

Vorlesungsmitschrift

F i b o n a c c i z a h l e n

Schönheit und Nutzen
in Informatik und Mathematik

aus dem Sommersemester 2005
bei PROF. DR. W. LEX

gesetzt in L^AT_EX 2_ε von

Robert Hartmann
Graphiken: Wilhelm Hannemann

Stand: 12. Juli 2005

unkorrigiert

Ankündigung

Fibonaccizahlen: Schönheit und Nutzen in Informatik und Mathematik

Die durch $F_n = n$ für $0, 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ soll untersucht werden und ihre Rolle beim Speichern und Optimieren, bei Rekursion und Approximation, in Komplexitäts- und Zahlentheorie sowie in Geometrie und Kombinatorik.

Aus der Fülle des Möglichen soll unter Einbeziehung vieler Beispiele und Anwendungen u. a. behandelt werden:

- Erzeugende Funktionen,
- Binetsche Formel,
- Quotienten konsekutiver Fibonaccizahlen als beste rationale Näherungen des Goldenen Schnittes,
- Komplexität beim Euklidischen Algorithmus,
- Satz von Lamé,
- Fibonacci-Hash,
- Optimale Strategie bei einem Nim-Spiel,
- Extremumsbestimmungen.

Die Vorlesung wendet sich an alle Studierende der Informatik, Wirtschaftsinformatik, Informationstechnik, Mathematik, Technomathematik und Wirtschaftsmathematik ab dem zweiten Semester sowie natürlich an alle an hübschen, überraschenden und nützlichen Querverbindungen Interessierte und kann in der Diplomhauptprüfung verwandt werden.

Bei Literaturhinweisen – alleine Scholar-Google bietet etwa 22000 Einträge – beschränken wir uns vorerst lediglich auf D.E. Knuth: The Art of Computer Programming. Vol.1. Boston et al. 1997

N.N. Vorobiev: Fibonacci Numbers. Basel et al. 2002

The Fibonacci Quaterly, 1963 -

Leonardi Pisani Numeri: De Pulchritudine et Utilitate Informaticae Mathematicaeque

Sequentia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ per $F_n = n$ pro $n = 0, 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ definita et partes deponendi optimandique, recursionis approwimationisque, in theoria sumptuaria arithmeticaque adhibitas, in geometria et in arte combinatoria assignatas investigandae sunt. – Involventes exempla multa applicationesque e plenitudine possibilitatum inter alia tractare volumus: functiones generantes, formula Bineti, rationes Leonardi Pisani numerorum consecutorum qua optimae appropinquationes rationales sectioni aureae, sumptus algorithmi Euclidiani, theorema a Lamé condita, deposito spargens, quae Leonardi Pisani numeris utitur, optima strategia ludi sumendi, ratiocinationes extremorum.

Res refertur ad studentes omnes informaticae, informaticae oeconomicae, technicae informaticae, qui dimidium anni primi finiverunt et sc. ad omnes, qui ligationes pulchras et inopinatas et utiles amant; materia adhibere potest ad examen diplomatis summi.

Annotationes literaturae - Scholar-Google solum praebet circa viginti duo milia res - coercemus ad:

D.E. Knuth: The Art of Computer Programming. Vol.1. Boston et al. 1997

N.N. Vorobiev: Fibonacci Numbers. Basel et al. 2002

The Fibonacci Quaterly, 1963 -

Inhaltsverzeichnis

Ankündigung...	2
Fibonaccizahlen: Schönheit und Nutzen in Informatik und Mathematik	2
Leonardi Pisani Numeri: De Pulchritudine et Utilitate Informaticae Mathematicaeque	3
1 Prélude	7
Erinnerung an Grundbegriffe	7
Was sind Fibonaccizahlen?	9
Historisches zu LEONARDO FIBONACCI	9
Historisches zu EDOUARD LUCAS	9
Das Kaninchenpaar-Beispiel	10
Äquivalente Aussagen und zugehörige Beweise	14
Historisches zu GIOVANNI CASSINI	16
Historisches zu ROBERT SIMSON	16
2 Die Binetsche Formel	19
Erinnerung an erzeugende Funktionen	19
Binetsche Formel	21
Historisches zu JACQUES BINET	21
Historisches zu MICHAEL MAESTLIN	21
Bemerkung zu Rekursion	28
Bemerkung zu Verschiebungen	30
Bemerkung zu Lucas-Zahlen	31
Historisches zu der Folge der Lucas-Zahlen	31
3 Der goldene Schnitt	35
Konstruktionsvorschrift: Goldener Schnitt mit Zirkel	36
Konstruktionsvorschrift: Pentagon	39
Historisches zu MARTIN OHM	41
Historisches zu LUCA PACIOLI	41

Kettenbruch, Näherungsbruch	48
Historisches zu LAGRANGE	59
4 Der Euklidische Algorithmus	61
Komplexitätsbetrachtungen	62
Historisches zu DE LAGNY	63
Historisches zu LAMÉ	65
5 Analyse eines Spiels	67
Historisches zu ZECKENDORF	67
Optimale Strategie	71
A Aufgabenblätter	73
A.1 Aufgabenblatt 1	73
A.2 Aufgabenblatt 2	73
A.3 Aufgabenblatt 3	74
A.4 Aufgabenblatt 4	74
A.5 Aufgabenblatt 5	74
A.6 Aufgabenblatt 6	75
A.7 Aufgabenblatt 7	75
A.8 Aufgabenblatt 8	76

Kapitel 1

Prélude

Erinnerung 1 :

$\alpha)$ \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} stehe bzw. für die Mengen der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

Für $X \subseteq \mathbb{R}$ sei $X^+ \Leftarrow \{x \in X \mid x > 0\}$ ¹ und für $X \subseteq \mathbb{C}$ sei $X_0 \Leftarrow X \cup \{0\}$,

speziell $\mathbb{N} \Leftarrow \mathbb{Z}^+$ und $\mathbb{N}_0 \Leftarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$;

ferner sei $\mathbb{A}_n \Leftarrow \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\} \forall n \in \mathbb{N}_0$,

also $\mathbb{A}_0 = \emptyset$, $\mathbb{U}_n \Leftarrow (\mathbb{A}_{n-1})_0$,

speziell $\mathbb{B} \Leftarrow \mathbb{U}_2 = \{0, 1\} (\Leftarrow \underbrace{GF(2)}_{\text{Galoisfeld}} \Leftarrow \underbrace{\mathbb{F}_2}_{\text{Field}})$

außerdem sei \mathbb{P} die Menge der **Primzahlen**,

also $\mathbb{P} \Leftarrow \{p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \mid \forall t \in \mathbb{N} : t \mid p \Rightarrow t = 1 \vee t = p\}$

$\beta)$ A , B und M seien Mengen:

$P(M)$ bezeichne die **Potenzmenge von M** , also

$$P(M) \Leftarrow \{X \mid X \subseteq M\}$$

speziell $P_k(M) \Leftarrow \{X \in P(M) \mid |X| = k\} (k \in \mathbb{N}_0)$,

also $|M| = n (n \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow \binom{n}{k} \Leftarrow |P_k(M)|$

