaufen nur innerhalb von Blöcken.

$\Delta \geq 3 \Rightarrow$  Mit  $a$  inzidiert eine weitere Kante  $e$ , die  $a$  mit  $G - a$  verbindet.

$G - \{a, b'\}$  ist zusammenhängend.

Begründung:  $B_1 - a'$ ,  $B_2 - b'$  sind zusammenhängend.

Man erhält eine Lösung für die Zwischenbehauptung  $x' = a, a', b'$ .

□

**Definition** (kritischer Graph):

$G = (V, E)$  heißt  **$k$ -kritisch** (bzgl. Eckenfärbung), wenn  $\chi(G) = k$  und  $\chi(G') < k$  für jeden echten Untergraphen  $G'$  von  $G$ .

**Beispiel** :  $K_n$  ist  $n$ -kritisch;  $\chi(K_n - e) = n - 1$ .

$C_{2m+1}$ : Kreise ungerader Länge sind 3-kritisch.

**Satz 5.3** :

- (i) Jeder kritische Graph mit  $|V| \geq 3$  ist 2-fach zusammenhängend.
- (ii) Genu die Kreise ungerader Länge sind 3-kritisch.
- (iii) Ist  $G$   $\chi$ -kritisch, dann gilt für den Minimalgrad von  $G$ :  $\delta(G) \geq \chi - 1$
- (iv) Ist  $G$   $\chi$ -kritisch, dann gilt:

$$(\chi - 1)|V| \leq 2|E|$$

**Beweis** :

- (i)  $G$  zusammenhängend  $\checkmark$ . Blockzerlegung  $G = B_1 \cup \dots \cup B_r$ .  
 $\chi(G) = \max\{\chi(B_i) : i = 1, \dots, r\}$   
 $G$  kritisch  $\Rightarrow r = 1$ ,  $G = B_1$ ,  $|V| \geq 3 \Rightarrow G$  2-fach zusammenhängend.
- (ii) Es sei  $G$  3-kritisch.  
 $G$  enthält einen Kreis  $C$  ungerader Länge, da sonst  $G$  bipartit,  
 $\chi(G) = 2$   
 $G$  3-kritisch  $\Rightarrow G = C$ .
- (iii)  $x \in V$ .  $G$   $\chi$ -kritisch.  
 $\chi(G - x) = \chi - 1$ .  
 Annahme:  $\gamma(x) < \chi - 1$ .  
 Färbe  $G - x$  (zulässig) mit  $\chi - 1$  Farben.  
 In der Nachbarschaft von  $x$  kommen nicht alle  $\chi - 1$  Farben vor.  
 Es bleibt eine Farbe übrig, um  $x$  von allen Nachbarn verschieden zu färben.  
 $\Rightarrow \chi(G) = \chi - 1$  Widerspruch.  
 Also  $\gamma(x) \geq \chi - 1$  für alle  $x \in V$ .
- (iv)  $2|E| = \sum_{x \in V} \gamma(x) \geq (\text{nach 3})|V|(\chi - 1) \checkmark$

□

**Satz 5.4** (Fünffarbensatz, HEAWOOD 1890): Für jeden planaren Graphen  $G(V, E)$  ist  $\chi(G) \leq 5$ .

**Beweis :** Induktion über  $|V|$ .

Klar für  $|V| \leq 5$ .

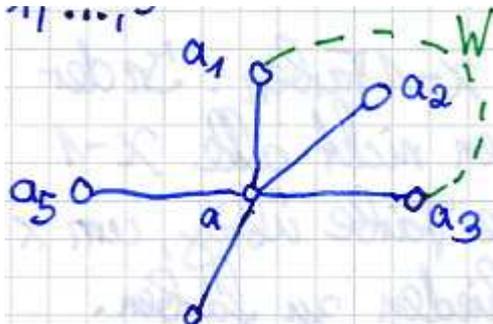
Es sei  $|V| \geq 6$  und Behauptung richtig für  $< |V|$  Ecken.

$G = (V, E)$  liege in der Ebene überschneidungsfrei gezeichnet vor. Kapitel 3, Satz 3.4: Es ex.  $a \in V$  mit  $\gamma(a) \leq 5$ .

$G - a$  kann nach Induktionsannahmen mit den Farben  $1, \dots, 5$  zulässig gefärbt werden.

Man kann annehmen, dass alle Farben  $1, \dots, 5$  in der Nachbarschaft der Ecke  $a$  vorkommen, sonst könnte man eine freie Farbe für  $a$  verwenden (und wäre fertig).

$\Rightarrow \gamma(a) = 5$ , alle fünf Nachbarn  $a_1, \dots, a_5$  von  $a$  sind verschieden gefärbt. Färbung  $F$  o.B.d.A. so, dass  $F(a_i) = i$  für  $i = 1, \dots, 5$ .



$FK(a_i) = FK(i)$  Farbklasse zur Farbe  $i$ .  $V' = FK(1) \cup FK(3)$   
 $G(V')$  von  $V'$  in  $G - a$  induzierter Untergraph.

**1.Fall :**  $a_1, a_3$  liegen in verschiedenen Komponenten von  $G(V')$ . Vertausche in der Komponente von  $a_1$  die Farben 1 und 3. Die Färbung bleibt zulässig. Färbe  $a$  mit Farbe 1.

**2.Fall :**  $a_1, a_3$  liegen in derselben Komponente von  $G(V')$ . Es existiert ein  $a_1, a_3$ -Weg in  $G(V')$ .

Bilde  $V'' = FK(a_2) \cup FK(a_4)$ ,  $G(V'')$ .

In  $G(V'')$  liegen  $a_2$  und  $a_4$  in verschiedenen Komponenten. In der Komponente von  $a_2$  vertausche man die Farben 2 und 4. Färbe  $a$  mit Farbe 2.

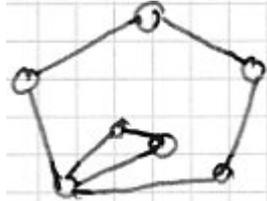
□

**Satz 5.5** (Vierfarbensatz=VFS, bewiesen von Appel, Haken, 1977):  $G$  planar  $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$ .

### Gebietsfärbungen

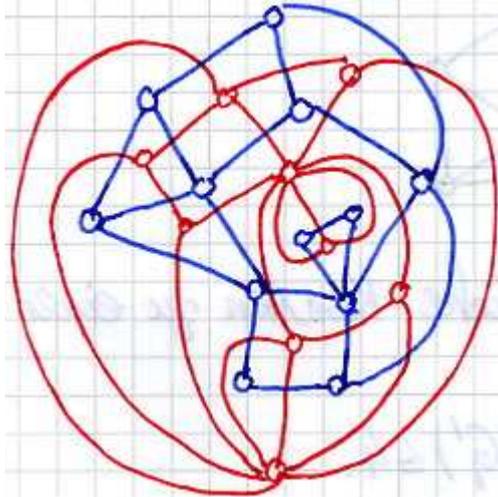
**Definition** (ebene Karte, benachbarte Gebiete, zulässige Gebietsfärbung):

Eine **ebene Karte** ist ein ebener Graph (d.h. ein in der Ebene ohne Kantenüberschneidungen gezeichneter Graph) mit  $|V| \geq 3$  ohne Brücken. In diesem Fall bestehen die Gebietsränder aus kantendisjunkten Kreisen. Gebiete heißen **benachbart**, wenn sie mindestens eine gemeinsame Randkante haben. Eine **zulässige Gebietsfärbung** von  $G$  färbt benachbarte Gebiete verschieden.



$G$  ebene Karte = zusammenhängender ebener Multigraph (d.h. mit Mehrfachkanten, ohne Schlingen) ohne Brücken.

Die zu  $G$  duale Karte  $G^* = (V^*, E^*)$



Markiere in jedem Gebiet von  $G$  genau eine Ecke von  $G^*$ . Ecken von  $G^*$  sind genau dann benachbart, wenn die entsprechenden Gebiete von  $G$  benachbart sind. Führe über jede Kante von  $G$  genau eine Kante von  $G^*$ .

$|E^*| = |E|$ ,  $|V^*| = f$  Anzahl der Gebiete von  $G$ .  $G^{**} \simeq G$ .

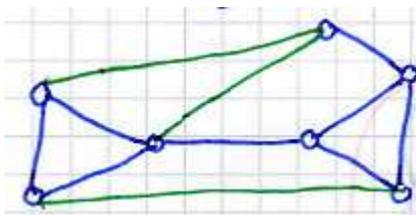
**Satz 5.6 :** Der Vierfarbensatz ist äquivalent zu:

(A) Die Gebiete jeder ebenen Karte ohne Mehrfachkanten können mit  $\leq 4$  Farben zulässig gefärbt werden.

**Beweis :** Es gelte VFS.

Bilde die duale Karte  $G^*$ . Färbe die Ecken von  $G^*$  mit  $\leq 4$  Farben ( $G^*$  ist planar). Übertrage die Farben der Ecken von  $G^*$  auf die Gebiete von  $G$ .

Umkehrung: Es gelte A.  $G$  planar.  $G$  liege ohne Kantenüberschneidung in der Ebene vor.



Ergänze  $G$  durch zusätzliche Kanten zu einer ebenen Karte  $G'$ . Es genügt zu zeigen:  $\chi(G') \leq 4$ . Bilde  $G'^*$ . Mehrfachkanten von  $G'^*$  können durch Unterteilen aufgehoben werden, ohne die Gebiete zu verändern.

Skizze (einer einfachen Unterteilung) FEHLT NOCH

A: Die Gebiete von  $G'^*$  können mit  $\leq 4$  Farben zulässig gefärbt werden. Übertrage die Farben der Gebiete von  $G'^*$  auf die Ecken von  $G'$  bzw.  $G$ . Es entsteht eine zulässige Eckenfärbung von  $G$  mit  $\leq 4$  Farben.

□

**Definition** (kubisch):

**kubisch** = regulär vom Grad 3.

**Satz 5.7 :** Der Vierfarbensatz ist äquivalent zu:

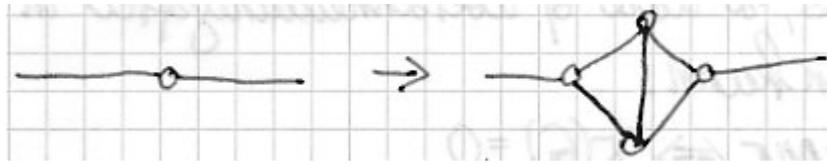
(B) Die Gebiete jeder kubischen, ebenen Karte ohne Mehrfachkanten können mit  $\leq 4$  Farben zulässig gefärbt werden.

**Beweis :** Es gelte B:

Wir zeigen: B  $\Rightarrow$  A.

$G$  sei ebene Karte ohne Mehrfachkanten. Man nehme folgende Ersetzungen vor für Ecken  $a$  mit  $\gamma(a) \neq 3$ :

$\gamma(a) = 2$ :



$\gamma(a) > 3$ :



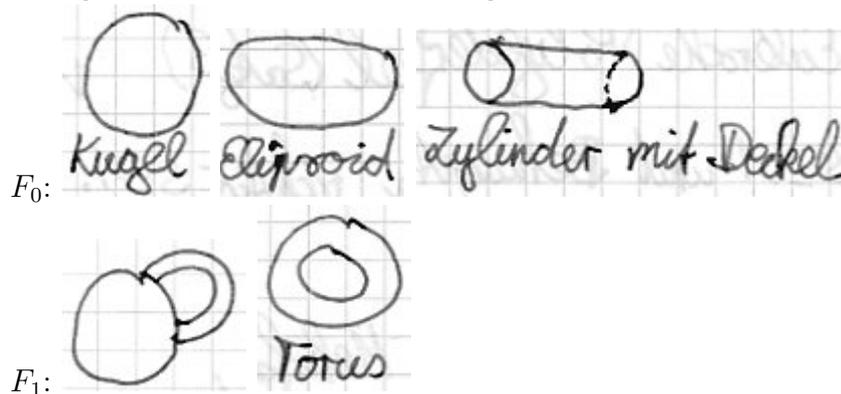
Es entsteht eine kubische, ebene Karte  $G'$ .  $G'$  enthält verkleinert alle Gebiete von  $G$  mit derselben Nachbarschaftsbeziehung wie in  $G$ .

Färbe die Gebiete von  $G'$  zulässig mit  $\leq 4$  Farben. Dann werden auch die Gebiete von  $G$  zulässig mit  $\leq 4$  Farben gefärbt.

□

## 5.1 Das Färbungsproblem auf Flächen höheren Geschlechts

Eine orientierbare Fläche  $F_s$  vom Geschlecht  $s$  entsteht aus einer Kugel mit  $s$  aufgesetzten Henkeln durch stetige Deformation.



**Definition** (Geschlecht eines Graphen, planar, toroidal):

Das **Geschlecht**  $\gamma(G)$  des Graphen  $G$  ist die kleinste Zahl  $s$ , so dass der  $G$  überschneidungsfrei in  $F_s$  eingebettet werden kann.

## 5.1. DAS FÄRBUNGSPROBLEM AUF FLÄCHEN HÖHEREN GESCHLECHTS 57

$G$  planar  $\Leftrightarrow \gamma(G) = 0$ .  
 $G$  toroidal  $\Leftrightarrow \gamma(G) \leq 1$ .

**Definition** (chromatische Zahl  $\chi(F_s)$ ):

Chromatische Zahl von  $F_s$ ,  $\chi(F_s) = \max\{\chi(G) : \gamma(G) \leq s\}$

VFS  $\Leftrightarrow \chi(F_0) = 4$ .

Wir werden zeigen:  $\chi(F_1) = 7$ .

**Satz 5.8** (Eulersche Formel für  $F_s$ ): Der Graph  $G = (V, E)$  habe das Geschlecht  $\gamma(G) \leq s$ .

$G$  sei überschneidungsfrei in  $F_s$  eingebettet.  $G$  zerlege  $F_s$  in  $f$  Gebiete.

Dann gilt:

$$|V| - |E| + f \geq 2 - 2s = e(s)$$

$e(s)$  Euler-Charakteristik von  $F_s$ .

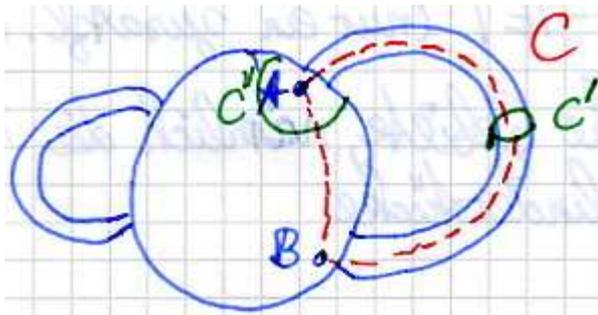
Gleichheit  $\Leftrightarrow \gamma(G) = s$ .

**Beweis :** Wir beweisen nur die Ungleichung.

Induktion über  $s$ .  $s = 0$  Eulersche Polyederformel Kapitel 3 Satz 3.1.  $\checkmark$

Es sei  $s \geq 1$  und die Behauptung sei richtig für  $s - 1$ .

$G$  sei in  $F_s$  eingebettet. Betrachte einen festen Henkel.

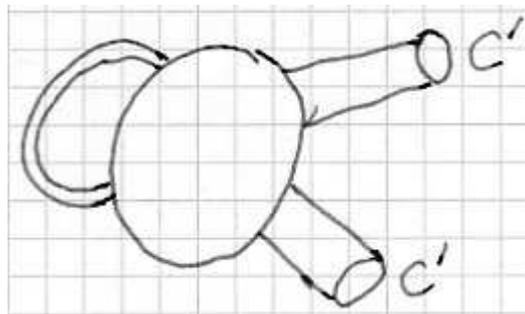


**1. Fall :** Es existiere ein Kreis  $C$  der skizzierten Form, der keine Kante von  $G$  trifft. Schneide den Henkel längs  $C$  auf, den entstehenden Streifen klebe man längs  $AB$  auf die Kugelfläche. Es entsteht eine Einbettung von  $G$  in  $F_{s-1}$ . Wende die Induktionsannahme auf  $F_{s-1}$  an:

$$|V| - |E| + f \geq 2 - 2(s - 1) > 2 - 2s$$

**2. Fall :** (noch eine Extra-Skizze mit dem hier benötigten...) Es existiert in  $G$  ein Kreis der Form  $C'$  bzw.  $C''$  (Nur so ist ein Kreis der Form  $C$  zu vermeiden)

$C''$  kann durch stetige Deformation in die Form  $C'$  gebracht werden. Wir gehen von  $C'$  aus. Schneide den Henkel längs  $C'$  durch. Biege die Henkelstücke zu Zylinderstücken mit Deckelfläche gerade.