„ φ ist **Abbildung (Funktion) von A in B** “ wird wiedergegeben durch $\varphi : A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{\varphi} B$ oder $A \xrightarrow{\varphi} B$ [klassischer Funktionenbegriff],

¹Erklärung der Zeichen \Leftarrow, \Leftarrow :

- Definiendum \Leftarrow Definiens (Zu Definierendes \Leftarrow die Definition);
- Definiens \Leftarrow Definiendum

ferner $B^A \Leftarrow \{\varphi | A \rightarrow B\}$

sowie

$\varphi : A \rightarrowtail B \Leftarrow \varphi \in B^A$ und φ ist **injektiv**,

$\varphi : A \twoheadrightarrow B \Leftarrow \varphi \in B^A$ und φ ist **surjektiv** (auf B),

$\varphi : A \xrightarrow{\sim} B \Leftarrow \varphi \in B^A$ und φ ist **bijektiv** (auf B),
(d.h. φ ist injektiv und surjektiv auf B)

und analog:

Ist φ ein **Homomorphismus** schreiben wir für entsprechende Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} analog $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ usw.

Wie üblich sei $\varphi|_M$ die **Einschränkung** von φ auf M ,

also $\varphi|_M \Leftarrow \varphi \cap (M \times \varphi M)$,

wobei $\varphi M \Leftarrow \{\varphi(x) | x \in M\}$

$\gamma)$ Sei $\varphi \in \mathbb{R}^D$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$:

Gilt $\forall a, b \in D : a < b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$ bzw. $\varphi(a) < \varphi(b)$, so heiße **monoton wachsend (steigend)** bzw. **streng monoton wachsend (steigend)**, kurz $\varphi \nearrow$ bzw. $\varphi \nearrow\!\!\nearrow$, und analog für \geq bzw. $>$ **monoton fallend (abnehmend)** bzw. **streng monoton fallend**, kurz $\varphi \searrow$ bzw. $\varphi \searrow\!\!\searrow$

$\delta)$ Es sei $\lfloor x \rfloor \Leftarrow \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x \in \mathbb{R}\}$
und $\lceil x \rceil \Leftarrow \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x \in \mathbb{R}\}$

ferner sei ${}_b \log x$ der **Logarithmus** von $x (\in \mathbb{R}^+)$ zur Basis $b (\in \mathbb{R}^+)$,
speziell $\ln \Leftarrow {}_e \log$, $\lg \Leftarrow {}_{10} \log$, $\text{ld} \Leftarrow {}_2 \log$.

Definition 1 FIBONACCIZahlen, Index; F , \mathbb{F} :

α) Die durch

$$F_n = n \text{ für } n = 0, 1 \text{ und } F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

(rekursiv) definierte Zahlen heißen FIBONACCIZahlen² (Fz) - gelegentlich auch LUCAS³ -Zahlen, siehe auch Bemerkung (Kapitel 2) Bemerkung 3e, oft jedoch für ähnliche Folgen oder Verallgemeinerungen; früher statt F_n meist u_n - n wird gelegentlich als **Index** von F_n bezeichnet.

β) Die Funktion F mit $F(n) \Leftarrow F_n (n \in \mathbb{N}_0)$ werde **Fibonacci-funktion** oder **-folge** (Ff) genannt, also

$$F = (F_n)_{n \in \mathbb{N}_0},$$

und es sei

$$\mathbb{F} = F\mathbb{N}_0$$

Bemerkung 1 : Ziel ist die Untersuchung des Verhaltens der

FIBONACCIfolge und ihrer Beziehungen zu Anderen – Goldener Schnitt, Komplexitäten, Optimierungen, etc – und die **exemplarische Vermittlung allgemeiner Methoden**.

² LEONARDO PISANO FIBONACCI [LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI] gelegentlich auch LEONARDO BIGOLLO [Reisender] (* \approx 1170 Pisa?, † \approx 1250 Pisa?), lange Zeit in Bugia (daher kommt das Lehnwort „Bougieren“!) in Algerien [heute Bejaïa, röm. Saldae] und auf Reisen; bedeutender Mathematiker: Zahlentheorie, Geometrie, Algebra, Dezimalsystem (Liber abbaci 1202 - dazu HEINZ LÜNEBURG: Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers, Mannheim et al. 1993 2.Auflage -; siehe Bemerkung 1b).

Jedoch schon bei indischen Mathematikern: GOPALA (\approx 1135) und 1150 bei ACHARYA HEMCHANDRA (*1089 Dhandhuka [\approx 50 km südwestlich von Ahmadabad, die größte Stadt von Gujarat], †1173 Gujarat); dieser Gelehrte zählte die Möglichkeiten eine Zeile der Länge n (kurze Silben) in kurze und lange (2 kurze Silben) aufzuteilen (vgl. Aufgabe 6!) - , aber Bildungsgesetz bereits im 7. Jahrhundert von Indern untersucht.

Die Fibonaccizahlen 13, 21, 34 und 55 sind bereits realisiert im Theater von EPIDAUROS (\approx -300, \approx -170): BENNO ARTMANN: „Euclid - The Creation of Mathematics“ Springer 1999, S. 239 f.

³ FRANCOIS EDOUARD ANATOLE LUCAS (*4.4.1842 Amiens, †3.10.1891 Paris [an Wundrose (Erysipel)]), Mathelehrer in Paris am Lycée Saint Souis und am Lycée Charlemagne: Zahlentheorie (Primalitytest für MERSENNEsche Zahlen), Unterhaltungsmathematik (Turm von Hanoi)

Beispiel 1 :

a) (Kapitel 1) Definition 1 α bedingt:

n	F_n	n	F_n	n	F_n
0	0	6	8	12	144
1	1	7	13	13	233
2	1	8	21	14	377
3	2	9	34	15	610
4	3	10	55	16	987
5	5	11	89	17	1597

Tabelle 1.1: Die ersten 18 FIBONACCIZahlen

Ein Programm zur rekursiven Berechnung ist leicht zu erstellen.
(siehe Aufgabe 1 [Algorithmus 1])

b) Im Liber Abbaci (siehe Fußnote 2) – auf S. 123/124 des (erweiterten) Manuskrites von 1228 – wird die Aufgabe gestellt:

Ein **Kaninchenpaar** (Kp) bringt nach Ablauf zweier Monate ein Kp zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres Kp, die sich alle ebenso verhalten.

Wieviele Kp gibt es nach einem Jahr?

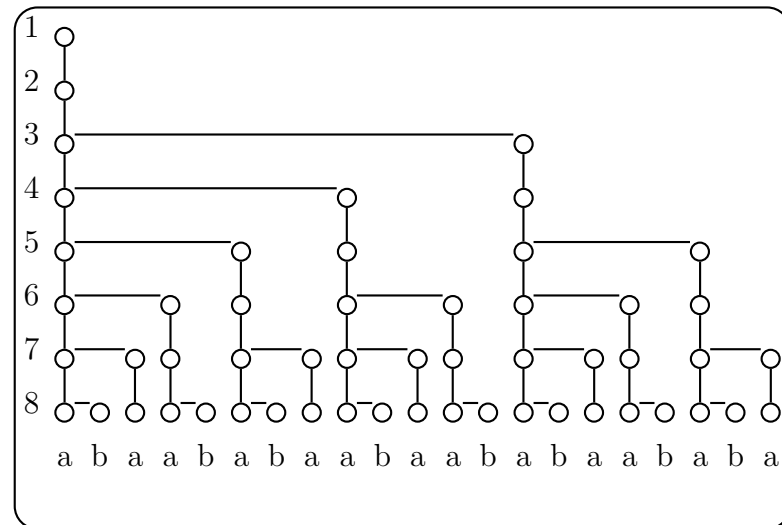


Abbildung 1.1: Vermehrung der Kaninchenpaare

Monate (Beginn)	1	2	3	4	5	6	...	13
Kp	1	1	$\underbrace{1+1}_{=2}$	3	5	8		$\underbrace{233}_{\text{(nach a)}}$

Tabelle 1.2: Kaninchenvermehrung

- c) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ mit $a \neq b$ und φ der durch $\varphi(a) = ab$ und $\varphi(b) = a$ definierte **Endomorphismus des Wortmonoids** über Σ , also

$$\varphi : (\Sigma^*, \cdot, \square) \xrightarrow{\sim} (\Sigma^*, \cdot, \square).$$

Dann folgt

- $\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = aba$
- $\varphi^3(a) = \varphi(\varphi^2(a)) = \varphi(aba) = \varphi(ab) \cdot \varphi(a) = ab \underbrace{a} \underbrace{a} b$
- $\varphi^4(a) = \varphi(abaab) = \underbrace{aba} \underbrace{aba} ba$
- $\varphi^5(a) = \varphi(abaababa) = \underbrace{abaab} \underbrace{abaab} aab$

und

- $\varphi^6(a) = \varphi(abaababaabaab) = \underbrace{abaaba} \underbrace{aba} \underbrace{aba} \underbrace{aba} \underbrace{aba} ababa$

Offenbar gilt $|\varphi^n(a)| = F_{n+2} (n \in \mathbb{N})$.

Beweis : Übung!

□

Motivation für c) : In $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(a)$ - im „Goldenen Wort“ [golden string], siehe Kapitel 3 3 - kommen zweite und dritte Potenzen vor, aber keine 4. :

J. KARHUMÄKI: „On cube-free ω -word generated by binary morphisms.“ in Discrete Applied Mathematics, 5 (1983), S. 279 - 297

Schon bekannt : Bezeichnet man im Diagramm von b) [Abbildung 1.1] die Knoten der untersten Reihe mit „b“, falls sie Ende einer Waagerechten sind, und mit „a“ sonst, erhält man $\varphi^6(a)$ und Analoges für die anderen Zahlen.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(a)$ ist übrigens ein „Fraktal“ in dem Sinne, dass es sich selbst unendlich oft enthält.

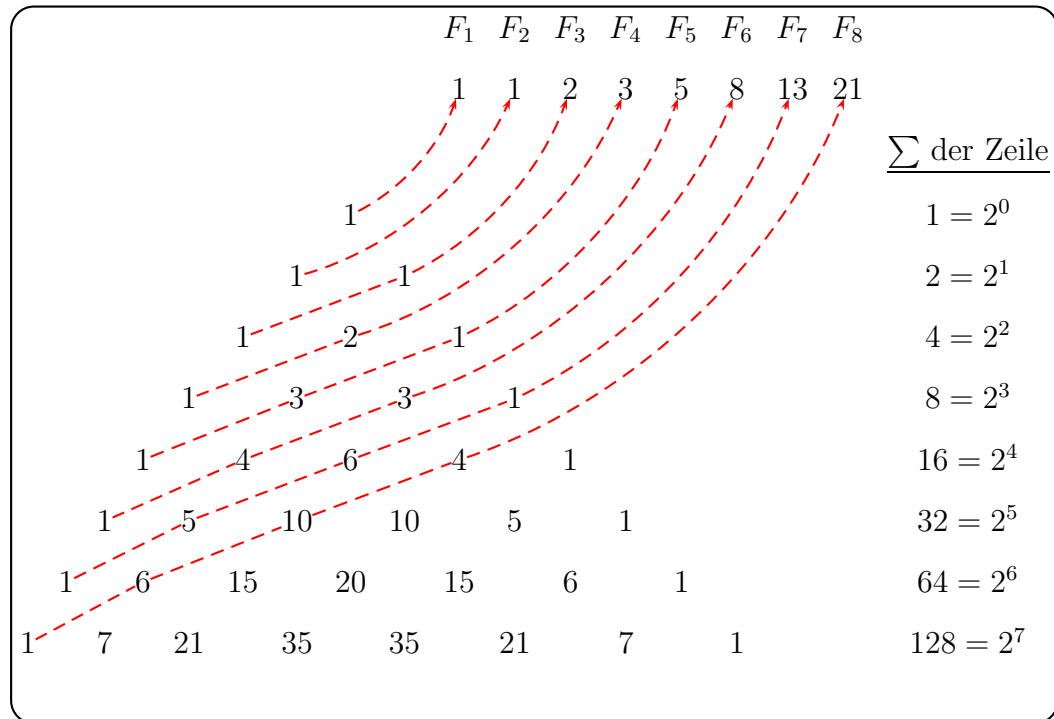


Abbildung 1.2: PASCALSches Dreieck mit Zeilensummation und Schrägsummen

d) PASCALSche Dreieck

Es gibt ≥ 3 Beweise: Zum einen der inhaltliche Beweis mittels Binomialkoeffizienten, zum anderen kann man einen Induktionsbeweis angeben; auch der binomische Satz lässt sich benutzen.

Vermutung :

$$\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-\nu}{\nu} = F_{n+1} (n \in \mathbb{N}_0) \quad (1.2)$$

Beweis :

I: Induktion nach $\nu - n$ oder (ganz ähnlich)

II: Mit $S_n \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-\nu}{\nu}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ hat man

$$S_0 = \sum_{\nu=0}^0 \binom{0-\nu}{\nu} = 1 = F_1 \text{ und}$$

$$S_1 = \sum_{\nu=0}^0 \binom{1-\nu}{\nu} = 1 = F_2$$

für $n \in \mathbb{N}$ ferner

$$\begin{aligned}
S_n + S_{n-1} &= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-\nu}{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-\nu}{\nu} \\
&= \begin{cases} \sum_{\nu=0}^k \binom{n-\nu}{\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n-(1+\nu)}{\nu} & \text{falls } n = 2k \\ \sum_{\nu=0}^k \binom{n-\nu}{\nu} + \sum_{\nu=0}^k \binom{n-(1+\nu)}{\nu} & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases} \\
&\stackrel{\mu=\nu+1}{=} \begin{cases} \binom{n}{0} + \sum_{\nu=1}^k \binom{n-\nu}{\nu} + \sum_{\mu=1}^k \binom{n-\mu}{\mu-1} \\ \binom{n}{0} + \sum_{\nu=1}^{k+1} \binom{n-\nu}{\nu} - \binom{n-(k+1)}{k+1} + \sum_{\mu=1}^{k+1} \binom{n-\mu}{\mu-1} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 + \sum_{\nu=1}^k \left(\binom{n-\nu}{\nu-1} + \binom{n-\nu}{\nu} \right) \\ 1 + \sum_{\nu=1}^{k+1} \left(\binom{n-\nu}{\nu-1} + \binom{n-\nu}{\nu} \right) - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_{=0} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{\nu=0}^k \binom{n-\nu+1}{\nu} \\ \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{n-\nu+1}{\nu} \end{cases} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-\nu}{\nu} = S_{n+1}
\end{aligned}$$

q.e.d., wegen Formel (1.1)

□

e) Es ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

offenbar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.3)$$

Beweis :

Induktionsanfang: Erledigt!