Es entsteht eine Fläche  $F_{s-1}$ .

Aus  $G$  wird  $G' = (V', E')$ .  $|V'| - |E'| = |V| - |E|$  (nur ein zusätzliches Exemplar  $C'$ ). Zwei zusätzliche Gebiete, nämlich die Deckelflächen der Zylinderstümpfe.  $f' = f + 2$ . Induktionsannahme anwenden auf  $G'$  in  $F_{s-1}$ :

$$\begin{aligned} |V'| - |E'| + f' &\geq 2 - 2(s - 1) \\ |V| - |E| + f + 2 &\geq 2 - 2s + 2\sqrt{\phantom{x}} \end{aligned}$$

□

**Satz 5.9** (Heawood, 1890):  $\chi(F_s) \leq \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48s}) \rfloor$  für alle  $s \geq 1$ .

**Beweis :**  $G = (V, E)$  zusammenhängend,  $\gamma(G) \leq s$ ,  $|E| \geq 3$ .  $G$  sei in  $F_s$  eingebettet,  $f$  Gebiete. Zähle die Kanten gebietsweise ab.

Im Rand jedes Gebietes liegen mindestens 3 Kanten. Jede Kante liegt im Rand von höchstens 2 Gebieten.

$$\Rightarrow 4f \leq 2|E|, f \leq \frac{2}{3}|E|$$

Eulersche Ungleichung:  $|V| - |E| + f \geq 2 - 2s \Rightarrow |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| \geq 2 - 2s \Rightarrow |E| \leq 3(|V| + 2s - 2)$   
 $2|E| = \sum_{x \in V} \gamma(x) \leq 6(|V| + 2s - 2)$   $d$   
 Durchschnittsgrad,  $d \leq 6 \left(1 + \frac{2s-2}{|V|}\right)$

## 5.1. DAS FÄRBUNGSPROBLEM AUF FLÄCHEN HÖHEREN GESCHLECHTS 59

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48s}) \\
 2g(s) - 7 &= \sqrt{1 + 48s} \\
 4g^2(s) - 28g(s) + 49 &= 1 + 48s \\
 g^2(s) - 7g(s) &= 12s - 12 \\
 g^2(s) - g(s) &= 6g(s) + 12s - 12 \\
 g(s) - 1 &= 6 \left(1 + \frac{2s - 2}{g(s)}\right) \geq 6 \left(1 + \frac{2s - 2}{|V|}\right) \geq d, \text{ für } |V| \geq g(s).
 \end{aligned}$$

Also existiert für  $|V| \geq g(s)$  eine Ecke  $a$  mit  $\gamma(s) \leq g(s) - 1$   $\gamma(s)$  ganz  
 $\Rightarrow \gamma(a) \leq \lfloor g(s) \rfloor - 1$  auch richtig für  $|V| < g(s)$ .

$\gamma(G) \leq s$ , dann hat  $G$  eine Ecke  $a$  mit  $\gamma(s) \leq \lfloor g(s) \rfloor - 1$  (auch wenn  $G$  unzusammenhängend). Bilde eine Minimalgradfolge von  $G$ ,  $\gamma(G) \leq s$ .  $a_1$  sei Ecke kleinsten Grades in  $G$ . Es seien  $a_1, \dots, a_{i-1}$  bereits bestimmt,  $i \geq 2$ . Dann sei  $a_i$  Ecke kleinsten Grades in  $G_i = G - \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ . Färbe die Ecken sequentiell bzgl.  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ . Jede Ecke hat bei ihrer Färbung höchstens  $\lfloor g(s) \rfloor - 1$  gefärbte Nachbarn. Diese Färbung brauchst höchstens  $\lfloor g(s) \rfloor$  Farben.

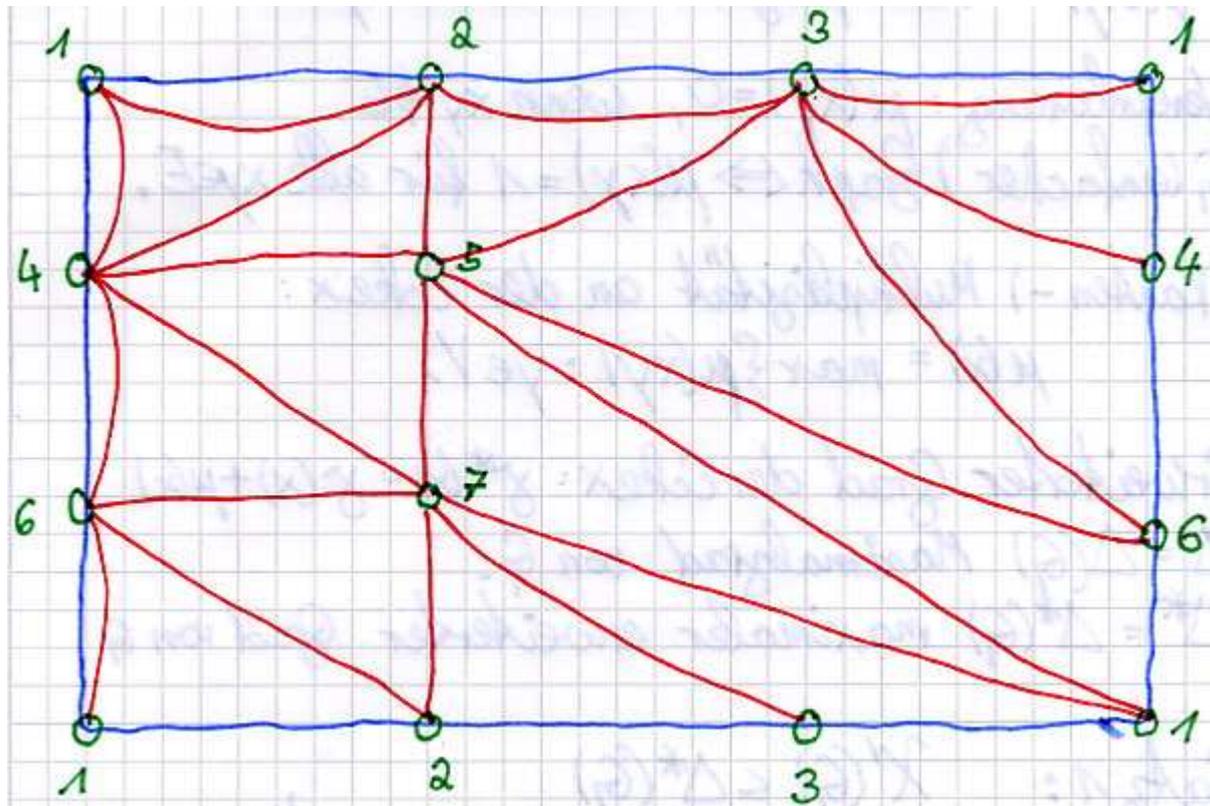
Diese Art der Färbung mit einer Minimalgradfolge heißt **SL-Heuristik** „Smallest Last“.

□

**Satz 5.10 :**  $\chi(s) = \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48s}) \rfloor$

**Beweis :** Beweis für  $s \geq 1$  von Ringel, Youngs 1968  
 $s = 0$  (Vierfarbensatz) durch Apple, Haken 1977

Wir führen den Beweis für  $s = 1$  (Torus). Satz 5.9 für  $s = 1$   $\chi(F_1) \leq 7$ .  
 Wir zeigen: Der  $K_7$  kann in  $F_1$  eingebettet werden. Stelle die Torusfläche durch ein Rechteck dar. Identifiziere gegenüberliegende Randpunkte.



$K_7$  eingebettet in  $F_1$   $\chi(K_7) = 7 \Rightarrow \chi(F_1) = 7$

□

# Kapitel 6

## Kantenfärbungen

**Definition** (zulässig, chromatischer Index):

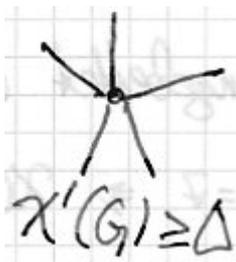
Es sei  $G = (V, E)$  Graph oder Multigraph (keine Schlingen). Eine Färbung der Kanten von  $G$  heißt **zulässig**, wenn benachbarte Kanten verschieden gefärbt werden. Die kleinste Anzahl von Farben in einer zulässigen Kantenfärbung heißt **chromatischer Index**  $\chi'(G)$ .

$\chi(L(G)) = \chi'(G)$   $\mu(xy)$  Multiplizität der Kante  $xy$  Vereinbarung:  $\mu(xy) = 0$ , wenn  $xy \in E$ .  $G$  (einfacher) Graph  $\Leftrightarrow \mu(xy) = 1$  für alle  $xy \in E$ . (Kanten-)Multiplizität an der Ecke  $x$ :

$$\mu(x) = \max\{\mu(xy) : y \in V\}$$

Erweiterter Grad der Ecke  $x$ :  $\gamma^*(x) = \gamma(x) + \mu(x)$   $\Delta = \Delta(G)$  Maximalgrad von  $G$ .  $\Delta^* = \Delta^*(G)$  maximaler erweiterter Grad von  $G$

**Satz 6.1** :  $\chi'(G) \leq \Delta^*(G)$



**Folgerung** : Skizze hier mit  $\chi'(G) \geq \Delta$   $G$  Graph:  $\chi'(G) = \Delta$  oder  $\chi'(G) = \Delta + 1$

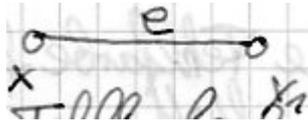
Die Entscheidung  $\chi'(G) = \Delta$  oder  $\chi'(G) = \Delta + 1$  ist NP-vollständig.

**Beweis :**  $G = (V, E)$  sei zusammenhängender Multigraph. Farben:  $1, 2, \dots, \Delta^* = \Delta^*(G)$ . Zu zeigen: Es existiert eine zulässige Kantenfärbung von  $G$  mit diesen  $\Delta^*$  Farben.

Die Kanten werden der Reihe nach gefärbt. Es seien bereits  $k < |E|$ ,  $k \geq 1$ , kanten zulässig gefärbt. Wir zeigen, dass dann eine weitere ungefärbte Kante in die Färbung eingeschlossen werden kann.

Fehlfarben an der Ecke  $x$  sind Farben  $\in \{1, \dots, \Delta^*\}$ , die an der Ecke  $x$  nicht vorkommen. Anzahl der Fehlfarben an der Ecke  $x \geq \Delta^* - \gamma(x) \geq \Delta^* - \gamma(x) \geq \overbrace{(\gamma(x) + \mu(x))}^{\gamma^*(x)} - \gamma(x) = \mu(x)$  An der Ecke  $x$  gibt es mindestens  $\mu(x) \geq 1$  Fehlfarben.

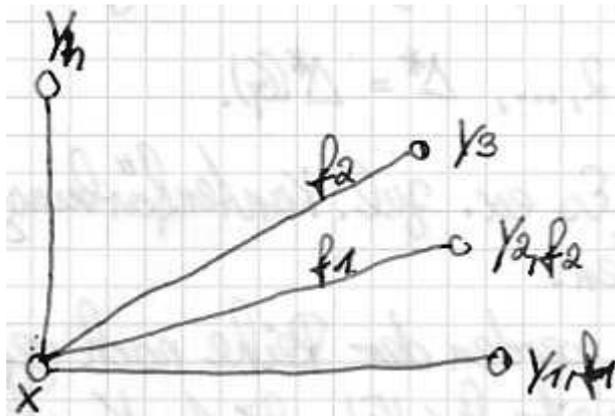
Es sei  $e = xy_1$  eine ungefärbte Kante



Gibt es eine gemeinsame Fehlfarbe  $f$  von  $x$  und  $y_1$ , dann kann man die Kante  $e$  mit  $f$  färben. Wir können voraussetzen, dass jede Fehlfarbe von  $y_1$  bei  $x$  vorkommt und umgekehrt.

**Definition :**

**Fächer:** Folge von Kanten, die mit  $x$  inzidiert.



$f_1$  sei beliebige Fehlfarbe von  $y_1$ .  $f_1$  kommt an  $x$  vor. Es existiert eine Kante  $xy_2$  der Farbe  $f_1$ ,  $y_1 \neq y_2$ .

Gibt es eine gemeinsame Fehlfarbe  $f$  von  $x$  und  $y_2$ , dann sei  $f_2 = f$  und der Fächer damit abgeschlossen,  $h = 2$ .

Andernfalls sei  $f_2$  eine beliebige Fehlfarbe von  $y_2$ .  $f_2$  kommt bei  $x$  vor. Es sei  $xy_3$  eine Kante der Farbe  $f_2$ . Gibt es eine gemeinsame Fehlfarbe  $f$  von  $x$  und  $y_3$ , dann sei  $f_3 = f$  und der Fächer damit abgeschlossen.

Andernfalls:

- Es gibt eine Fehlfarbe  $f_3$  von  $y_3$ , die im Fächer noch nicht auftritt.  $f_3$  kommt bei  $x$  vor. Es sei  $xy_4$  eine Kante der Farbe  $f_3$ .
- Jede Fehlfarbe von  $y_3$  kommt im Fächer schon vor. Dann sei der Fächer abgeschlossen,  $h = 3$ .

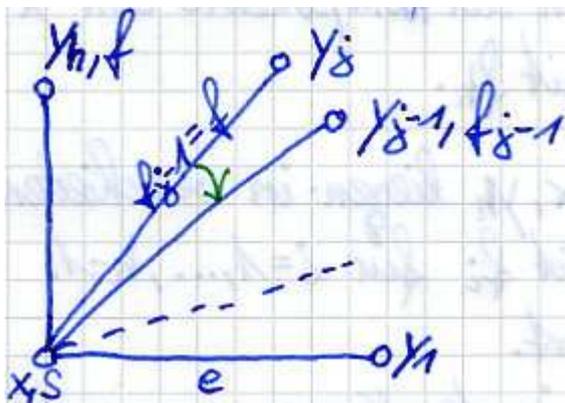
usw. bis der Fächer mit einer Kante  $xy_h$  abgeschlossen wird.

Die Ecken  $y_i$  des Fächers müssen nicht alle verschieden sein.  $y_i \neq y_{i-1}$ . Die Kanten des Fächers sind paarweise verschieden.

**Fall1:**  $x$  und  $y_k$  haben eine gemeinsame Fehlfarbe  $f_h$ .

Mache  $xy_h$  zur ungefärbten Kante. Färbe  $xy_i$  mit Farbe  $f_i$  für  $i = 1, \dots, h-1$ . Färbe  $xy_h$  mit Farbe  $f_h$ .

**Fall2:** Jede Fehlfarbe von  $y_h$  kommt im Fächer bereits vor.



Fehlfarbe  $f$  von  $y_h$  trete an der Kante  $xy_j$  auf,  $j < h$ .  $y_j \neq y_{j-1}$ . Es könnte  $y_{j-1} = y_h$  sein.  $j = j(f)$ .

Wenn jede Fehlfarbe  $f$  bei  $y_h$  zu  $y_{j-1} = y_h$  führt, dann hätte die Kante  $xy_h$  Multiplizität  $\geq \mu(y_h) + 1$ . Widerspruch, da  $\mu(y_h)$  maximale Multiplizität an der Ecke  $y_h$  ist.

$\Rightarrow$  Es existiert eine Fehlfarbe  $f = f_h$  von  $y_h$ , so dass  $y_h \neq y_{j-1}$  ist.  $y_j \neq y_h$ .  $y_{j-1}, y_j, y_h$  sind paarweise verschieden.

Färbe  $xy_i$  mit Farbe  $f_i$  für  $i = 1, \dots, j-1$ .  $xy_j$  ungefärbt.  $s$  sei beliebige Fehlfarbe von  $x$ .  $s$  kommt an jeder Ecke  $y_i$  vor.

Bilde den Untergraphen  $G'$  aus den Kanten der Farben  $s$  und  $f_h$ . Jede Ecke in  $G'$  hat  $\text{Grad} \leq 2$ . Die Komponenten von  $G'$  sind Wege oder Kreise. In jeder Komponente von  $G'$  gibt es höchstens zwei Grad-1-Ecken.

$x, y_j, y_h$  haben Grad 1 in  $G'$ , liegen nicht alle in derselben Komponente von  $G'$ .

**Fall 2.1:**  $x, y_j$  liegen in verschiedenen Komponenten von  $G'$ .

Vertausche in der Komponente von  $x$  die Farben  $s, f_h$ . Färbe  $xy_j$  mit  $f_h$ .