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &\stackrel{\text{Ind. Vor.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_n & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \begin{pmatrix} F_{(n+1)-1} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{(n+1)+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Problem 1 : $|\mathbb{P} \cap \mathbb{F}| \in \mathbb{N} ? \{ \text{endlich oder nicht?} \}$

Satz 1 : $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine Folge über \mathbb{N}_0 . Es sind äquivalent $[\circlearrowleft]$:

a) $\alpha = F$

b) $\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $a_0 = 0, a_1 = 1, \sum_{\nu=0}^{\lfloor n \rfloor} a_\nu = a_{n+2} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

d) $a_0 = 0, a_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-\nu}{\nu} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Beweis :

$\alpha : \{b) \Leftrightarrow a)\} \Rightarrow$: I. Induktion nach n , oder

II. Es ist $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, also $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$;
ferner hat man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ a_{n-1} + a_n & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mithin $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \in \mathbb{N})$

\Leftarrow : (Kapitel 1) Beispiel 1e !

$\beta : \{a) \Leftrightarrow c)\} \Rightarrow$: Wegen

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 \\ F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\dots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^n F_\nu = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1,$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $\sum_{\nu=0}^n a_\nu = a_{n+2} - 1 (n \in \mathbb{N}_0)$

\Leftarrow : **Behauptung:** $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \in \mathbb{N})$

Beweis : Induktion nach n :

$$\begin{aligned} \text{I.A.: } a_2 &= \sum_{\nu=0}^0 a_\nu + 1 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1 \text{ und damit} \\ a_3 &= \sum_{\nu=0}^1 a_\nu + 1 = a_0 + a_1 + 1 = a_1 + a_2 \end{aligned}$$

I.S.: Für $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ hat man

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} + a_n &= \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu + 1 + \sum_{\nu=0}^n a_\nu + 1 \\
 &= \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\mu-1} + 2 \\
 &= \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu + a_{\nu-1}) + 2 \\
 &\stackrel{\text{Ind.Vor.}}{=} 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu+1} + 1 \\
 &= a_0 + a_1 + \sum_{\mu=2}^n a_\mu + 1 \\
 &= \sum_{\mu=0}^n a_\mu + 1 = a_{n+2}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

$\gamma : \{a\} \Leftrightarrow d\}$ Übung!

□

Korollar A :

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (1.4)$$

(1.4) heißt CASSININISCHE⁴ Identität gelegentlich auch SIMSONSCHE⁵ Formel.

⁴ Giovanni Domenico (Jean-Dominique) Cassini (I) (*8.6.1625 Pernald (Genua); †14.9.1712 Paris) bedeutender Astronom, Mathematiker, Prof. in Bologna (Nachfolger von CAVALIERI). Leiter der Pariser Sternwarte – wie auch sein Sohn Jacques, dessen Sohn César-François Cassini de Thury und dessen Sohn Jean-Dominique Comte de Cassini ! –: Rotationsperioden von Jupiter, Venus, Mars, Entdeckung von vier Saturnmonden; Cassinischer Streifen (Teilung) zwischen ersten und zweitem Saturnring; Planeten als Rotationsellipsoide; Mondbewegung; Cassinische Ovalen (Verallgemeinerung der (Bernoullischen) Lemniskate [ebene Kurve in der Form einer liegenden Acht])

– Identität: Histoire Acad. Roy. Sc. Paris année 1680, Seite 309 (201 bei Knuth!).

⁵ Robert Simson (*14.10.1687 West Kilbride, Ayrshire Schottland; †1.10.1768 Glasgow): Prof. in Glasgow, edierte Werke von PAPPOS und EUKLID

– Formel: Phil. Trans. Roy. Soc. London, 48, I (1753), S. 368-376

b) Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1} \quad (1.5)$$

c) Jede zweite Fibonaccizahl ist Summe zweier Quadrate, genauer: Jede Fibonaccizahl ungeraden Indexes u ist Summe der Quadrate zweier konsekutiver (d.h. aufeinanderfolgender) Fibonaccizahlen, und zwar von $F_{\frac{u-1}{2}}$ und $F_{\frac{u+1}{2}}$. Umgekehrt ist damit die Quadratsumme irgendzweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen F_n und F_{n+1} eine Fibonaccizahl, nämlich F_{2n+1} .

Beweis :

a) **I.** Induktion nach n ! Oder

II. Anwendung von Determinaten-Funktion auf Formel(1.3) aus (Kapitel 1) Beispiel 1e, siehe auch (Kapitel 1) Satz 1b, liefert

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(1.3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n = (-1)^n$$

b) **I.** Induktion nach n ! Oder

II. Für $m = 0$ oder $n = 0$ erweist sich Formel(1.5) trivialer Weise als richtig.

Seien also $m, n \in \mathbb{N}$: dann folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{m+n-1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+1} \end{pmatrix} &\underbrace{=}_{(1.3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{m+n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &\underbrace{=}_{(1.3)} \begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1}$

c) $m = n \in \mathbb{N}_0$ in Formel(1.5) eingesetzt ergibt:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \quad (1.6)$$

□

Satz 2 :

a) Es gilt $F \nearrow$, sogar $F|_{\mathbb{N}-\{1\}} \nearrow$, d.h.

$$F_n < F_{n+1} (n \in \mathbb{N} - \{1\}) \quad (1.7)$$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n - 1 \leq F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad (1.8)$$

und für $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ sogar

$$\left(\frac{9}{8}\right)^n < F_n \quad (1.9)$$

Beweis :

a) Wir zeigen Formel (1.7) durch Induktion nach n :

I.A.: $F_2 = 1 < 2 = F_3 < 3 = F_4$

I.S.: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \underbrace{<}_{\text{Ind.Vor.}} F_{n+1} + F_n = F_{(n+1)+1} = F_{n+2}$

Der Rest folgt trivial!

b) Der Teil $n - 1 \leq F_n$ aus Formel (1.8) wird durch Induktion nach n mittels Formel (1.7) bewiesen: Übung!
Auch der Teil $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ folgt mit Induktion nach n :

I.A.: $F_0 = 0 < 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^0, F_1 = 1 < \left(\frac{5}{3}\right)^1$

I.S.: Wegen $72 < 75$ hat man $\frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3} < \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$,
also

$$\begin{aligned} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} & \underbrace{<}_{\text{Ind.Vor.}} \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \\ & = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{3} + 1\right) \\ & < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Der Beweis der Formel (1.9) läuft ganz analog: Übung !

□

Kapitel 2

Die Binetsche Formel

Bemerkung 2 : Nächstes Ziel ist eine explizite Darstellung von F_n , d.h. eine möglichst einfache Formel der Art $F_n = \dots$, wobei auf der rechten Seite keine Fibonaccizahlen auftreten sollen.

Dazu:

Erinnerung 2 Erzeugende (generating) Funktionen: – auch als „ars inveniendi“ (Kunst zu[er]finden; {ars: lat. Kunst, invenire: lat. finden, erfinden}) oder „filum cogitandi“ (Denkrichtschnur {filum: lat. Faden; cogitare: lat. überlegen}) bezeichnet.– Um eine Folge $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ – etwa über \mathbb{R} oder auch \mathbb{C} – zu untersuchen, betrachtet man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ als Funktion von \mathbb{R} in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} in \mathbb{C} (seit dem Barock: ABRAHAM MOIVRE 1722, DANIEL BERNOULLI 1728, JAMES STERLING 1730 und LEONARD EULER 1741 ff.).

Vorteil: α wird als Ganzes gehandhabt und viele – analytische ! – Beziehungen helfen; ferner kann hergeleitet und muss nicht geraten werden.

Nachteil: Gewisse Konvergenzfragen, die jedoch recht salopp behandelt werden können, da es zum einen bekanntlich – Formale Sprachen ! – eine ausgebaute Theorie sogenannter „Formaler Potenzreihen über Halbringen“ gibt, zum anderen aber auch die so erhaltenden Beziehungen anders (etwa durch Induktion) bewiesen werden können.

Dazu:

α) Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n x^\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

gliedweise Differentiation innerhalb des Konvergenzintervalls bzw. -kreises bei $x \neq 0$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{(-1)(-1)}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

für $|x| < 1$, da auch für $x = 0$ richtig.

Abermalige Differentiation von $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$

$$\text{ergibt } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$\text{mithin } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} = (1-x)^{-3},$$

$$\text{und daher } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n = \frac{x^2}{(1-x)^3} \text{ für } |x| < 1$$

Allgemein (Beweis als Übung!) erhält man so

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} (k \in \mathbb{N}_0, |x| < 1) \quad (2.1)$$

- $\beta)$ Sei nun $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $q_0 = 1$ und $q_{n+1} = q_n + 2n + 3$ für $n \in \mathbb{N}_0$
Die erzeugende Funktion Q von q wird für $|x| < 1$ betrachtet:

$$\begin{aligned} Q(x) &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^{n-1} \\ &\stackrel{=}{\underbrace{\quad}}_{m=n-1} 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} q_{m+1} x^m \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (q_n + 2n + 3) x^n \\ &= 1 + xQ(x) + 2x \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 3x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

mittels (2.1) - für $k = 1$ und $k = 0$ - folgt

$$(1-x)Q(x) = 1 + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{3x}{1-x}$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n &= Q(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \binom{n}{2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n(n-1) + 3n) x^n \end{aligned}$$

also $q_n = 1 + n^2 - n + 3 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

(In der Tat: $q_0 = (0+1)^2 = 1$ und

$$q_{n+1} = q_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = ((n+1)+1)^2$$

!)

Satz 3 : (Binetsche Formel 1843⁶): Es ist

$$F_n = 5^{-\frac{1}{2}} (\gamma^n - \bar{\gamma}^n) (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.2)$$

mit $\gamma \Leftarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656381177203\dots$ ⁷

und $\bar{\gamma} \Leftarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618033988749\dots$

Beweis :

⁶ JACQUES PHILIPPE MARIE BINET (*2.2.1786 Rennes, †12.5.1856 Paris), Prof. an der 'Ecole Polytechnique (Nachfolger von POISSON) und am Coll'ège de France, Akademienmitglied und Chevalier de la L'égion d'Honneur:

Grundlagen der Matrizentheorie (Multiplikationsregeln 1812), Analysis, Zahlentheorie (Euklidischer Algorithmus) – Formel: Comptes Rendus Paris, 17 (1843), Seite 563. - Jedoch schon bei P. BERNOULLI: Commentari Acad. Sci. Petropol, 3 (1728), Seiten 85 - 100

⁷ Erstmals als Dezimalzahl - $\approx 1,61803340 - 1597$ in einem Brief von MICHAEL MAESTLIN (*30.9.1550 Göppingen, †20.10.1631 Tübingen) – Mathematiker und Astronom, Diakon in Backnang, Prof. in Heidelberg und Tübingen; sein Nachfolger war WILHELM SCHICKARD! – an seinen Schüler und Freund JOHANNES KEPLER

I: Induktion nach n oder (ähnlich!)

II: Mit $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $a_n = 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^n - \bar{\gamma}^n)$
 hat man $a_0 = 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^0 - \bar{\gamma}^0) = 5^{-\frac{1}{2}}(1 - 1) = 0$
 und wegen

$$\gamma - \bar{\gamma} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \quad (2.3)$$

auch $a_1 = 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^1 - \bar{\gamma}^1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$
 Ferner gilt

$$\gamma + \bar{\gamma} = 1 \text{ und} \quad (2.4)$$

$$\gamma^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = 1 + \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2 \cdot 2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \gamma \quad (2.5)$$

daher auch

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^2 &= (1 - \gamma)^2 = 1 - 2\gamma + \gamma^2 \stackrel{(2.5)}{=} 1 - 2\gamma + 1 + \gamma \\ &= 2 - \gamma = 1 + 1 - \underbrace{\gamma}_{(2.4)} = 1 + \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (2.6)$$

was für $n \in \mathbb{N}$ bedingt:

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_n &= 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{n-1} - \bar{\gamma}^{n-1} + \gamma^n - \bar{\gamma}^n) \\ &= 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{n-1}(1 + \gamma) - \bar{\gamma}^{n-1}(1 + \bar{\gamma})) \\ &\stackrel{(2.5, 2.6)}{=} 5^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{n+1} - \bar{\gamma}^{n+1}) \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

und somit $\alpha = F$

oder **III:** Sei φ die erzeugende Funktion von F , also $\varphi(x) \Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n$ ($x \in \mathbb{R}[\mathbb{C}]$)

Nach (1.8) ist $F_n < \binom{5}{3}^n$, also $\sqrt[n]{F_n} < \frac{5}{3}$ und damit für den Konvergenzradius r von φ bekanntlich.