**Fall 2.2:**  $x, y_h$  liegen in verschiedenen Komponenten von  $G'$ .

Färbe  $xy_i$  mit  $f_i$  für  $i = 1, \dots, h-1$ .  $xy_h$  ungefärbt.  $G'$  unverändert.

Vertausche in der Komponente von  $x$  die Farben  $s, f_h$ . Färbe  $xy_h$  mit  $f_h$ .

Treten Fall 2.1, 2.2 nicht ein, dann lägen  $x, y_j$  in einer Komponente, ebenso  $x, y_h$ .

Dann lägen alle drei Ecken  $x, y_j, y_h$  in einer Komponente von  $G'$ . ⚡

□

**Definition** (maximale Multiplizität):

Die **maximale Multiplizität** eines Graphen  $G$  ist  $\mu(G) = \max\{\mu(x) : x \in V\}$ .

Es gilt:

$$\gamma^*(x) = \gamma(x) + \mu(x) \leq \gamma(x) + \mu(G)$$

$$\Delta^*(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$$

**Folgerung** (aus Satz 6.1, VIZING):  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ .

**Satz 6.2** (SHANNON, 1949):  $G$  Multigraph  $\Rightarrow \chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$ .

**Beweis :** Es sei  $\chi'(G) = k$ .

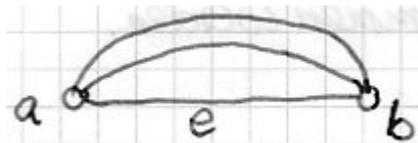
Entferne Kanten aus  $G$  so lange wie  $\chi' = k$  bleibt.

Es entsteht ein **kanten-kritischer** Untergraph  $H$ :

$$\chi'(H - e) = k - 1 \text{ für alle Ecken } e \in E(H).$$

Es sei  $e = ab$  eine Kante mit  $\mu(ab) = \mu(H)$ .

$\chi'(H - e) = k - 1$ . Färbe  $H - e$  mit Farbe  $1, \dots, k - 1$  zulässiger Kantenfärbung.  $a, b$  haben keine gemeinsame Fehlfarbe, da sonst  $\chi'(H) = k - 1$ .



Anzahl der Fehlfarben von  $a$ :  $(k - 1) - (\gamma_H(a) - 1) = k - \gamma_H(a)$   
 Anzahl der Fehlfarben von  $b$ :  $(k - 1) - (\gamma_H(b) - 1) = k - \gamma_H(b)$   
 Anzahl der Fehlfarben von  $a$  und  $b$ :  $2k - \gamma_H(a) - \gamma_H(b) \leq (k - 1) -$   
 $(\underbrace{\mu(G) - 1}_{\leq \text{Anzahl der gemeinsamen Farben von } a \text{ und } b}) = k - \mu(H).$

$\leq$  Anzahl der gemeinsamen Farben von  $a$  und  $b$

Mit der Folgerung oben ergibt sich:  $\chi'(H) = k \leq \Delta(H) + \mu(H),$

$$k - \mu(H) \leq \Delta(H),$$

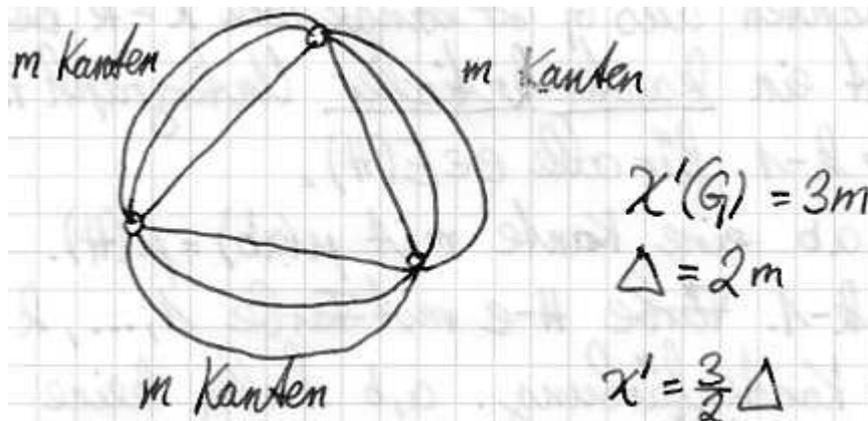
$$\Rightarrow 2k - \gamma_H(a) - \gamma_H(b) \leq k - \mu(H) \leq \Delta(H)$$

$$2k \leq \Delta(H) + \gamma_H(a) + \gamma_H(b) \leq \Delta(G) + \Delta(G) + \Delta(G)$$

$$2\chi'(G) \leq 3\Delta(G).$$

$$\Rightarrow \chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

□



**Beispiel :**

$$3m, \Delta = 2m, \chi' = \frac{3}{2}\Delta.$$

Es kann Gleichheit angenommen werden.

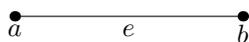
Im Folgenden sei  $G = (V, E)$  einfacher Graph, keine Mehrfachkanten.

Vizing:  $\chi'(G) = \Delta$  oder  $= \Delta + 1$ . Wahrscheinlichkeit für  $\chi'(G) = \Delta$  geht mit  $|V| \Rightarrow \infty$  gegen 1.

**Satz 6.3 :**  $G$  bipartit  $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta$ .

**Beweis :**  $\Delta$  Farben:  $1, 2, \dots, \Delta$  Es liege bereits eine Teilfärbung der Kanten vor.  $e = ab$  ungefärbte Kante.

Wir zeigen:  $e$  kann in die Färbung einbezogen werden.  $a, b$  haben jeweils mindestens eine Fehlfarbe.



Klar, wenn  $a, b$  gemeinsame Fehlfarbe haben.  $\alpha, \beta$  Fehlfarb von  $a$  bzw.  $b$ .

Eine weitere größere Skizze.... FEHLT NOCH

$G'$  Untergraph, aus den Kanten der Farben  $\alpha, \beta$ . Gäbe es einen  $\alpha, \beta$ -Weg zwischen  $a, b$ , dann entstünde zusammen mit  $e$  ein ungerader Kreis. Widerspruch, da  $G$  bipartit.  $a, b$  liegen in verschiedenen Komponenten von  $G'$ . Vertausche in der Komponente von  $a$  die Farben  $\alpha, \beta$ . Färbe  $e$  mit  $\beta$ .

□

Die Farbklassen einer Kantenfärbung sind Matchings. Es sei  $G$  regulär vom Grad  $\Delta$ . Ist  $\chi'(G) = \Delta$ , dann ist jede Farbklasse ein perfektes Matching bzw. ein 1-Faktor von  $G$ , alle Ecken werden durch das Matching überdeckt.  $\chi'(G) = \Delta \Leftrightarrow G$  ist 1-faktorisierbar.

**Satz 6.4 :**  $\chi'(K_n) = \begin{cases} n - 1 & , \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ n & , \text{ wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

**Beweis :** Es sei  $n$  ungerade. Nummeriere die Ecken des  $K_n$ :  $0, 1, \dots, n - 1$   
Färbe die Kante  $xy$  mit Farbe  $x + y \pmod n$ .

Eine weitere Skizze.... (ein großes Ding... bzw. sogar zwei) FEHLT NOCH

$$x + y \equiv x + z \pmod n \Rightarrow y \equiv z \pmod n \Rightarrow y = z \quad \text{⚡}$$

Das gibt eine zulässige Färbung von  $K_n$  mit  $n$  Farben.  $\chi'(K_n) \leq n = \underbrace{\Delta(K_n)}_{n-1} + 1$  Vizing:  $\chi'(K_n) = n$  oder  $n - 1$

$n$  ungerade  $\Rightarrow K_n$  hat kein perfektes Matching  $\Rightarrow \chi'(K_n) = n$

Jede Ecke hat bei obiger Färbung genau eine Fehlfarbe, Ecke  $i$  hat Fehlfarbe  $2i \pmod n$ .  $2i_1 \equiv 2i_2 \pmod n \Rightarrow 2i_1 = 2i_2 + k \cdot n$ ,  $k$  ganz.  $2(i_1 - i_2) = k \cdot n$ ,  $n$  ungerade  $\Rightarrow k$  gerade,  $\frac{k}{2}$  ganz.  $i_1 - i_2 = \frac{k}{2} \cdot n$ ,  $i_1 \equiv i_2 \pmod n \Rightarrow i_1 = i_2$ . Verschiedene Ecken haben verschiedene Fehlfärben. Ergänze  $K_n$  durch die Ecke  $n + 1$  zum  $K_{n+1}$ . Färbe die Kante von  $n + 1$  nach  $i$  mit der Fehlfarbe von  $i$ , d.h. mit  $2i \pmod n$ . Das gibt eine zulässige Kantenfärbung des  $K_{n+1}$  mit  $n$  Farben.  $\chi'(K_{n+1}) = n$ .

□

**Satz 6.5 :**  $G = (V, E)$ , Maximalgrad  $\Delta$ . Ist  $|E| > \Delta \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ , dann ist  $\chi'(G) = \Delta + 1$ .

**Beweis :** Färbe die Kanten von  $G$  mit  $\chi' = \chi'(G)$  Farben. Anzahl der Kanten in einer Farbklasse ist  $\leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ .  $\underbrace{|E|}_{\Delta \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor < |E|} \leq \chi' \cdot \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \Rightarrow \chi' > \Delta$ , Vizing:

$$\chi' = \Delta + 1$$

$$2|E| = \sum_{x \in V} \gamma(x) \leq |V| \cdot \Delta, |E| \leq \frac{|V|}{2} \Delta, =, \text{ wenn } G \text{ regulär.}$$

Bedingung aus dem Satz erfüllbar?  $\Delta \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor < |E| \leq \frac{|V|}{2} \Delta, \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor < \frac{|V|}{2}$

$|V|$  sei ungerade.  $|E| > \Delta \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$  wenn  $\bar{G}$  regulär  $\Delta \frac{|V|-1}{2} = |E| - \frac{1}{2} \Delta |V|$   
 ungerade,  $G$  regulär vom Grad  $\Delta \Rightarrow \Delta$  gerade.

□

**Satz 6.6 :** Entsteht der Graph  $G = (V, E)$  aus einem regulären Graphen mit Grad  $\Delta$ ,  $|V|$  ungerade, durch Entfernen von höchstens  $\frac{\Delta}{2} - 1$  Kanten, dann ist  $\chi'(G) = \Delta + 1$ .

**Beweis :** Folgt aus Satz 6.5.

□

**Satz 6.7 :** Es sei  $H$  regulär, Grad  $\Delta \geq 2$ ,  $|V'|$  gerade.  $G = (V, E)$  entstehe aus  $H = (V', E')$  durch Hinzufügen eines Teilpunktes auf einer beliebigen Kante.

Skizze FEHLT NOCH

Dann ist  $\chi'(G) = \Delta + 1$

**Beweis :**  $|E'| = \frac{|V'|}{2} \Delta$ .  $|V| = |V'| + 1$   $|E| = |E'| + 1 = \frac{|V|}{2} \Delta + 1$   $|E| = \frac{|V|-1}{2} \Delta + 1 = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \Delta + 1 > \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \Delta$ , Satz 6.5:  $\chi'(G) = \Delta + 1$

□

**Satz 6.8 (Tait):** Vierfarbensatz (VFS). Es sei (C) die folgende Aussage (C): Jede kubische ebene Karte ohne Mehrfachkanten hat chromatischen Index  $\chi' = 3$ . Dann ist VFS  $\Leftrightarrow$  (C).

**Beweis :** B: Die Gebiete jeder kubischen, ebene ohne Mehrfachkanten können mit 4 Farben zulässig gefärbt werden. Satz 5.7 §5: VFS  $\Leftrightarrow$  (B). Wir zeigen: (B)  $\Leftrightarrow$  (C). Farben  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  seien die Elemente der Kleinschen Vierergruppe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , + modulo 2.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{ \underbrace{(0, 0)}_{\alpha_0}, \underbrace{(1, 0)}_{\alpha_1}, \underbrace{(0, 1)}_{\alpha_2}, \underbrace{(1, 1)}_{\alpha_3} \}$ .

+, koordinatenweise Addition modulo 3

+	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$\alpha_0$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
$\alpha_3$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_0$

Es gelte (B).  $G = (V, E)$  sei kubische ebene Karte ohne Mehrfachkanten. Die Gebiete von  $G$  seien mit  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  zulässig gefärbt.

Skizze...(eine Kante  $e$  mit verschiedenen Gebieten auf beiden Seiten mit Farben  $\alpha, \beta$ ) FEHLT NOCH

$e$  grenzt an benachbarte Gebiete mit Farben  $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$  an. Färbe  $e$  mit Farbe  $\alpha + \beta$ .

Skizze (3 Gebiete an einer Ecke mit entsprechenden Kantenfarben) FEHLT NOCH

An jeder Ecke stoßen 3 paarweise benachbarte Gebiete zusammen. Farben  $\alpha, \beta, \gamma$  paarweise verschieden.  $\alpha + \beta = \gamma + \beta \Rightarrow \alpha = \gamma$  ⚡ Die Kantenfärbung ist zulässig.  $\alpha + \beta \neq \alpha_0$ , da  $\alpha \neq \beta$ . In der Kantenfärbung treten nur die Farben  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  auf, also  $\chi'(G) = 3$ .

Es gelte (C).  $G = (V, E)$  sei kubische ebene Karte. Die Kanten von  $G$  seien mit 3 Farben  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  zulässig gefärbt.  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .  $\alpha + \alpha = \alpha_0 = 0$ ,  $\alpha = -\alpha$ .  $H_0$  sei ein festes Gebiet. Färbe  $H_0$  mit  $\alpha_0$ .

Skizze (Kreis um Gebiet  $H_0$ , irgendwo ein anderes Gebiet  $H$  mit Rand. Punkte aus dem Inneren verbunden ueber Kurve  $\kappa$ , es werden Kanten getroffen, die mit  $\beta_1$  bis  $\beta_r$  gefärbt sind. Ein Nachbargebiet  $H'$  von  $H$  wurde nachher eingefügt)

FEHLT NOCH

$H$  sei irgendein Gebiet  $\neq H_0$ . Verbinde das Innere von  $H_0$  mit dem Inneren von  $H$  durch eine Kurve  $\kappa$ , die keine Ecke von  $G$  trifft.  $\beta_1, \dots, \beta_r$  sei die Folge der Farben der Kanten, die von  $\kappa$  gekreuzt werden. Färbe  $H$  mit Farbe  $\beta_1 + \dots + \beta_r$  (entsprechend Tabelle der Kleinschen Vierergruppe).

$H'$  sei ein Nachbargebiet von  $H$ . Verlängere  $\kappa$  über eine gemeinsame Randkante der Farbe  $\beta_{r+1}$  in  $H'$  hinein.  $H'$  ist zu färben mit  $\beta_1 + \dots + \beta_r + \beta_{r+1}$ . Sind dann die beiden Gebiete verschieden gefärbt?

$\beta_1 + \dots + \beta_r + \beta_{r+1} = \beta_1 + \dots + \beta_r + \beta_{r+1} \Rightarrow \beta_{r+1} = 0$  ⚡ Die Gebietsfärbung ist zulässig.

**Eindeutigkeit :** Skizze (Zwei Gebiete  $H_0$  und  $H$  wie vorher ueber  $\kappa$  verbunden. Dazu noch andere Kurve  $\kappa'$ , gefärbt bis zum ersten Schnittpunkt mit  $\beta_1$  bis  $\beta_s$  und  $\beta_1'$  bis  $\beta_t'$ )

FEHLT NOCH

Zu zeigen: Farbsumme längs  $\kappa =$  Farbsumme längs  $\kappa'$

Man kann  $\kappa, \kappa'$  ohne Veränderung der Farbsummen so einrichten, dass die Schnittpunkte von  $\kappa$  und  $\kappa'$  nicht auf einer Kante liegen. Es genügt, die Gleichheit der Farbsummen zwischen zwei Schnittpunkten von  $\kappa, \kappa'$  zu zeigen.

$$\beta_1 + \dots + \beta_s = \beta_1' + \dots + \beta_t' \quad (6.1)$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 + \dots + \beta_s - \underbrace{\beta_1' - \dots - \beta_t'}_{=\beta_1' + \dots + \beta_t'} = \alpha_0 \quad (6.2)$$

Es genügt zu zeigen: Längs jeder geschlossenen Kurve  $\kappa$  ist die Farbsumme  $= \alpha_0 = 0$ .

Skizze (Kurve  $\kappa$  mit Farben  $\beta_1$  bis  $\beta_r$ , im Inneren Kanten  $\gamma_i$ , ausserdem noch ein  $a$  drin, davon ausgehend Kanten mit Farben  $\alpha_1, 2, 3$ ) FEHLT NOCH

$\beta_1, \dots, \beta_r$  Farben der Kanten, die von  $\kappa$  gekreuzt werden.  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  Farben der Kanten, die ganz im Inneren  $I_\kappa$  von  $\kappa$  liegen.  $a \in I_\kappa, a \in G$   
 $\sigma(a) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_3 = \alpha_0$

$$\sum_{a \in V(G), a \in I_\kappa} \underbrace{\sigma(a)}_{\alpha_0} = \beta_1 + \dots + \beta_r + \underbrace{2 \cdot (\gamma_1 + \dots + \gamma_s)}_{\alpha_0} = \alpha_0 \Rightarrow \beta_1 + \dots + \beta_r = \alpha_0.$$

□



# Kapitel 7

## Isomorphie von Graphen

**Definition** (Isomorphismus):

$G = (V, E)$ ,  $G' = (V', E')$  einfache, ungerichtete Graphen. Ein **Isomorphismus**  $\varphi : G \rightarrow G'$  ist eine Bijektion  $\varphi : V \rightarrow V'$ , so dass gilt:  $x, y$  benachbart  $\Leftrightarrow \varphi(x), \varphi(y)$  benachbart.  $G \simeq G'$ , wenn ein Isomorphismus  $\varphi : G \rightarrow G'$  existiert.

Bis heute offenbar nicht nachgewiesen, dass das Isomorphieproblem NP-schwer ist.

Adjazenzmatrix  $A = (a_{ij})$  von  $G$ .  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

	$v_1$	$\dots$	$v_j$	$\dots$	$v_n$
$v_1$			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
$v_i$	$\dots$	$\dots$	$v_{ij}$	$\dots$	
$\vdots$					
$v_n$					

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } v_i, v_j \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  Es sei  $\varphi : G \rightarrow G'$  Isomorphismus. Die

Adjazenzmatrix von  $G'$  bzgl. der Nummerierung  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  stimmt mit der Matrix  $A$  für  $G$  überein.  $G, G'$  sind genau dann isomorph, wenn ihre Adjazenzmatrizen bei geeigneter Nummerierung der Ecken übereinstimmen. Theoretisch kann man Isomorphie testen, indem man alle  $n!$  möglichen Adjazenzmatrizen von  $G$  aufstellt. Durch notwendige Bedingungen können viele Eckenpermutationen ausgeschlossen werden. Man kann aus einer festen Adjazenzmatrix  $A$  von  $G$  alle anderen Adjazenzmatrizen erzeugen, indem man auf alle mögliche Arten Zeilen permutiert und dann dieselbe Permutation auf die Spalten anwendet.

$\pi \in S_n$ , d.h.  $\pi$  ist Permutation von  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $\pi$  kann durch eine Permutationsmatrix  $P(\pi) = P$  beschrieben werden. In der  $i$ -ten Zeile von  $P$  steht die  $\pi(i)$ -te Zeile der Einheitsmatrix  $I$ .

$$\text{Beispiel : } \underbrace{\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \hline \pi(i) & 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{array}}_P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Multiplikation der Matrix  $A$  von links mit  $P$  bewirkt in  $A$  dieselben Zeilenpermutationen, mit denen man  $P$  aus der Einheitsmatrix erhält. Permutationsmatrizen sind orthogonale Matrizen:  $P^{-1} = P^T$ .

$$\text{Beispiel : } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{P^T} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Multiplikation der Matrix  $A$  von rechts mit  $P^T = P^{-1}$  bewirkt in  $A$  dieselben Spaltenpermutationen, mit denen man  $P^T$  aus  $I$  erhält.

Man erhält aus der Adjazenzmatrix  $A$  von  $G$  alle anderen Adjazenzmatrizen von  $G$ , indem man  $PAP^{-1}$  für alle Permutationsmatrizen  $P$  bildet.  $n!$  Matrizen  $P$ .

Alle Adjazenzmatrizen von  $G$  sind zueinander ähnlich.

Lineare Algebra: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.  $\chi_A(x) = \chi_G(x)$  heißt das **charakteristische Polynom** von  $G$ . Nullstellen von  $\chi_G(x)$  heißen **Eigenwerte** von  $G$ .  $\det A = \chi_A(0) = \det(G)$ .

### Definition :

Eine **Graphen-Invariante** ist eine Größe, die unter Isomorphismen unverändert bleibt.

**Beispiel :** Beispiele Für Grapheninvarianten:

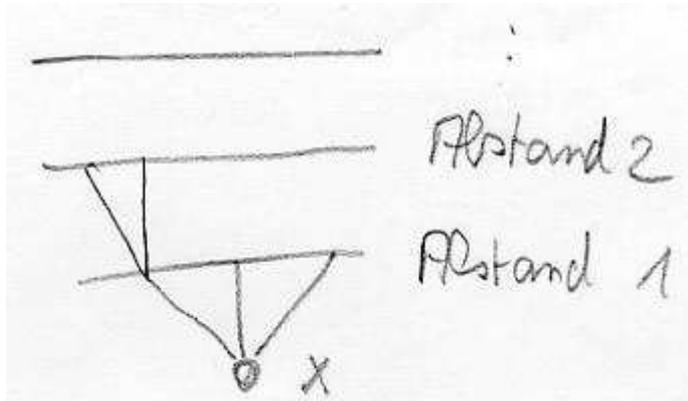
$|V|$ ,  $|E|$ ,  $\omega(G)$  (Clique-Zahl),  $\chi(G)$ ,  $\chi_G(x)$ ,  $\det(G)$ , Gradfolge nichtfallend sortiert, Anzahl aller Kreise vorgegebener Länge in  $G$ .

**Definition :**

Eine einschränkende Graphen-Funktion  $F_G$  ist auf der Eckenmenge eines beliebigen Graphen definiert, so dass gilt: Ist  $\varphi : G \Rightarrow G'$  ein Isomorphismus, dann ist  $G_G(x) = F_G(\varphi(x))$  für alle Ecken  $x$ .

**Beispiel :** Einschränkende Graphen-Funktionen sind zum Beispiel:

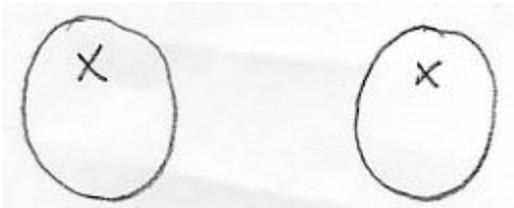
- Gradfunktion  $\gamma_G(x)$
- Anzahl aller Dreiecke, die  $x$  enthalten
- Anzahl der Ecken im Abstand  $k$  von  $x$ .



$F_G$  definiert eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge  $V$  von  $G$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow F_G(x) = F_G(y)$$

Das gibt eine Partitionierung  $K_1, \dots, K_r$  der Eckenmenge (in Äquivalenzklassen). Wert  $F_G(K_i) = F_G(x)$  für ein  $x \in K_i$ . Man zerlege entsprechend die Eckenmenge  $V'$  von  $G'$  bzgl.  $F_{G'}$  in Klassen  $K'_1, \dots, K'_q$ .  $G \simeq G' \Rightarrow q = r$  und jede Klasse  $K_i$  muss auf eine Klasse  $K'_j$  gleichen Wertes bijektiv abgebildet werden. Es seien  $F_G^{(1)}, F_G^{(2)}$  seien einschränkende Graphenfunktionen. Man definiere  $F_G(x) = (F_G^{(1)}(x), F_G^{(2)}(x))$ . Man versucht auf diese Weise, Graphenfunktionen zu konstruieren, die zu einer möglichst feinen Partitionierung der Eckenmenge führen.



Danach werden die verbleibenden Möglichkeiten für einen Isomorphismus durchprobiert.

Zuvor: Vergleich einfach zu berechnender Grapheninvarianten.

$G \simeq G'$ ,  $V = V' = \{1, \dots, n\}$ .

Anzahl der Isomorphismen = Anzahl der Automorphismen von  $G$   
 = Elementanzahl der Automorphismengruppe,  $|Aut(G)|$ .

**Bemerkung :** Die Größe der Automorphismengruppe, also  $|Aut(G)|$  ist ein Maß für die Symmetrie von  $G$ . Zufallsgraphen sind im Allgemeinen äußerst unsymmetrisch, d.h.  $|Aut(G)| = 1$ .

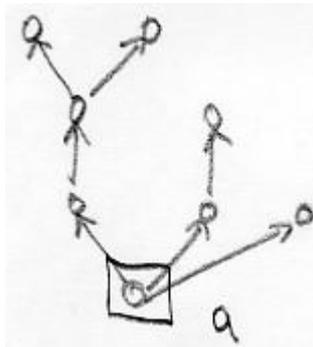
Nur bei sehr symmetrischen Graphen  $G \simeq G'$  muss man mit vielen Isomorphismen rechnen.

## Isomorphie von Wurzelbäumen

**Definition** (Wurzelbaum, Wurzel, Isomorphie von Wurzelbäumen):

Ein **Wurzelbaum**  $W = (B, a)$  besteht aus einem Baum  $B$  und einer ausgezeichneten Ecke  $a$ , der **Wurzel** von  $W$ .

Wurzelbäume  $W = (B, a)$ ,  $W' = (B', a')$  sind **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus  $\varphi : B \rightarrow B'$  gibt mit  $\varphi(a) = a'$ .



**Bemerkung :**

Orientiert man die Knoten ausgehend von der Wurzel „nach oben“, so ergibt sich eine Vorgänger-Nachfolger-Relation.

**Definition** (Zertifikat, Nachbar-Wurzelbäume):

Wir definieren rekursiv das **Zertifikat**  $Cert(W)$ :  $|V(B)| = n$ .

$n = 1$    $Cert(W) = 01$

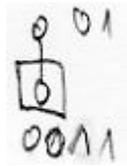
Es sei  $n \geq 2$ .  $a_1, \dots, a_r$  seien die Nachbarn der Wurzel  $a$ . Die auf den  $a_i$  aufsitzenden Zweige können als Wurzelbäume  $W_i = (B_i, a_i)$  aufgefasst werden. Die  $W_i$  sind die **Nachbar-Wurzelbäume** von  $a$ . Die Zertifikate

$Cert(W_i)$  sind bereits bekannt. Ordne die Zertifikate  $Cert(W_i)$  lexikographisch  $\leq$ , d.h nicht-fallend, zu  $Cert(W_{i_1}), \dots, Cert(W_{i_r})$ . Dann sei  $Cert(W) = 0, Cert(W_{i_1}), \dots, Cert(W_{i_r}), 1$  (Kommata werden weggelassen).

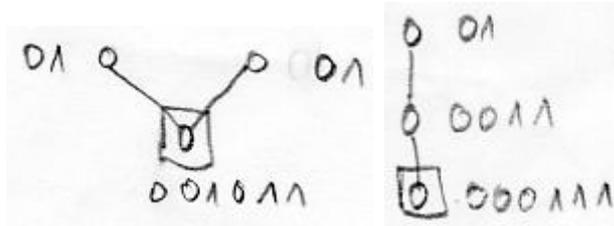
Beispiel :  $n = 1$ :



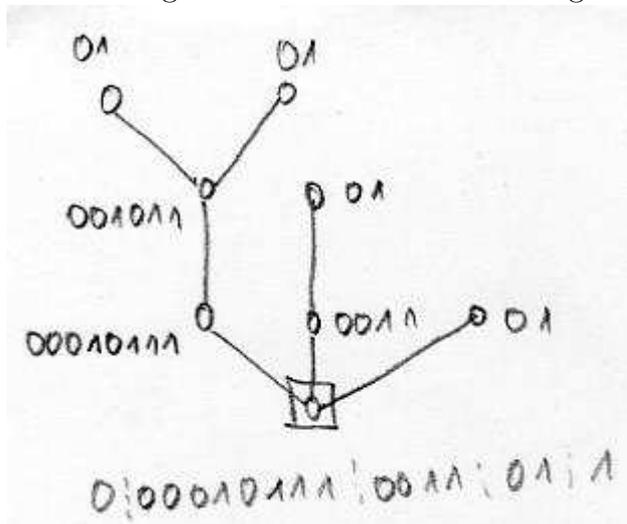
$n = 2$ :



$n = 3$ :



Bestimmung des Zertifikates eines etwas größeren Wurzelbaumes:



Bemerkung :

- Anzahl der Nullen am Anfang eines Wortes = Anzahl der Ecken in einem längsten Weg von der Wurzel zu einem Blatt.
- Jede Ecke trägt genau eine 0 und genau eine 1 zum Zertifikat bei, d.h. Wortlänge =  $2n$ .

- Gleich viele Nullen und Einsen in jedem Wort.
- Für jede Zwischenposition  $i$  in  $\text{Cert}(W)$ ,  $1 \leq i \leq 2n - 1$  gilt:  
Die Anzahl der Nullen bis Position  $i$  ist größer als die Anzahl der Einsen bis zu dieser Position. Der Ausgleich erfolgt erst mit der letzten Eins. Der Unterschied zwischen Einsen und Nullen bis zu der Position heißt auch die **Bilanz**. Die Bilanz ist ausgeglichen, wenn gleich viele Einsen und Nullen vorhanden sind.

**Satz 7.1 :** Wurzelbäume sind genau dann isomorph, wenn sie dasselbe Zertifikat haben.

**Beweis :**  $W \simeq W' \Rightarrow \text{Cert}(W) = \text{Cert}(W')$ .

**Umkehrung:**  $W = (B, a)$  und  $W' = (B', a')$  haben dasselbe Zertifikat.  
**zu zeigen:**  $W \simeq W'$ .

Induktion über die Eckenanzahl  $n$   
 $n = 1, 2, 3$  siehe Beispiel  $\surd$

**Annahme:**  $n \geq 4$  und Behauptung richtig für alle Wurzelbäume mit weniger als  $n$  Ecken.

$\text{Cert}(W) = \text{Cert}(W') = C$ .

Man kann aus  $C$  die Zertifikate der Nachbarwurzelbäume  $W_1, \dots, W_r$  bzw.  $W'_1, \dots, W'_r$  wie folgt ermitteln:

- Entferne aus  $C$  die erste 0 und die letzte 1.
- Durchlaufe dann  $C$  von links bis das erste Mal Anzahl Nullen = Anzahl Einsen ist. Das ergibt  $\text{Cert}(W_1) = \text{Cert}(W'_1)$ . Beim nächsten Ausgleich hat man  $\text{Cert}(W_2) = \text{Cert}(W'_2)$  usw. bis  $\text{Cert}(W_r) = \text{Cert}(W'_r)$ .

Nach Induktionsannahme existiert ein Isomorphismus  $\varphi_i : W_i \rightarrow W'_i$ . Das ergibt den Isomorphismus  $\varphi : W \rightarrow W'$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{für } x \in W_i \\ a' & \text{für } x = a. \end{cases}$$

□

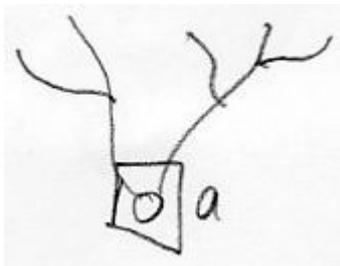
## Isomorphie von Bäumen

**Definition** (Zertifikat eines Baumes):

Das Zentrum  $Z(B)$  eines Baumes besteht entweder aus einer Ecke oder aus zwei benachbarten Ecken (siehe OR III).

Wir definieren das Zertifikat  $Cert(B)$ .

**1.Fall :**  $Z(G) = \{a\}$  Zentrale Ecke muss unter einem Isomorphismus auf zentrale Ecke abgebildet werden.  $B$  kann als Wurzelbaum  $(B, a)$  aufgefasst werden. Setze  $Cert(B) := Cert(B, a)$ .

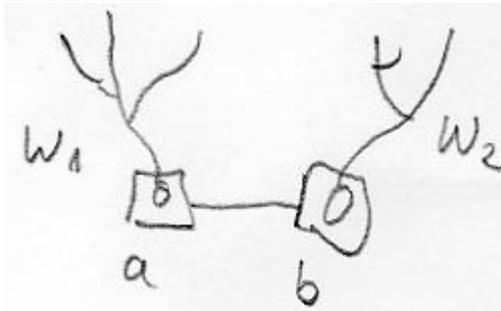


**2.Fall :**  $Z(G) = \{a, b\}$

$W_1$  Wurzelbaum mit Wurzel  $a$ .