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n|}} \geq \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} > 0$$

Für $|x| < \frac{3}{5} < 1$ folgt daher

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n+1} - F_{n-1}) x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \\
 &\stackrel{x \neq 0}{=} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1} - x \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^{n+1} \\
 &= \frac{1}{x} \left(\sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m - F_1 \gamma \right) - x \varphi(x) \\
 &= \frac{\varphi(x)}{x} - 1 - x \varphi(x)
 \end{aligned}$$

somit $x\varphi(x) = \varphi(x) - x - x^2\varphi(x)$ (auch für $x = 0$)
daher $(x^2 + x - 1)\varphi(x) = -x$ oder $\varphi(x) = \frac{x}{x^2 + x - 1}$.
Die Nullstellen x_1, x_2 des Nenners ergeben sich zu

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4})$$

also $x_1 = -\bar{\gamma}$ und $x_2 = -\gamma$

Partialbruchzerlegung von $\varphi(x)$ liefert damit

$$-\frac{x}{x^2 + x - 1} = \frac{a}{x + x_1} + \frac{b}{x - x_2} = \frac{a}{x + \bar{\gamma}} + \frac{b}{x + \gamma},$$

folglich $ax + a\gamma + bx + b\bar{\gamma} = -x$

und

$$\begin{aligned}
 a + b &= -1 \\
 \gamma a + \bar{\gamma} b &= 0 \\
 -\gamma a - \gamma b &= \gamma
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{5}b \stackrel{(2.3)}{=} (\bar{\gamma} - \gamma)b = \gamma, \text{ also } b = \frac{-\gamma}{\sqrt{5}} \text{ und } a = -b - 1 = \frac{\gamma}{\sqrt{5}} - 1 =$$

$$\frac{\gamma - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{5}}, \text{ wegen}$$

$$\gamma \bar{\gamma} \stackrel{(2.4)}{=} \bar{\gamma} - \bar{\gamma}^2 \stackrel{(2.6)}{=} \bar{\gamma} - (1 + \bar{\gamma}) = -1 \quad (2.7)$$

– oder, da (2.5) und (2.6) zufolge γ und $\bar{\gamma}$ gerade die Lösungen von

$$x^2 = 1 + x \quad (2.8)$$

sind, VIÈTE! – somit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n &= \varphi(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} \stackrel{PBZ}{=} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{5}(x + \bar{\gamma})} - \frac{\gamma}{\sqrt{5}(x + \gamma)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\gamma \bar{\gamma}}{\gamma x + \gamma \bar{\gamma}} - \frac{\gamma \bar{\gamma}}{\bar{\gamma} x + \gamma \bar{\gamma}} \right) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\gamma x - 1} - \frac{-1}{\bar{\gamma} x - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \gamma x} - \frac{1}{1 - \bar{\gamma} x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\gamma} x)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^n - \bar{\gamma}^n) x^n \end{aligned}$$

$$\text{also } F_n = \frac{\gamma^n - \bar{\gamma}^n}{\sqrt{5}} (n \in \mathbb{N}) \text{ \{Koeffizientenvergleich\}}$$

oder auch **IV: Berechnung von γ :**

α) Taschenrechner oder Computeralgebrasysteme

oder β) „von Hand“: Mit $x_0 = \frac{9}{4}$ als „guter“ Näherung für $\sqrt{5}$ hat man nach HERON (bzw. NEWTON!)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{5}{\frac{9}{4}} \right) = \frac{1}{2} \frac{81 + 80}{36} \\ &= \frac{1}{2} \frac{161}{36} = \frac{161}{72} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{161}{72} \right) = \frac{72 + 161}{2 \cdot 72} = \frac{233}{144} \text{ Zähler und Nenner sind Fibonaccizahlen} \\ &= 1,6180\bar{5} \end{aligned}$$

also einen relativen Fehler $< \frac{14}{1000} \text{ ‰!}$

□

Korollar A : Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt sogar, dass

$$F_n \text{ gleich } \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \text{ gerundet zur nächsten ganzen Zahl ist} \quad (2.9)$$

oder

$$F_n = \begin{cases} \lfloor \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \rfloor & \text{für gerades } n \\ \lceil \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \rceil & \text{für ungerades } n \end{cases} \quad (2.10)$$

Beweis : Zum Nachweis von (2.9) genügt (2.2) zufolge

$$\left| \frac{\bar{\gamma}^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2} (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.11)$$

zu zeigen: Induktion nach n :

I.A.: Es ist $\sqrt{5} > 2$ und so

$$\left| \frac{\bar{\gamma}^0}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

I.S.: Wegen $\sqrt{5} < 3$ gilt

$$|\bar{\gamma}| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1 \quad (2.12)$$

und daher

$$\left| \frac{\bar{\gamma}^{n+1}}{\sqrt{5}} \right| = |\bar{\gamma}| \cdot \left| \frac{\bar{\gamma}^n}{\sqrt{5}} \right| \underbrace{<}_{I.V.} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Der Rest [also Formel (2.10)] folgt mit $(-1)^n = {}^\pm 1$

□

Korollar B : Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\gamma^n = F_n \gamma + F_{n-1} \text{ und } \bar{\gamma}^n = F_n \bar{\gamma} + F_{n-1} \quad (2.13)$$

Beweis :

I: Induktion nach n

oder **II**: Wegen

$$\frac{\gamma^2 + 1}{\sqrt{5}} \underbrace{=}_{(2.7)} \frac{\gamma(\gamma - \bar{\gamma})}{\sqrt{5}} \underbrace{=}_{(2.3)} \gamma \quad (2.14)$$

hat man

$$\begin{aligned} F_n \gamma + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^{n+1} - \bar{\gamma}^n \gamma + \gamma^{n-1} + \bar{\gamma}^{n-1}) \\ &\underbrace{=}_{(2.7)} \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^{n-1} (\gamma^2 + 1) + \bar{\gamma}^{n-1} - \bar{\gamma}^{n-1}) \\ &\underbrace{=}_{(2.14)} \gamma^n \end{aligned}$$

Für $\bar{\gamma}^n$ ganz analog!

□

Korollar C : Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \gamma \quad (2.15)$$

Beweis : Für $n > 1$ hat man (2.13) zufolge

$$\frac{\bar{\gamma}^n}{F_{n-1}} - 1 = \bar{\gamma} \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\gamma}^n}{F_{n-1}} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \underbrace{=}_{(2.12),1} 0 - 1$$

und mithin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{-1}{\bar{\gamma}} \underbrace{=}_{2.7} \gamma$$

□

Korollar D : Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} F_{\nu+k} = F_{2n+k} \quad (2.16)$$

speziell,

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} F_{\nu} = F_n \quad (2.17)$$

Beweis : Man hat

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} F_{\nu+k} &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (\gamma^{\nu+k} - \bar{\gamma}^{\nu+k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^k \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \gamma^{\nu} - \bar{\gamma}^k \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \bar{\gamma}^{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^k (1 + \gamma)^n - \bar{\gamma}^k (1 + \bar{\gamma})^n) \\ &\stackrel{(2.5, 2.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^k (\gamma^2) - \bar{\gamma}^k (\bar{\gamma}^2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\gamma^{2n+k} - \bar{\gamma}^{2n+k}) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} F_{2n+k} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3 :