$W_2$  Wurzelbaum mit Wurzel  $b$ .

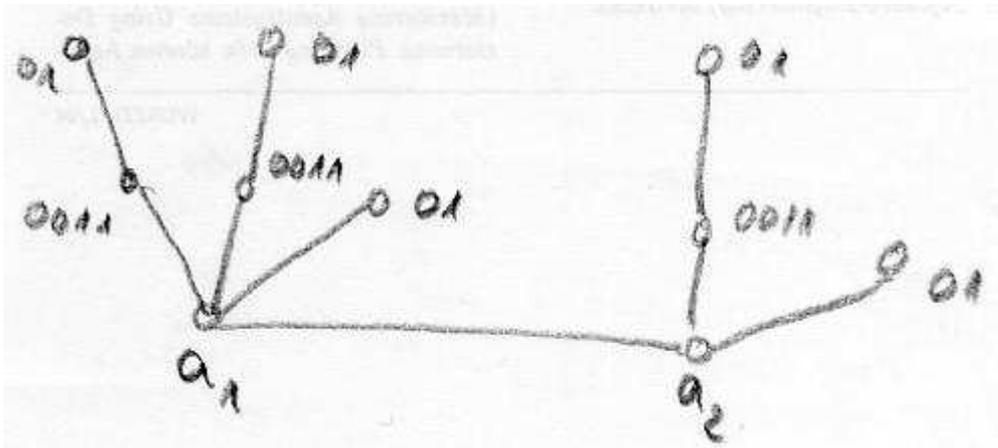
Setze  $Cert(B) = Cert(W_{i_1}), Cert(W_{i_2})$ , wobei die einzelnen Zertifikate lexikographisch  $\leq$  geordnet sind.



**Satz 7.2 :** Bäume sind genau dann isomorph, wenn ihre Zertifikate übereinstimmen.

**Beispiel :** Bestimmung des Zertifikates eines Baumes. Zu einer ausführlichen Beschreibung des Algorithmus siehe Umdruck 4. Beachte, dass bei der zweiten Veränderung des Zertifikates des untersten Knotens nicht das ganze Zertifikat aus allen Nachbarn neu bestimmt werden muss, sondern lediglich das neu hinzugekommene Zertifikat hinter der führenden 0 eingefügt werden muss.







# Kapitel 8

## stark reguläre Graphen

**Definition** (Exzentrizität):

**Exzentrizität**  $e(x) = \max\{d(x, y) : y \in Y\}$ ,  $G = (V, E)$  ungerichtet, einfach.  $e(x) = \infty$ , wenn  $G$  unzusammenhängend.

**Durchmesser**  $d(G) = \max\{e(x) : x \in V\}$

**Radius**  $r(G) = \min\{e(x) : x \in V\}$

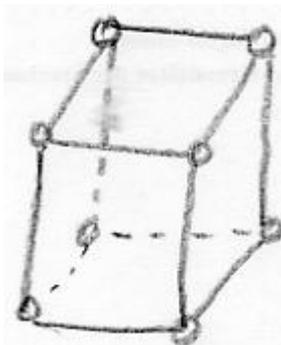
**Zentrum**  $Z(G) = \{x \in V : e(x) = r(G)\}$ . Manchmal bezeichnet man als Zentrum auch den von  $Z(G)$  induzierten Untergraphen.

$G$  **selbstzentral**  $\Leftrightarrow G = Z(G) \Leftrightarrow e(x) = r(G) = d(G)$  für alle  $x \in V$



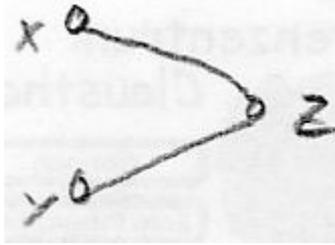
**Beispiel** : Beispiele für selbstzentrale Graphen sind:  $C_n$ :

$K_n$ ,  $r(G) = d(G) = 1$ , Würfel  $Q_d$ , Dimension  $d$ .  $r(G) = d(G) = d$ .



**Satz 8.1** : Fast alle Graphen sind selbstzentral und haben  $r(G) = 2$

**Beweis :** Wir erzeugen Zufallsgraphen  $G = (V, E)$ ,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Die Kante  $xy$  wird mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  gezogen bzw. weggelassen.  
 $P(xy \in E) = P(xy \notin E) = \frac{1}{2}$ .



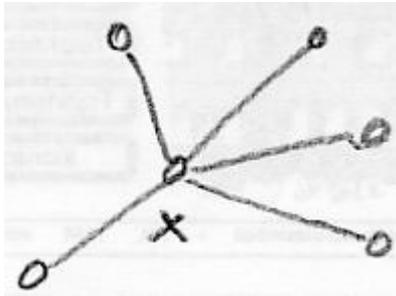
$$P(xz \notin E \vee yz \notin E) = 1 - \underbrace{P(xz \in E \wedge yz \in E)}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

$$P(\forall z \neq x, y(xz \notin E \vee yz \notin E)) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

$P(d(x, y) \geq 3) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ , wobei die erste  $1/2$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die Kante  $xy$  nicht existiert.

$$P(\exists x(e(x) \geq 3)) = P(\exists x, y(d(x, y) \geq 3)) \leq \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{Anzahl der Paare}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .



$$P(e(x) = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad P(\exists x(e(x) = 1)) \leq n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$$

$$P(\exists x(e(x) \geq 3) \vee \exists x(e(x) = 1)) = P(\exists x e(x) \neq 2) \leq \binom{n}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow P(\underbrace{\forall x(e(x) = 2)}_{\Leftrightarrow G \text{ selbstzentral mit Radius } 2}) \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

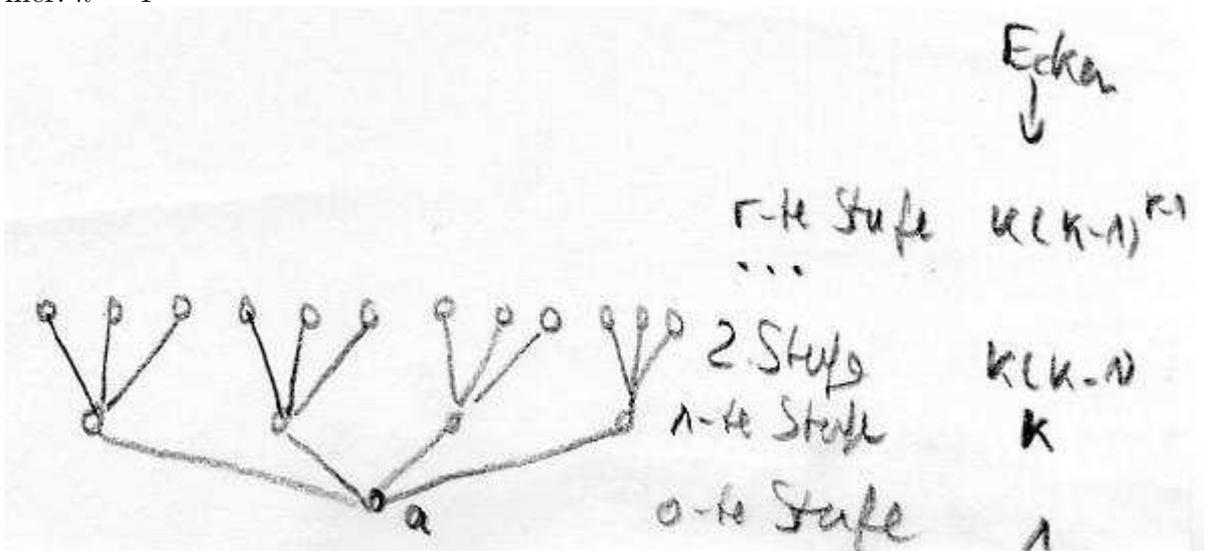
□

Im Folgenden sei  $G = (V, E)$  selbstzentral, regulär vom Grad  $k$ , Radius  $r$ . Die Klasse dieser Graphen sei  $SZ(k, r)$ ,  $k \geq 2$ ,  $r \geq 2$ .  $F(k, r)$  sei die maximale Anzahl von Ecken eines Graphen  $\in SZ(k, r)$ .

**Satz 8.2 :**  $F(k, r) \leq 1 + k + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{r-1} = F_0(k, r)$ .

**Beweis :** Breitensuche mit beliebiger Startecke  $a$ .

hier:  $k = 4$



Versuche möglichst alle Nachbarmengen disjunkt zu halten.

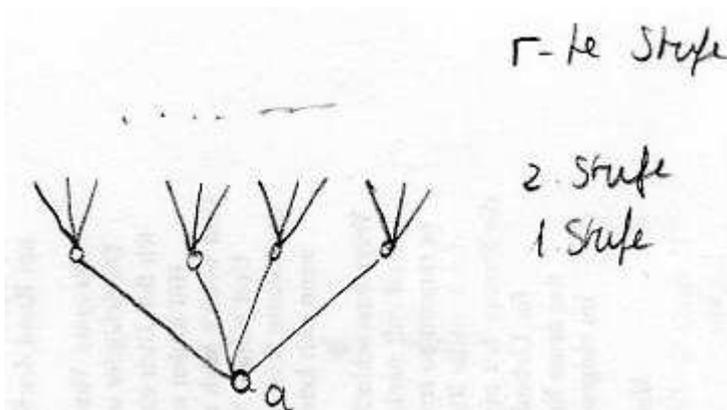
$F(k, r) \leq$  Summe der Ecken in den Stufen  $\leq 1 + k + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{r-1}$ .

□

**Definition (MOORE Graph):**

Graphen  $\in SZ(k, r)$  mit Eckenanzahl  $|V| = F_0(k, r)$  heißen **Moore Graphen**.

**Bemerkung :** Für einen MOORE Graphen muss Breitensuche mit *beliebiger* Startecke  $a$  so aussehen:

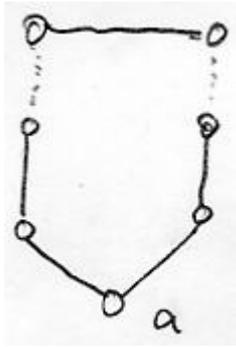


Keine Kante innerhalb einer Stufe außer in der  $r$ -ten Stufe.

Ein MOORE Graph mit Radius  $r$  enthält keinen Kreis der Länge  $< 2r+1$ .

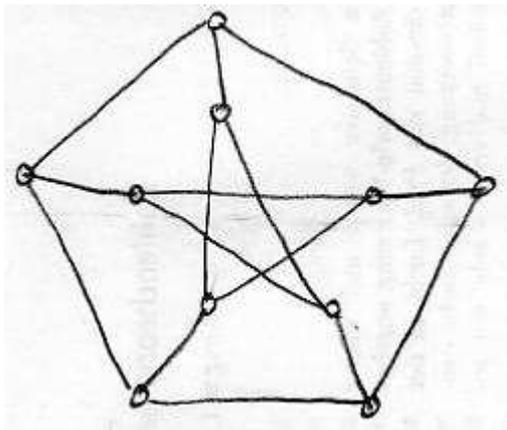
Sei  $r \geq 2 \Rightarrow G$  hat kein Dreieck und kein Viereck.

$k = 2, G = C_{2r+1}$



Es gibt keinen MOORE Graphen mit  $r = 2, k = 2$  Kreis  $C_5$ .

$r = 2, k = 3$  PETERSEN Graph



$r = 2, k = 7$  HOFFMANN-SINGLETON

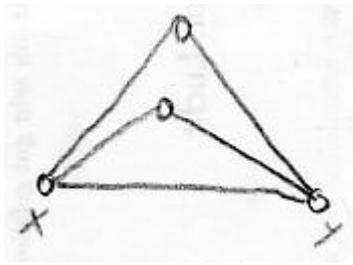
$r = 2, |V| = 1 + k + k(k-1) = 1 + k^2$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch  $k, r$ .

Eventuell gibt es noch einen MOORE Graphen mit  $r = 2, k = 57$

**Definition** (stark regulär):

Der Graph  $G = (V, E)$  heißt **stark regulär**,  $G \in SRG(n, k, \lambda, \mu)$ , wenn gilt:

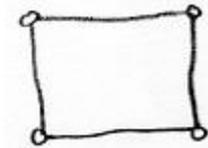
- (i)  $G$  ist regulär vom Grad  $k$ .
- (ii) Je zwei benachbarte Ecken  $x, y$  haben  $\lambda \geq 0$  gemeinsame Nachbarn.



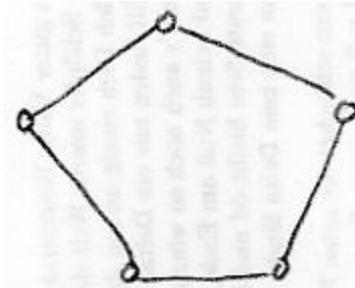
(iii) Je zwei nicht benachbarte Ecken  $x, y$  haben  $\mu > 0$  gemeinsame Nachbarn.

**Bemerkung :**  $\lambda > 0 \Rightarrow G$  zusammenhängend.

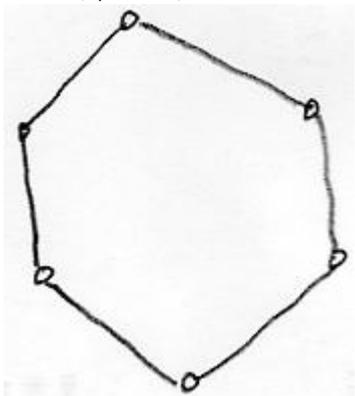
**Beispiel :**  $K_n$  nicht stark regulär.  $k < n - 1$



$k = 2, \mu = 0, \lambda = 2$

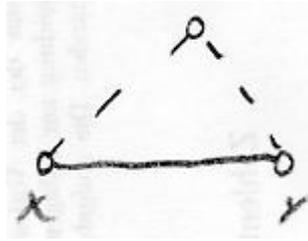


$k = 2, \mu = 0, \lambda = 1$



nicht stark regulär

**Beispiel :**  $G$  MOORE Graph,  $r = 2, |V| = k^2 + 1$  ist regulär vom Grad  $k$ .

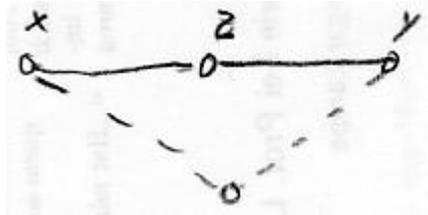


Keine Dreiecke  $\Rightarrow \mu = 0$ .

Es seien  $x, y$  nicht benachbart.

$r = 2 \Rightarrow d(x, y) = 2$ .

Es existiert Weg  $xzy$



$z$  ist gemeinsamer Nachbar von  $x, y$ . Kein weiterer gemeinsamer Nachbar, da keine Vierecke in  $G$ .  $\lambda = 1$

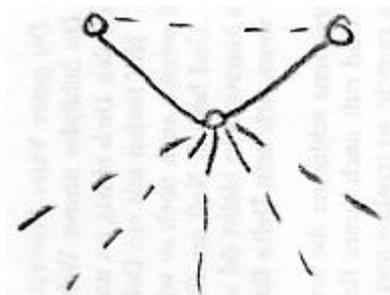
$G \in SRG(k^2 + 1, k, 0, 1)$ .

**Beispiel :**  $G = L(K_n)$  Kantengraph.

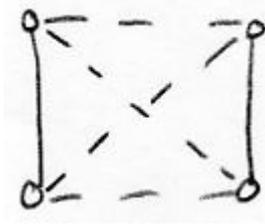
$$|V(G)| = |E(K_n)| = \binom{n}{2}.$$



$G$  ist regulär vom Grad  $k = 2(n - 2)$



$$\lambda = (n - 3) + 1 = n - 2$$



$$\mu = 4$$

$$G = L(K_{n,n}) \in SRG\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$$

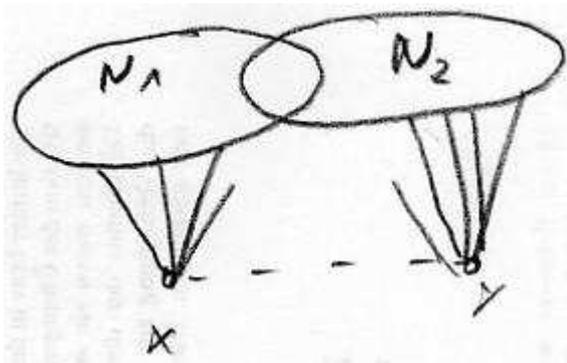
$$G = L(K_{n,n}) \in SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$$

**Satz 8.3 :** Es sei  $G \in SRG(n, k, \lambda, \mu)$ . Dann ist der komplementäre Graph

$$\bar{G} \in SRG(n, n-1-k, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda)$$

**Beweis :**  $\bar{k} = n-1-k \quad \checkmark$

$x, y$  seien in  $G$  nicht benachbart, also in  $\bar{G}$  benachbart.  $N_1, N_2$  Nachbarmenge von  $x$  bzw.  $y$  in  $G$ .



$\bar{\lambda}$  = Anzahl der Ecken, die in  $G$  weder zu  $x$  noch zu  $y$  benachbart sind.

$$|N_1 \cup N_2| = \underbrace{|N_1|}_k + \underbrace{|N_2|}_k - \underbrace{|N_1 \cap N_2|}_\mu = 2k - \mu$$

$$\bar{\lambda} = |V \setminus \{N_1 \cup N_2 \cup \{x, y\}\}| = n - (2k - \mu) - 2 = n - 2k - 2.$$

Es seien dann  $x, y$  in  $G$  benachbart, also in  $\bar{G}$  nicht benachbart.

$\bar{\mu}$  = Anzahl der Ecken  $\neq x, y$  die weder zu  $x$  noch zu  $y$  benachbart sind in  $G$ .

$N_1$  = Nachbarmenge von  $x$  ohne  $y$ .

$N_2$  = Nachbarmenge von  $y$  ohne  $x$ .

$$|N_1 \cup N_2| = \underbrace{|N_1|}_{k-1} + \underbrace{|N_2|}_\lambda = 2k - \lambda - 2$$

$$\bar{\mu} = |V \setminus \{N_1 \cup N_2 \cup \{x, y\}\}| = n - (2k - \lambda - 2) - 2 = n - 2k + \lambda$$

Eigentlich müsste man nun noch überprüfen, dass  $\lambda \geq 0$  und  $\mu > 0$ .

□

**Folgerung :** Für  $G \in SRG(n, k, \lambda, \mu)$  muss gelten:

- (i)  $n - 2k + \mu - 2 \geq 0$ ,
- (ii)  $n - 2k + \lambda \geq 0$ .

$A = (a_{ij})$  sei Adjazenzmatrix des Graphen  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $A = A^T$ . Alle Eigenwerte sind reell. Eigenwerte und charakteristischen Polynom  $\chi_A(x)$  sind Graphen-Invarianten. Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar. Algebraische Ordnung = geometrische Ordnung für Eigenwerte. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind bei symmetrischen Matrizen orthogonal.

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Satz 8.4 :**

- (i)  $G$  regulär vom Grad  $k \Leftrightarrow \underline{1}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $k$  der Adjazenzmatrix  $A$ .
- (ii) Es sei  $G$  regulär vom Grad  $k$  und  $G$  zusammenhängend. Dann gilt:
  - (a)  $k$  ist einfacher Eigenwert von  $G$ .
  - (b) Für jeden anderen Eigenwert  $\lambda$  von  $G$  gilt:  $|\lambda| \leq k$ .

**Beweis :**

- (i)  $A = (a_{ij})$  Adjazenzmatrix von  $G$ .  $G$  regulär vom Grad  $k$ .  $\Leftrightarrow$  Jede Zeile von  $A$  hat genau  $k$  Einsen.

$$\Leftrightarrow A\underline{1} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{1} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert (EW) } k.$$

- (ii)  $G$  zusammenhängend und regulär vom Grad  $k$ .

Es sei  $x = (x_i)$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

$$Ax = \lambda x, \text{ mit } |V| = n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

Wähle  $i$  so, dass  $|x_i|$  maximal ist.  $x \neq 0$ ,  $|x_i| > 0$ . Bilde den Betrag auf beiden Seiten der Gleichung. (\*)  $|\lambda||x_i| = |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| = |x_{j_1} + \dots + x_{j_k}| \leq |x_{j_1}| + \dots + |x_{j_k}| \leq k|x_i|$   $j_1, \dots, j_k$  Nachbarn der Ecke

$i$ .

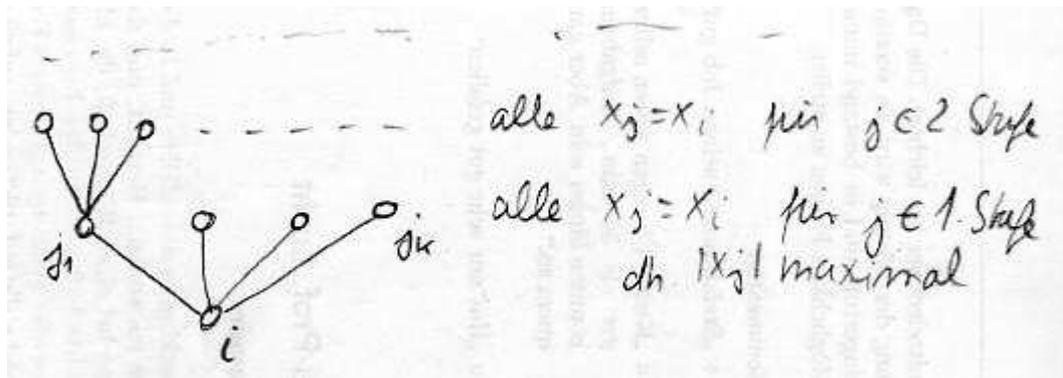
Kürzen:  $|\lambda| \leq k$  (auch wenn  $G$  nicht zusammenhängend ist)  $\Rightarrow$  2b)

Setze in (\*)  $\lambda = k$ .  $|x_{j_1} + \dots + x_{j_k}| = |x_{j_1}| + \dots + |x_{j_k}| = k|x_i|$

$\Rightarrow x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = x_i$  oder  $x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = -x_i$ ,

andererseits  $x_{j_1} + \dots + x_{j_k} = kx_i$ .

Also  $x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = x_i$ . Breitensuche mit Startecke  $i$ .



Alle  $x_j = x_i$  für  $j \in 1$ . Stufe

Alle  $x_j = x_i$  für  $j \in 2$ . Stufe

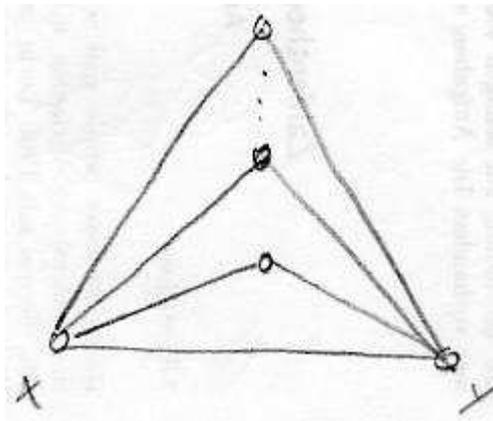
...

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} = x_i \mathbf{1}.$$

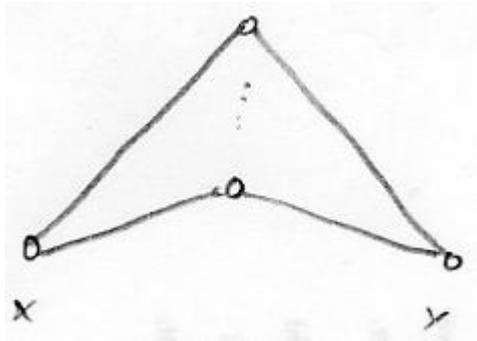
Eigenraum  $E_k$  zum EW  $k$  ist  $E_k = [\mathbf{1}]$ .  $\dim E_k = 1 \Leftrightarrow k$  einfacher EW.

□

$G \in SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ;  $|V| = n$ ,  $G$  regulär vom Grad  $k$ .



$\lambda$  gemeinsame Nachbarn.



$\mu$  Anzahl der gemeinsamen Nachbarn.  $\mu > 0 \Rightarrow G$  zusammenhängend.

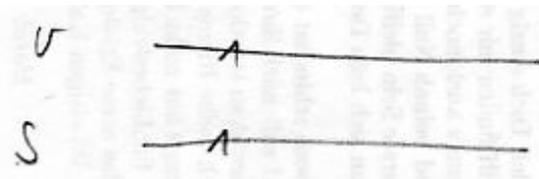
**Satz 8.5 :**  $A = (a_{ij})$  sei Adjazenzmatrix von  $G$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$ ,  $k, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ,  $i < k < n - 1$ ,  $\mu > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ . Dann gilt:

$$G \in SRG(n, k, \lambda, \mu) \Leftrightarrow A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I \stackrel{(*)}{=} \mu J.$$

**Beweis :**  $A = A^T$ .  $AA^T = A^2 = (c_{rs})$

$c_{r,r} =$  Anzahl der Nachbarn der Ecke  $r$ .

$r \neq s$   $c_{r,s} =$  Anzahl der gemeinsamen Nachbarn der Ecken  $r$  und  $s$ .



Vergleiche die Hauptdiagonaleinträge auf beiden Seiten von (\*).

$c_{r,r} + (\mu - \lambda) \cdot 0 + (\mu - k) \cdot 1 = \mu$ ,  $c_{r,r} = k$ . Alle  $c_{r,r} = k \Leftrightarrow G$  regulär vom Grad  $k$ .

Vergleiche die Einträge in Position  $(r, s)$ ,  $r \neq s$ .

Fall 1:  $r, s$  benachbart,  $a_{r,s} = 1$

$c_{r,s} + (\mu - \lambda) \cdot 1 + (\mu - k) \cdot 0 = \mu$ ,  $c_{r,s} = \lambda$  für alle  $r \neq s$ ,  $r$  und  $s$  benachbart.

Fall 2:  $r, s$  nicht benachbart,  $a_{r,s} = 0$ .

$c_{r,s} + (\mu - \lambda) \cdot 0 + (\mu - k) \cdot 0 = \mu \Rightarrow c_{r,s} = \mu$

□

**Folgerung :**  $G \in SRG(n, k, \lambda, \mu) \Rightarrow k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$ .

**Beweis :** Wende beide Seiten der Gleichung (\*) auf  $\underline{1}$  an.

$$k^2 + (\mu - \lambda)k + \mu - k \underline{1} = \mu n \underline{1}.$$

$$\Rightarrow k^2 + (\mu - \lambda)k + \mu - k = \mu n, \quad k^2 - \lambda k - k = \mu n - \mu k - \mu$$

$$k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$$

□

**Satz 8.6 :**  $G \in SRG(n, k, \lambda, \mu)$ . Dann sind die folgenden Zahlen  $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ :

$$h_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}} \right\}$$

**Beweis :**  $A = (a_{ij})$  Adjazenzmatrix von  $G$ .

$G$  stark regulär, regulär vom Grad  $k$ ,  $G$  zusammenhängend.

Satz 8.4:  $\underline{1}$  ist Eigenvektor zum einfachen Eigenwert  $k$ .

$A = A^T$  Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Es sei  $v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $x \neq k$ .  $v \cdot \underline{1} = 0$ . Wende beide Seiten der Gleichung (\*) aus Satz 8.5 auf  $v$  an.

$$(x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k))v = \begin{pmatrix} \underline{1}v \\ \underline{1}v \\ \underline{1}v \end{pmatrix} = 0.$$

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - k = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \lambda - \mu \pm \sqrt{\underbrace{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}_{>0, \text{ da sonst } \mu=\lambda=k}} \right\}$$



**Satz 8.7 :** Es sei  $G$  ein MOORE Graph,  $G \in SZ(k, 2)$ , d.h.  $G$  ist komplementär mit Radius  $r(G) = 2$ ,  $G$  regulär vom Grad  $k \geq 12$  und  $|V|$  ist maximal,  $|V| = k^2 + 1$ . Dann ist  $k = 2, 7$  oder  $57$ .

**Beweis :** MOORE-Graphen sind stark regulär.

hier:  $G \in SRG(k^2 + 1, k, 0, 1)$ .

Wende Satz 8.6 an:

$$h_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ k^2 \pm \frac{k^2 - 2k}{\sqrt{1 + 4(k-1)}} \right\} \text{ ganz}$$

$$\Rightarrow \frac{k(k-2)}{\sqrt{1+4(k-1)}} \text{ ganz.}$$

$$k = 2\sqrt{\quad}. \text{ Es sei } k \geq 3.$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4(k-1)} \text{ rational.}$$

$$\Rightarrow 1 + 4(k-1) = a^2 \text{ Quadratzahl, denn } \sqrt{c} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q^2 \cdot c = p^2 \Rightarrow c = a^2$$

Quadratzahl.

$a$  ungerade,  $a \geq 3$ .

$$k = \frac{a^2 - 1}{4} + 1 = \frac{a^2 + 3}{4}$$

$$\frac{k(k-2)}{\sqrt{1+4(k-1)}} = \frac{(a^2+3)(a^2-5)}{16a} \text{ ganz.}$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+3)(a^2-5)}{a} = a^3 - 2a - \frac{15}{a} \text{ ganz.}$$

$$\Rightarrow a|15, a = 3, a = 5 \text{ oder } a = 15$$

$$\Rightarrow k = 3, k = 7 \text{ oder } k = 57$$

$$|V| = k^2 + 1, k = 2, |V| = 5, G = C_5$$

$k = 3, |V| = 10$  genauere Untersuchung ergibt  $G = \text{PETERSEN Graph}$ .

$k = 7, |V| = 50$  genauere Untersuchung ergibt  $G = \text{HOFFMANN-SINGLETON Graph}$ .

Diese Graphen sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Fall  $k = 57$  ist ungelöst.  $|V| = 3250$ .

□



# Kapitel 9

## Perfekte Graphen

**Definition** (Clique, Cliquezahl):

$G = (V, E)$  ungerichteter Graph.

**Clique**=vollständiger Untergraph.

**Cliquezahl** $\omega(G)$ = Eckenanzahl einer größten Clique in  $G$ .

Bestimmung von  $\omega(G)$  ist *NP*-vollständig.  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

**Satz 9.1** : Zu jeder ganzen Zahl  $k \geq 2$  gibt es einen Graphen  $G$  mit chromatischer Zahl  $\chi(G) = k$ , so dass  $G$  keine Kreise der Länge  $\leq 5$  enthält ( $\omega(G) = 2$ ).

**Beweis** : Induktion über  $k$ .

$k = 2$ ,  $G = K_2$ .

$k = 3$ ,  $= C_7$  ✓.

Es sei  $k \geq 3$ .

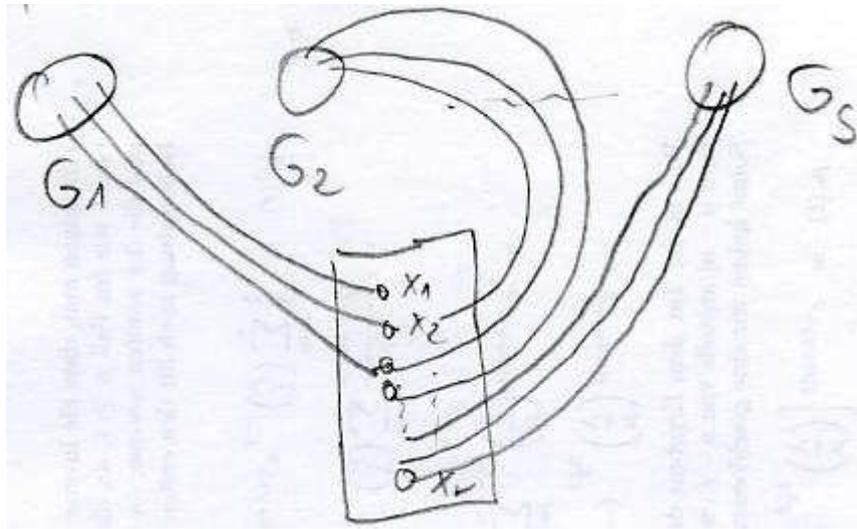
Es sei  $\chi(G) = k$  und  $G$  habe keine Kreise der Länge  $\leq 5$ .

$G = (V, E)$ ,  $r = k \cdot |V|$ ,  $s = \binom{r}{|V|}$ .

Es wird der Graph  $H$  konstruiert.

$H$  besteht aus  $s$  disjunkten Exemplaren  $G$ .

$G_1, \dots, G_s$ ;  $G_i \simeq G$ . Dazu kommt eine Menge  $M = \{x_1, \dots, x_r\}$  unabhängiger Ecken.



Anzahl der  $|V|$ -elementigen Teilmengen von  $M$ :  $\binom{r}{|V|} = s$ .

Man kann jeder solchen Teilmenge  $M_i \subseteq M$  genau einen Graphen  $G_i$  zuordnen.