- a) γ wie „goldener Schnitt“ (siehe Kapitel 3!), meist φ , auch Φ , von $\Phi\epsilon\iota\delta\iota\alpha\varsigma$ (PHEIDIAS: $\ast \approx -490$ Athen, $\dagger \approx -438$ Athen?; bedeutender griechischer Bildhauer, siehe Kapitel 3), oder früher τ von $\tau\omicron\mu\eta$ (Tomä Schnitt), gelegentlich auch α (VOROBIEV) und für $\bar{\gamma}$ entsprechend $\hat{\varphi}$ oder ψ , bzw. $\hat{\Phi}$ oder Ψ , und β
- b) (2.2) bzw. (2.9) oder (2.10) ist natürlich starke Hilfe für Untersuchung von F (siehe auch Korollar B, C, D). Mittels (2.2) lässt sich F leicht auf \mathbb{Z} – sogar auf \mathbb{R} oder \mathbb{C} (dann allerdings mit Werten aus \mathbb{C}) – **erweitern**:

$$\hat{F} = x \mapsto 5^{-\frac{1}{2}} (\gamma^x - \bar{\gamma}^x)$$

- c) **Rekursion:** (ganz analog auch allgemeiner für größere Rekursionstiefen als 2): $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ sei ein (kommutativer) Körper - etwa $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ oder \mathbb{C} -, $a, b \in K$ und R die Menge der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ über K mit

$$(*)a_{n+1} = aa_n + ba_{n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$, also $R = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} | \forall n \in \mathbb{N}_0 (a_n \in K \wedge (n \neq 0 \Rightarrow (*)))\}$.
Dann ist $\mathcal{R} = (R, +)$ ein höchstens 2-dimensionaler \mathcal{K} -Vektorraum.
Seien α, β und δ aus R , etwa $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\delta = (d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

I: $R \neq \emptyset$, denn die Nullfolge $(0)_{n \in \mathbb{N}_0} \in R$

II: Mit $c \in K$ hat man

$$ca_{n+1} \underbrace{=}_{(*)} c(aa_n + ba_{n-1}) = a(ca_n) + b(ca_{n-1})$$

also $c\alpha \Leftrightarrow (ca_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in R$ und wegen

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &\underbrace{=}_{(*)} aa_n + ba_{n-1} + ab_n + bb_{n-1} \\ &= a(a_n + b_n) + b(a_{n-1} + b_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

auch $\alpha + \beta \Leftrightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R$

III: $\dim \mathcal{R} \leq 2$: zu zeigen: α, β, δ sind linear abhängig:

Die lineare Abhängigkeit von $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ und (d_0, d_1) bedingt die von α, β, δ : Mit $(x, y, z) \in K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und $a(a_0, a_1) + y(b_0, b_1) + z(d_0, d_1) = 0$ hat man

$$\begin{aligned} xa_{n+1} + yb_{n+1} + zd_{n+1} &= x(aa_n + ba_{n-1}) + y(ab_n + bb_{n-1}) + z(ad_n + bd_{n-1}) \\ &= a(xa_n + yb_n + zd_n) + b(xa_{n-1} + yb_{n-1} + zd_{n-1}) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ (Induktion nach n) und damit die lineare Abhängigkeit von α, β, δ . Nun sind aber $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ und (d_0, d_1) linear abhängig – Vektoren in der Ebene! – also auch α, β, δ .

: Basis für \mathcal{R} ? Ansatz: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Denn

$$x^{n+1} = x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} = ax^n + bx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

für $n = 1$ speziell

$$(**)x^2 = ax + b$$

\mathcal{K} habe eine von 2 verschiedene Charakteristik – d.h. $1 + 1 \neq 0$, also u.a. $\mathcal{K} \neq GF(2)$ – und es sei $a^2 \neq -4b$.

(**) hat nun - bei geeignetem a, b und \mathcal{K} - die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{D})$ mit $D = a^2 + 4b \underbrace{=}_\text{Vor.} 0$

Seien $\xi \Leftarrow (a_1^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\eta \Leftarrow (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Menge $\{\xi, \eta\}$ eine Basis von \mathcal{R} und \mathcal{R} nach Obigem 2-dimensional:

$\alpha)$ $\xi, \eta \in \mathcal{R}$: Für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= x_1^{n-1} x_1^2 \\ &\underbrace{=}_{(**)} x_1^{n-1} (ax_1 + b) \\ &= ax_1^n + bx_1^{n-1} \end{aligned}$$

also $\xi \in R$, und entsprechend für η

$\beta)$ ξ und η sind linear unabhängig: Mit $u, v \in K$ und $0 = u\xi + v\eta = (ux_1^n + vx_2^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folgt für $n = 0$ und $n = 1$ speziell

$$(***)0 = ux_1^0 + vx_2^0 = u + v$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= ux_1 + vx_2 \\ &\underbrace{=}_{(***)} ux_1 - ux_2 \\ &= u(x_1 - x_2) \\ &= u\left(\frac{1}{2}(a + \sqrt{D}) - \frac{1}{2}(a - \sqrt{D})\right) \\ &= u\sqrt{D} \end{aligned}$$

wegen $D \neq 0$ daher $u = 0$ und (***) zufolge $v = 0$.

Für $a = 1 = b$ hat man - in \mathbb{R} - insbesondere $a^2 = 1 \neq -4 = -4b$ und somit $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4})$ also $x_1 = \gamma$ und $x_2 = \bar{\gamma}$, und die Existenz von $u, v \in \mathbb{R}$ mit $F = (u\gamma^n + v\bar{\gamma}^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, speziell $F_0 = 0 = u + v$ und $F_1 = \gamma u + \bar{\gamma} v$. Multiplikation der ersten Gleichung mit γ und Subtraktion der zweiten liefert $(\gamma - \bar{\gamma})v = -1$, also (2.3) zufolge $v = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ und $u = -v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ mithin ist $F_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\gamma}^n}{\sqrt{5}} (n \in \mathbb{N}_0)$, d.h. wiederum (2.2).

d) **(Ver)Schiebungen[shifts]:**

Mit α ist jede aus α **ge(ver)schobene Folge** [shifted sequence]:
eine Lösung von (*) aus c),

also **i** $\alpha \in R \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 (\alpha_k = (a_{n+k})_{n \in \mathbb{N}_0} \Rightarrow \alpha_k \in R)$ denn $a_{n+k+1} =$
 $aa_{n+k} + ba_{n+k-1}$

sodann **ii** α, α_1 lin. unabh. $\Leftrightarrow (a_0, a_1), (a_1, a_2)$ lin. unabh.

Beweis :

\Leftarrow : Trivial!

\Rightarrow : durch Kontraposition:

$(a_0, a_1), (a_1, a_2)$ seien linear abhängig, dann sind gemäß
c III auch α, α_1 linear abhängig

□

Ferner **iii** $(a_0, a_1), (a_1, a_2)$ lin. unabh. $\Leftrightarrow ba_0^2 + aa_0a_1 \neq a_1^2$

Beweis : $(a_0, a_1), (a_1, a_2)$ lin. unabh. \Leftrightarrow das Gleichungssystem

$$a_0x + a_1y = 0$$

$$a_1x + a_2y = 0$$

hat nur die triviale Lösung

$$\Leftrightarrow 0 \neq \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_2 - a_1^2 = a_0(aa_1 + ba_0) - a_1^2 = ba_0^2 + aa_0a_1 - a_1^2$$

□

Schließlich **iv** $\{\alpha, \alpha_1\}$ Basis von $\mathcal{R} \Leftrightarrow ba_0^2 + aa_0a_1 \neq a_1^2$