Ziehe Kanten von Ecken in  $M_i$  zu den Ecken in  $G_i$ , so dass sich keine Kanten treffen.

$H$  hat keinen Kreis der Länge  $\leq 5$ . Färbe alle  $G_i$  zulässig mit den Farben  $1, \dots, k$ . Färbe alle  $x_i$  mit der Farbe  $k+1$ .

Das gibt eine zulässige Färbung von  $H$ ,  $\chi(H) \leq k+1$ .

**Annahme:**  $\chi(H) = k$ .

Die Ecken von  $H$ , insbesondere die Ecken in  $M$  verteilen sich auch  $k$  Farbklassen.

$\Rightarrow$  Es gibt in  $M$  mindestens  $\frac{|M|}{k} = \frac{r}{k} = |V|$  Ecken derselben Farbe  $f$ ,  $1 \leq f \leq k$ .

Diese Ecken bilden eine Teilmenge  $M_i$ , deren Elemente mit den Ecken aus  $G_i$  parallel verbunden sind.

Die Farbe  $f$  kommt an einer Ecke  $a \in G_i$  vor.  $a$  ist benachbart zu einer Ecke  $b \in M_i$  mit derselben Farbe  $f$  ⚡

$\Rightarrow \chi(H) = k+1$ .

□

**Definition** (perfekt):

Der Graph  $G$  heißt **perfekt**, wenn  $\chi(G') = \omega(G')$  für jeden induzierten Untergraphen  $G' \subseteq G$ .

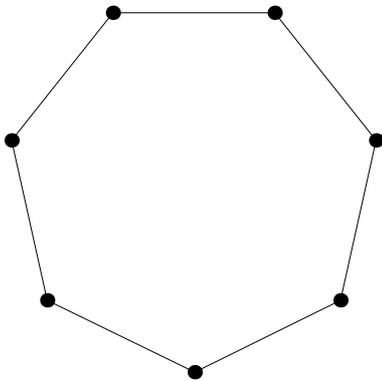
**Allgemeines Resultat :** [(Schrijver, Grötschel, Lovasz)] Mit Methoden der linearen Optimierung können  $\omega(G), \chi(G)$  für perfekte Graphen mit polynomieller Komplexität bestimmt werden.

**Beispiel :**  $G$  kantenlos  $\Rightarrow \chi(G') = \omega(G') = 1$

$$G \text{ bipartit} \Rightarrow \chi(G') = \omega(G') = \begin{cases} 2, & \text{wenn } G' \text{ nicht kantenlos} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$K_n$  ist perfekt.

$C_{2n+1}, n \geq 2, \omega(C_{2n+1}) = 2 < \chi(C_{2n+1}) = 3 \Rightarrow C_{2n+1}$  ist nicht perfekt.



Sei nun  $\overline{G}$  der zu  $G$  komplementäre Graph.

$$\omega(\overline{C_{2n+1}}) = n.$$

$\overline{C_{2n+1}}$  hat keine 3 unabhängigen Ecken. Jede Farbklasse enthält höchstens 2 Ecken.

$$\chi(\overline{C_{2n+1}}) \cdot 2 \geq 2n + 1$$

$$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2n+1}}) \geq n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2n+1}}) \geq n + 1.$$

Tatsächlich gilt:  $\chi(\overline{C_{2n+1}}) = n + 1 > n = \omega(\overline{C_{2n+1}})$ .

**Bemerkung :**  $G$  perfekt  $\Leftrightarrow G'$  perfekt für jeden induzierten Untergraphen  $G' \subseteq G$ .

$G$  perfekt  $\Rightarrow G$  hat  $C_{2n+1}, \overline{C_{2n+1}}, n \geq 2$  nicht als induzierte Untergraphen.

Bis vor kurzem war die Umkehrung unbewiesen unter dem Namen

**Strong-perfect-Graph-Conjecture** (Berge, 1962, bewiesen 2002): Es gilt im letzten Fall auch die Umkehrung, also

$G$  hat  $C_{2n+1}$  und  $\overline{C_{2n+1}}$  nicht als induzierte Untergraphen  $\Rightarrow G$  ist perfekt.

**Satz 9.2** (Seymour und andere, 2002): Der Graph  $G$  ist genau dann perfekt, wenn weder  $G$  noch  $\overline{G}$  einen induzierten  $C_{2n+1}$ ,  $n \geq 2$ , enthalten.

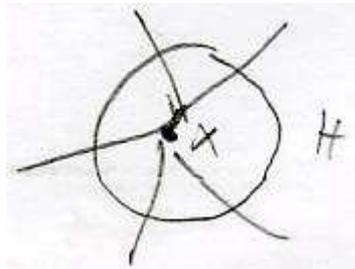
**Beweis** : ohne Beweis

□

**Folgerung** (Lovasz, 1972):  $G$  perfekt  $\Leftrightarrow \overline{G}$  perfekt.

Wir führen nun eine neue Operation auf Graphen ein:

**Operation** : Ersetzen einer Ecke  $x$  von  $G$  durch den Graphen  $H$ .



Entferne  $x$ .

Verbinde jeden ursprünglichen Nachbarn von  $x$  durch eine Kante mit allen Ecken von  $H$ .

Wir schreiben für den entstehenden Graphen  $G(x)H$

**Satz 9.3** :  $G, H$  perfekt  $\Rightarrow G(x)H$  perfekt.

**Beweis** : Jeder induzierte Untergraph von  $G(x)H$  hat die Form  $G'(x)H'$  mit induzierten Untergraphen  $G' \subseteq G$ ,  $H' \subseteq H$  ist also vom Typ wie  $G(x)H$ .  $G'$ ,  $H'$  perfekt, da  $G$  perfekt.

Es genügt zu zeigen:  $\chi(G(x)H) = \omega(G(x)H)$ .

Es sei  $\omega(G(x)H) = r$  Induktion über  $r$ .

$r = 1 \Rightarrow G(x)H$  kantenlos  $\Rightarrow$  perfekt  $\checkmark$

Es sei  $r \geq 2$

Induktionsannahme: Für jeden Graphen  $\tilde{G}(x)\tilde{H}$ ,  $\tilde{G}$  perfekt,  $\tilde{H}$  perfekt und  $\omega(\tilde{G}(x)\tilde{H}) \leq r - 1$  ist  $\chi(\tilde{G}(x)\tilde{H}) = \omega(\tilde{G}(x)\tilde{H})$ .

$G, H$  perfekt.  $\omega(G) = p, \omega(H) = q$ . Es sei  $K_s$  eine maximale Clique, die  $x$  enthält.  $s \leq p$ . Ferner  $K_q$  maximale Clique in  $H$ .

$$\omega(G(x)H) = r = \max\{p, s + q - 1\}$$

Färbe  $G$  mit  $p$  Farben zulässig. Es sei  $F$  die Farbklasse, die  $x$  enthält.

$\chi(G) = \omega(G) \Rightarrow F$  trifft jede Clique  $K_p$  in  $G$ ,  $F$  unabhängige Menge in  $G$ .

Färbe  $H$  mit  $q$  Farben zulässig.  $\chi(H) = \omega(H) = q$ .

Es sei  $F'$  beliebige Farbklasse.  $F'$  trifft jede Clique  $K_q$  in  $H$ .  $F'$  ist unabhängige Menge in  $H$ . Bilde  $Z = (F - x) \cup F'$ .

$Z$  ist unabhängige Menge in  $G(x)H$ , da  $F - x$  keinen Nachbarn von  $x$  enthält.

Es sei  $K_r$  maximale Clique in  $G(x)H$ .

**1 Fall:**  $K_r \cap H = \emptyset$

$\Rightarrow K_r \subseteq G, x \notin K_r$ .

$F - x$  trifft  $K_r$ .

**2. Fall:**  $K_r \cap H \neq \emptyset$

$\Rightarrow K_r \cap H = K_q$ .

$F'$  trifft die Clique  $K_q$ .

Also trifft die Menge  $Z$  jede maximale Clique  $K_r$  maximale Clique in  $G(x)H$ .

$$\Rightarrow \omega(G(x)H - Z) \leq r - 1$$

$G(x)H - Z$  ist von dem selben Typ wie  $G(x)H$ . Man kann die Induktionsannahme anwenden:

$$\chi(G(x)H - Z) = \omega(G(x)H - Z) \leq r - 1.$$

Färbe  $G(x)H - Z$  mit  $1, \dots, r - 1$  zulässig. Färbe alle Ecken  $\in Z$  mit Farbe  $r$ .

$\chi(G(x)H) \leq r = \omega(G(x)H)$ , hieraus folgt sogar die Gleichheit  $\chi(G(x)H) = \omega(G(x)H)$ , denn die Umkehrung ist trivial.

□

$K_2$  perfekt,  $\overline{K_2}$  perfekt.

Operation  $O_1$ : Ersetzen einer Ecke durch  $K_2$  „Splitten einer Ecke mit Kanteneinzug“

Operation  $O_2$ : Ersetzen einer Ecke durch  $\overline{K_2}$  „Splitten einer Ecke ohne Kanteneinzug“

$O_1, O_2$  machen aus perfekten Graphen wieder perfekte Graphen.

**Definition** ( $O_1, O_2$ -Graph):

Ein  $O_1, O_2$ -**Graph** entsteht aus  $K_1$  durch fortlaufende Anwendung der Operationen  $O_1$  und  $O_2$ .

**Bemerkung** :  $O_1, O_2$ -Graphen sind perfekt.

$P_4$ : Weg mit 4 Knoten.

**Definition** ( $P_4$ -frei):

Der Graph  $G$  heißt  $P_4$ -frei, wenn  $G$  keinen  $P_4$  als induzierten Untergraphen enthält.

$P_4$   $\overline{P_4} P_4 \simeq \overline{P_4}$ .

**Definition** (selbstkomplementär):

Ist  $G \simeq \overline{G}$ , dann ist  $G$  **selbstkomplementär**.

$P_4$  ist selbstkomplementär.

**Folgerung :**  $G$   $P_4$ -frei  $\Leftrightarrow \overline{G}$   $P_4$ -frei.

**Satz 9.4 :**  $G = (V, E)$ ,  $P_4$ -frei,  $|V| \geq 2 \Rightarrow G$  unzusammenhängend oder  $\overline{G}$  unzusammenhängend.

**Beweis :** Induktion über  $|V|$ .  $|V| = 2$ ,  $G = K_2$  oder  $G = \overline{K_2}$  klar  $\checkmark$

Es sei  $|V| \geq 3$ . Behauptung sei richtig für  $< |V|$  Ecken.

Es sei  $G = (V, E)$   $P_4$ -frei.

Annahme:  $G, \overline{G}$  beide zusammenhängend.

Sei  $x \in V$  beliebig.

$G - x$  ist  $P_4$ -frei.

Nach Induktionsannahme:  $G - x$  unzusammenhängend oder  $\overline{G - x} = \overline{G} - x$ .

**1. Fall:**  $G - x$  unzusammenhängend.

Komponentenzerlegung:  $G - x = G_1 \cup \dots \cup G_r$ ,  $r \geq 2$ ,  $G_i = (V_i, E_i)$ .

$G$  zusammenhängend,  $G - x$  unzusammenhängend  $\Rightarrow x$  ist Artikulation.

$x$  hat einen Nachbarn  $a_i$  in jeder Komponente  $G_i$ .

$b_1$  sei Nachbar von  $a_1$  in  $G_1$ .

$G$   $P_4$ -frei  $\Rightarrow xb_1 \in E$

Dann folgt entsprechend: Jeder Nachbar von  $b_1$  ist zu  $x$  benachbart usw.

Also ist jede Ecke in  $G_1$  zu  $x$  benachbart.

$G_1$  beliebige Komponente  $\Rightarrow x$  ist zu allen anderen Ecken aus  $G$  benachbart.

Also ist  $x$  in  $\overline{G}$  isolierte Ecke.

$\Rightarrow \overline{G}$  unzusammenhängend. Widerspruch.

**Fall 2:**  $\overline{G} - x$  unzusammenhängend

$G$   $P_4$ -frei  $\Rightarrow \overline{G}, \overline{G} - x$   $P_4$ -frei.

Weiterer Schluss wie im Fall 1, ersetze  $G$  durch  $\overline{G}$ .

Es folgt, dass  $G$  eine isolierte Ecke hat,  $G$  unzusammenhängend. Widerspruch.

□

**Satz 9.5 :**  $O_1, O_2$  sind genau die  $P_4$ -freien Graphen.

**Beweis :** Es sei  $G = (V, E)$   $P_4$ -frei.

$G'$  entstehe durch Anwendung einer Operation  $O_1$  bzw.  $O_2$  auf die Ecke  $x$ .

Aus  $x$  entstehen  $x_1, x_2$ .

$x_1, x_2$  haben dieselbe Nachbarmenge, nämlich die Nachbarmenge von  $x$  ohne  $x_1$  bzw.  $x_2$ .  $G' - x_1, G' - x_2 \simeq G$ ,  $P_4$ -frei.

**Annahme:**  $G'$  enthält  $P_4$ .

$\Rightarrow P_4$  enthält  $x_1$  und  $x_2$

**1. Fall** ( $x_1, x_2$  benachbart):

$$\Rightarrow ax_2 \in G \quad \text{⚡}$$

**2. Fall** ( $x_1, x_2$  nicht benachbart):

$$\Rightarrow x_1b \in G' \quad \text{⚡}$$

Es sei  $G = (V, E)$   $P_4$ -frei. Dann ist  $G$   $O_1, O_2$ -Graph.

Beweis durch Induktion über  $|V|$

Es sei  $|V| \geq 3$ .

Behauptung richtig für alle Graphen mit  $< |V|$  Ecken.

Es sei  $G = (V, E)$   $P_4$ -frei.

Satz 9.4:  $G$  unzusammenhängend oder  $\overline{G}$  unzusammenhängend.

- 1. Fall** ( $G$  unzusammenhängend,  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ):  $G_1, G_2$   $P_4$ -frei. Nach Induktionsannahme gibt es eine Folge von  $O_1, O_2$ -Operationen  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , die  $G_1$  aus  $K_1 = \{x_1\}$  erzeugen. Entsprechend erzeugen  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_s$   $G_2$  aus  $K'_1 = \{x'_1\}$ .  $\tilde{K}_1 = \{x\}$ .  $\sigma$  sei die Operation  $O_2$ , die  $x$  in  $x_1, x'_1$  ohne Kanteneinzug splittet. Wende auf  $x$  nacheinander die Operationen  $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma'_1, \dots, \sigma'_s$ . Es entsteht  $G = G_1 \cup G_2$ .

- 2. Fall** ( $\overline{G}$  unzusammenhängend):  $G$   $P_4$ -frei  $\Leftrightarrow \overline{G}$   $P_4$ -frei.

Nach Fall 1 gibt es eine Folge von Splitoperationen  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , die  $\overline{G}$  aus  $K_1 = \{x\}$  erzeugen.

Definiere  $\sigma'_i = \begin{cases} O_1, & \text{wenn } \sigma_i = O_2 \\ O_2, & \text{wenn } \sigma_i = O_1 \end{cases}$  Die Folge  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_n$  erzeugt  $G$  aus  $K_1 = \{x\}$

□

**Folgerung :**

- (i)  $P_4$ -freie Graphen sind perfekt.
- (ii)  $G$   $P_4$ -frei,  $H$   $P_4$ -frei,  $x \in G \Rightarrow G(x)H$   $P_4$ -frei.

**Beweis :**

- (i)  $K_1$  perfekt,  $O_1, O_2$  erhalten Perfektheit.
- (ii) Erzeuge durch eine Folge von Splitoperationen  $G$  aus  $K_1$ . Splitte dann die Ecke  $x$  weiter zum Untergraphen  $H$ .

□

**Satz 9.6 :** Es sei  $G$   $P_4$ -frei. Dann braucht jede sequentielle Färbung der Ecken von  $G$  genau  $\chi(G)$  Farben.

**Beweis :** Induktion über die Eckenanzahl  $|V|$ .

$$|V| \leq 2 \quad \checkmark$$

Es  $G = (V, E)$   $P_4$ -frei.  $|V| \geq 3$ .

Es sei die Behauptung richtig für alle Graphen mit  $< |V|$  Ecken.

1. **Fall** ( $G$  unzusammenhängend):  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ,  $G_1, G_2$   $P_4$ -frei.

Bei einer sequentiellen Färbung von  $G$  werden  $G_1$  und  $G_2$  separat sequentiell gefärbt.

Nach Induktionsannahme für  $G_1, G_2$  folgt:

Anzahl der Farben bei sequentieller Färbung von  $G$  ist:  $\max \chi(G_1), \chi(G_2) = \chi(G)$ .

2. **Fall** ( $\overline{G}$  unzusammenhängend):

In diesem Fall hat  $G = (V, E)$  die Form  $G = G_1 + G_2$  Summe (join), d.h.  $G$  zerfällt in die beiden disjunkten induzierten Untergraphen

$G_1$  und  $G_2$  und jede Ecke von  $G_1$  ist mit jeder Ecke von  $G_2$  über eine Kante verbunden.

$G_1, G_2$   $P_4$ -frei. Induktionsannahme trifft auf  $G_1, G_2$  zu.

Es sei  $F$  die Farbmenge bei einer sequentiellen Färbung von  $G$ .  $F$  zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen  $F = F_1 \cup F_2$ , wobei  $F_i$  die Menge der Farben an den Ecken von  $G_i$  ist.

Die sequentielle Färbung von  $G$  zerfällt in zwei sequentielle Teilfärbungen von  $G_1$  mit Farben  $F_1$  und von  $G_2$  mit Farben  $F_2$ .

$$|F_1| = \chi(G_1), |F_2| = \chi(G_2).$$

$$|F| = |F_1| + |F_2| = \chi(G_1) + \chi(G_2) = \chi(G).$$

□

**Bemerkung :**  $G_1 \dot{\cup} G_2$  disjunkte Vereinigung

$G_1 + G_2$  Summe

Jeder  $P_4$ -freie Graph kann durch eine Folge von Operationen  $\dot{\cup}, +$  aus  $K_1$  erzeugt werden.

$\dot{\cup}, +$  erhalten die Invarianz bzgl. sequentieller Färbung.

Wenn man zum Beispiel mit  $K_1, C_3, C_5, C_7, \dots$  (alle ungeraden Kreise) startet, dann erhält man lauter Graphen mit dieser Färbungsinvarianzeigenschaft.

**Definition** (chordaler Graph):

$G = (V, E)$  heißt **chordal**, wenn jeder Kreis in  $G$  der Länge  $\geq 4$  mindestens eine Sehne hat.

**Satz 9.7 :** Es sei  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2$  vollständig oder leer.

Dann gilt:

- (i)  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$
- (ii)  $\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$
- (iii)  $G$  perfekt  $\Leftrightarrow G_1$  perfekt und  $G_2$  perfekt
- (iv)  $G$  chordal  $\Leftrightarrow G_1$  chordal und  $G_2$  chordal

**Beweis :**

klar (Satz 4.2, Kapitel 4)

Jede Clique ist  $\subseteq G_1$  oder  $\subseteq G_2$ .

$G$  perfekt  $\Rightarrow G_1, G_2$  perfekt, da  $G_1, G_2$  induzierte Untergraphen von  $G$  sind.  
 „ $\Leftarrow$ “ Es seien  $G_1, G_2$  perfekt.

$G'$  sei induzierter Untergraph von  $G$ .  $G'$  hat die Form  $G' = G'_1 \cup G'_2$ ,  
 $G'_1 \cap G'_2$  vollständig bzw. leer.  $G'_1, G'_2$  induzierte Untergraphen von  $G_1, G_2$ .  
 1),2)  $\Rightarrow \chi(G') = \max\{\chi(G'_1), \chi(G'_2)\} = \max\{\omega(G'_1), \omega(G'_2)\} = \omega(G')$

Es sei  $G$  chordal.  $G_1, G_2$  sind induzierte Untergraphen.  
 $\Rightarrow G_1, G_2$  chordal.

Umkehrung:  $G_1, G_2$  chordal.

klar, wenn  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , ebenso, wenn  $|G_1 \cap G_2| = 1$ .

Es seien mind. 2 Ecken in  $G_1 \cap G_2$ .

Es sei  $C_n$  Kreis in  $G$ . Man kann voraussetzen, dass  $x_1 \in C_n, x_1 \in G_1 \setminus G_2, x_2 \in C_n, x_2 \in G_2 \setminus G_1$ . Dann hat  $C_n$  eine Sehne in  $G_1 \cap G_2$ . Also ist  $G$  chordal.

□

**Satz 9.8 :**  $G = (V, E)$  sei chordal, zusammenhängend,  $|V| \geq 3$ .

Es seien  $a, b$  nicht benachbarte Ecken aus  $G$ .

Ferner sei  $T$  eine minimale  $a, b$ -trennende Eckenmenge.

Dann ist  $G(T)$  vollständig.  $G$  zerfällt in  $G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = G(T)$  vollständig.

**Beweis** (mit dem Satz von Menger, siehe OR III):

$|T| = \max.$  Anzahl unabhängiger  $a, b$ -Wege.

Diese Wege treffen jeweils genau eine Ecke aus  $T$ .

Annahme:  $x_1, x_2 \in T$  nicht benachbart.

Komponentenzerlegung:  $G - T = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_r, a \in H_1, b \in H_2$

Es entsteht ein Kreis  $a \dots x_1 \dots b \dots x_2 \dots a$ .

Dieser Kreis enthält eine Sehne  $S$ . Diese Sehne verkürzt einen Kreis. Es gibt einen kleinsten Kreis der Form  $a' \dots x_1 \dots b' \dots x_2 \dots a', a' \in H_1, b' \in H_2$ . Dieser Kreis muss die Sehne  $x_1, x_2$  enthalten. Widerspruch zur Voraussetzung  $x_1, x_2$  nicht benachbart.

Man bilde  $G_1 = G(V(H_1) \cup T), G_2 = G(V(H_2) \cup \dots \cup V(H_r) \cup T) = G - V(H_1)$

$\Rightarrow G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = G(T)$

□

**Satz 9.9 :** Jeder chordale Graph ist perfekt.

**Beweis :** Induktion über  $|V|$ .

klar für  $|V| \geq 3$  und Behauptung richtig für  $< |V|$  Ecken.

$G = (V, E)$  sei chordal. klar, wenn  $G$  vollständig oder unzusammenhängend.

Es sei  $G$  vollständig,  $a, b$  nicht benachbarte Ecken.

Dann existiert die Zerlegung gemäß Satz 9.8.

$G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2$  vollständig.

Satz 9.7:  $G_1, G_2$  chordal  $\Rightarrow$   $G = G_1 \cup G_2$  perfekt.  
Ind. Ann.

□

**Bemerkung :** Rekursive Tests von Chordalität, Perfektheit und Berechnung der chromatischen Zahl sind wegen der Aussagen oben möglich (?).

**Satz 9.10 :**  $G = (V, E)$  ungerichtet, ohne Mehrfachkanten.

- (i) Der Digraph  $G' = (V', E')$  sei eine zyklensfreie Orientierung von  $G$ .  
Es sei  $l_{max}(G')$  die Eckenanzahl einer längsten Bahn in  $G$ .  
Dann ist  $\chi(G) \leq l_{max}(G')$ .
- (ii) Es gibt eine zyklensfreie Orientierung  $G'$  von  $G$  mit  $\chi(G) = l_{max}(G')$ .

**Beweis :**

- (i)  $F(x)$  sei die Eckenanzahl einer längsten Bahn in  $G'$  mit Anfangspunkt  $x$ .  
Färbe  $x$  mit  $F(x)$ . Es seien  $a, b$  benachbart, etwa  $ab \in E'$ .

$a$  liegt nicht auf dieser Bahn, da  $G'$  zyklensfrei.

$\Rightarrow F(a) \geq F(b) + 1, F(a) \neq F(b)$ .

Farbmenge  $\subseteq \{1, 2, \dots, l_{max}(G')\} \Rightarrow \chi(G) \leq l_{max}(G')$ .

- (ii) Es sei  $\chi(G) = k$ . Färbe  $G$  mit  $1, \dots, k$ .  $k$  Farbklassen  $F_1, \dots, F_k$ .

Orientiere alle Kanten von der kleineren zur größeren Farbe. Das gibt eine zyklensfreie Orientierung  $G'$ .

$\chi(G') \leq l_{max}(G') \leq k$ .

$\Rightarrow \chi(G) = l_{max}(G') = k$ .

□

**Definition** (transitiv orientierbar (Vergleichbarkeitsgraph):

$G = (V, E)$  heißt **transitiv orientierbar (Vergleichbarkeitsgraph)**,  
wenn eine Orientierung  $G' = (V', E')$  existiert, so dass gilt:

$$xy \in E' \text{ und } yz \in E' \Rightarrow xz \in E'.$$

**Beispiel :** Bipartite Graphen sind transitiv orientierbar.

**Satz 9.11 :**  $G'$  sei transitive Orientierung von  $G$ .

Dann ist  $\chi(G) = \omega(G) = l_{max}(G')$ .

**Beweis :** Eine transitive Orientierung ist immer zyklensfrei (siehe Abbildung).

Es sei  $B$  Bahn mit  $l_{max}(G')$  Ecken.

$B$  induziert eine Clique in  $G$ .

$$\omega(G) \leq \chi(G) \stackrel{\text{Satz 9.10}}{\leq} l_{max}(G') \leq \omega(G)$$

$$\Rightarrow \chi(G) = \omega(G) = l_{max}(G').$$

□

**Folgerung :** Jeder transitiv orientierbare Graph ist perfekt.

**Beweis :** Jeder induzierte Untergraph  $\tilde{G}$  eines transitiv orientierbaren Graphen  $G$  ist transitiv orientierbar.  $\chi(\tilde{G}) = \omega(\tilde{G})$ .

□

**Definition** (Schnittgraph):

Es sei  $S = \{M_i : i \in I\}$  ein Mengensystem. Der **Schnittgraph**  $\Omega(S)$  hat als Eckenmenge die Indexmenge  $I$ . Die Kante  $ij$  wird genau dann gezogen, wenn  $M_i \cup M_j \neq \emptyset$ .

**Satz 9.12 :** Jeder Graph  $G = (V, E)$  ist Schnittgraph  $G = \Omega(S)$  eines geeigneten Mengensystems.

**Beweis :**  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Die Menge  $M_i$  bestehe aus der Ecke  $v_i$  und allen mit  $v_i$  inzidenten Kanten.  $S = \{M_1, \dots, M_n\}$

$$\Rightarrow G = \Omega(S)$$

□

**Definition** (Intervallgraph):

Ein **Intervallgraph** ist der Schnittgraph eines Systems reeller Intervalle (nicht leer, endlich, alle offen oder alle abgeschlossen).

**Satz 9.13 :** Ist  $G$  Intervallgraph, dann ist  $G$  chordal und  $\overline{G}$  ist transitiv orientierbar.

**Beweis :**

Das den Kreis schliessende Intervall  $I_k$  muss alle vorhergehenden Intervalle treffen.

$$I_r, I_s, I_r \cap I_s = \emptyset, I_r = [a_r, b_r], I_s = [a_s, b_s]$$

$$I_r \leq I_s \stackrel{Def.}{\Leftrightarrow} a_r \leq a_s.$$

$\leq$  ist transitiv auf  $\overline{G}$ .

□

**Folgerung :** Intervallgraphen sind perfekt.

**Bemerkung :** In Satz 9.13 gilt auch die Umkehrung.



# Kapitel 10

## Diverse (offene) Probleme

### 10.1 Das chromatische Polynom

**Definition** ( $P_G(\lambda)$ ):

$P_G(\lambda)$  = Anzahl der zulässigen Färbungen von  $G$  mit Farben  $1, 2, \dots, \lambda \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel** :  $G = P_3$

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \cdot \dots \cdot (\lambda - n + 1) = \lambda^{(n)} \text{ faktorielle Potenz.}$$

$$P_{\overline{K_n}} = \lambda^n.$$

**Definition** ( $G/ab, G + ab$ ):

$a, b$  Ecken.

$G/ab$  Kontraktion der Ecken  $a, b$

$G + ab$  Hinzufügen der Kante  $ab$

$a, b$  nicht benachbart.

$P_G(\lambda)$  = Anzahl der Färbungen, bei denen  $a, b$  verschieden gefärbt werden

+ Anzahl der Färbungen, bei denen  $a, b$  gleich gefärbt werden.

$$= P_{G+ab}(\lambda) + P_{G/ab}(\lambda)$$

$$P_G(\lambda) = P_{G+ab}(\lambda) + P_{G/ab}(\lambda); a, b \text{ nicht benachbart} \quad (10.1)$$

Fortlaufendes Anwenden von (10.1) führt zu lauter vollständigen Graphen. Man erhält die Darstellung von  $P_G(\lambda)$  als faktorielles Polynom

$$P_G(\lambda) = \lambda^{(n)} + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda^{(1)}$$

Die chromatische Zahl  $\chi(G)$  ist die kleinste Zahl  $r \in \mathbb{N}$  mit  $P_G(r) \neq 0$ .  $P_{G+ab}(\lambda) = P_G(\lambda) - P_{G/ab}(\lambda)$ . Ersetze  $G + ab$  durch  $G$  ( $a, b$  benachbart).

$$P_G(\lambda) = P_{G-ab}(\lambda) - P_{G/ab}(\lambda), a, b \text{ benachbart} \quad (10.2)$$

Fortlaufenden Anwendung von (10.2) führt zu lauter Graphen  $\overline{K_j}$ . Man erhält die Darstellung von  $P_G(\lambda)$  als gewöhnliches Polynom.

**Beispiel :**

(i)  $\chi(G)$  ist die kleinste Eckenanzahl des so entstehenden vollständigen Graphen.

(ii) Aus (10.2): Die Koeffizienten in der gewöhnlichen Darstellung alternieren.

**Offen:** Was macht ein Polynom zu einem chromatischen Polynom?

**Vermutung:** Die Beträge der Koeffizienten wachsen monoton zu einem Maximum und fallen dann wieder monoton.

## 10.2 Unit-distance-graph-problem (UDGP)

**Definition** (unit-distance-graph):

$V$  metrischer Raum, Abstandsfunktion  $d(x, y)$ , Eckenmenge sei  $V$ .

Ecken  $x, y$  werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn  $d(x, y) =$

1. **unit-distance-graph** of  $V, G(V)$ .

Es sei  $\underbrace{G = G(\mathbb{R}^2)}_{\chi(G)=\chi_1(\mathbb{R}^2)}$ .  $\chi(G(V)) = \chi_1(V)$

L. Moser, 1962. Moser's Spindel.

Hefte 2 Gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge 1 zusammen. Lenke das Viereck  $abcd$  um den Punkt  $a$  aus bis der Abstand  $d, d' = 1$  ist. Es entsteht  $G_M$ .

$\chi(G_M) = 4$ .

Defrunner 1962:

$\left. \begin{array}{l} \chi_1(\mathbb{R}^2) \geq 4 \\ \chi_1(\mathbb{R}^2) \leq 7 \end{array} \right\}$  nichts Besseres bekannt.

Etwas besser bei  $\mathbb{Q}$

$\chi_1(\mathbb{Q}^2) = \chi_1(\mathbb{Q}^3) = 2, \chi_1(\mathbb{Q}^4) = 5, 7 \leq \chi_1(\mathbb{Q}^5) \leq 11$ .

$\omega_1(\mathbb{R}^n) = n + 1\sqrt{\phantom{x}}, \omega_1(\mathbb{Q}^n) = \begin{cases} n - 1 & \text{abhängig von} \\ n & \text{zahlentheoretischen} \\ n + 1 & \text{Eigenschaften} \end{cases}$

**Hadwiger Vermutung** : Kontraktion = Kantenkontraktion

$H_n : \chi(G) = n \Rightarrow G$  hat Untergraphen  $G'$ , der sich zu  $K_n$  kontrahieren läßt

Hadwiger Vermutung (1948): Es gilt  $H_n$  für alle  $n$ .

$H_1, H_2, H_3, H_4$  relativ einfach.

$H_5 \Leftrightarrow$  Vierfarbensatz. Offen für  $n \geq 6$ .

## 10.3 Rekonstruktionsproblem

$G = (V, E), V = \{v_1, \dots, v_n\}, G_i = G - v_i$ .

**Rekonstruktionsvermutung** :  $G_1, \dots, G_n$  bestimmen  $G$  bis auf Isomorphie eindeutig.

Eine Größe bzw. Eigenschaft von  $G$  heißt **rekonstruierbar**, wenn sie durch  $G_1, \dots, G_n$  eindeutig bestimmt ist.

Rekonstruierbar sind:  $\chi(G), P_G(\lambda)$ , charakteristisches Polynom  $\chi_G(x)$ .

Jeder reguläre Graph ist rekonstruierbar.

Jeder unzusammenhängende Graph ist rekonstruierbar.