Beweis : $\{\alpha, \alpha_1\}$ Basis von $\mathcal{R} \Leftrightarrow \underbrace{(a_0, a_1), (a_1, a_2)}_{(i), (ii)} \text{ lin. unabh.}$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(iii)} ba_0^2 + aa_0a_1 \neq a_1^2$$

□

Mit $G \Leftarrow (F_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist (iv) zufolge $\{F, G\}$ eine Basis $\mathcal{V} = (v, +)$,
dem 2-dim Vektorraum der Lösungen von (*) für $a = 1 = b$, da ja

$$1 \cdot F_0^2 + 1 \cdot F_0F_1 = 0 \neq 1 = F_1^2$$

Damit ist gezeigt: Jede Lösung $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
ist Linearkompositum von F und G , es gibt also $u, v \in \mathbb{R}$ mit $\alpha =$
 $uF + vG$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ existiert nach (i) daher auch $u, v \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $F_{n+k+1} = uF_{n-1} + vF_n (n \in \mathbb{N})$; für $n = 1$ und $n = 2$ gilt damit

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= uF_0 + vF_1 = v \\ \text{und } F_{k+3} &= uF_1 + vF_2 = u + v = u + F_{k+2} \\ \text{also } u &= F_{k+3} - F_{k+2} = F_{k+1} \end{aligned}$$

und mithin

$$F_{n+k+1} = F_{k+1}F_{n-1} + F_{k+2}F_n (n \in \mathbb{N}), \quad (2.18)$$

was aber auch leicht aus (1.5) folgt.

- e) LUCAS-Zahlen: Die Lösung $L = (L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von (*) in c) ebenfalls mit $a = 1 = b$ und den Anfangswerten $L_0 = 2$ und $L_1 = 1$ wird – **meist – Folge der Lucas-Zahlen**⁸ genannt:

n	L_n	n	L_n	n	L_n
0	2	6	18	12	322
1	1	7	29	13	521
2	3	8	47	14	843
3	4	9	76	15	1364
4	7	10	123	16	2207
5	11	11	199	17	3571

Tabelle 2.1: Die ersten 17 LUCASzahlen

Analog dem Ende von c) hat man $L_0 = 2 = u + v$ und $L_1 = 1 = \gamma_u + \bar{\gamma}v$, mithin $\sqrt{5}v \underbrace{= (\gamma - \bar{\gamma})v}_{(2.3)} = 2\gamma - 1 = 1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5}$,

also $v = 1$ und $u = 2 - v = 2 - 1 = 1$, was allgemein

$$L_n = \gamma^n + \bar{\gamma}^n (n \in \mathbb{N}) \quad (2.19)$$

liefert.

Natürlich gibt es viele Beziehungen zwischen F und L , etwa

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} (n \in \mathbb{N}) \quad (2.20)$$

[Der Beweis ginge mit Induktion, enfällt hier, da „langweilig“] oder

$$L_n = \frac{F_{2n}}{F_n} (n \in \mathbb{N}) \quad (2.21)$$

⁸ LUCAS siehe Fussnote 3); Folge in „Nouv. Corresp. Math., 2 (1876), Seiten 201 - 206“. – Jedoch schon bei LEONARD EULER in seiner „Introductio in Analysin Infinitorum, Lausanne 1748“.

$$\underline{\text{Beweis}} : F_n L_n \underbrace{=}_{(2.2, 2.19)} 5^{-\frac{1}{2}} (\gamma^n - \bar{\gamma}^n) (\gamma^n + \bar{\gamma}^n) = \frac{\gamma^{2n} - \bar{\gamma}^{2n}}{\sqrt{5}} \underbrace{=}_{(2.2)} F_{2n}$$

□

Kombination von (2.20) und (2.21) ergibt:

$$F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.22)$$

(aber auch aus (1.5), Korollar zu Satz (Kapitel 1) Satz 1 b) mit $m = n - 1$)

Ferner hat man

$$\begin{aligned} \frac{L_{n+1}}{L_n} &\underbrace{=}_{(2.21)} \frac{\frac{F_{2(n+1)}}{F_{n+1}}}{\frac{F_{2n}}{F_n}} = \frac{F_n F_{2n+2}}{F_{n+1} F_{2n}} \\ &= \frac{F_n}{F_{n+1}} \cdot \frac{F_{2n} + F_{2n+1}}{F_{2n}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}\right) \end{aligned}$$

also (2.15) gemäß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma) \underbrace{=}_{(2.5)} \frac{\gamma^2}{\gamma} = \gamma \quad (2.23)$$

und allgemeiner für jede Lösung $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von (*) mit $a = 1 = b$ und $a_n \neq 0$ nach c), Ende, entsprechend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{u\gamma^{n+1} + v\bar{\gamma}^{n+1}}{u\gamma^n + v\bar{\gamma}^n} = \frac{u\gamma + v\bar{\gamma} \frac{\bar{\gamma}^n}{\gamma^n}}{u + v\frac{\bar{\gamma}^n}{\gamma^n}}$$

für $u \neq 0$ hat man wegen $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \underbrace{=}_{(2.7)} -\frac{1}{\gamma^2}$ also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{u\gamma}{u} = \gamma \quad (2.24)$$

– was wiederum (2.23) und (2.15) beweist –

und für $u = 0$ schließlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \bar{\gamma}$ ($u = 0 = v$ ist dabei wegen $a_n \neq 0$ ausgeschlossen!)

Nach d) gibt es reelle r und s mit $L = rF + sG$:

$$\begin{aligned} \text{Speziell ist } 2 &= L_0 = rF_0 + sG_0 = r \cdot 0 + s \cdot 1 = s \\ \text{und } 1 &= L_1 = rF_1 + sG_1 = r \cdot 1 + s \cdot 1 = r + s \\ \text{also } r &= -1 \end{aligned}$$

mithin

$$L_n = -F_n + 2G_n = 2F_{n+1} - F_n (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.25)$$

was übrigens für $n = 0$ trivial ist und für $n \in \mathbb{N}$ aus (2.20) folgt:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_{n+1} - F_n + F_{n+1} = 2F_{n+1} - F_n$$

Umgekehrt ist auch $\{L, M\}$ mit $M = (L_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach d) eine Basis von \mathcal{V} (siehe d)), da gemäß d,iv) ja $1 \cdot L_0^2 + 1 \cdot L_0 L_1 = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6 \neq 1 = L_1^2$

Es gibt also $u, v \in \mathbb{R}$ mit $F = uL + vM$;

$$\text{speziell ist } 0 = F_0 = uL_0 + vM_0$$

$$= 2u + v$$

$$1 = F_1 = uL_1 + vM_1$$

$$= uL_1 + vL_2$$

$$= u + 3v$$

$$\text{ferner } 2u + 6v = 2$$

$$5v = 6v - v + 2u - 2u = 2$$

$$v = \frac{2}{5}$$

$$u = -\frac{v}{2} = -\frac{1}{5}$$

und somit

$$F_n = -\frac{L_n}{5} + \frac{2}{5}L_{n+1} = \frac{2L_{n+1} - L_n}{5} = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5} (n \in \mathbb{N}) \quad (2.26)$$

was aber auch schon aus (2.20) folgt:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n+1} &\stackrel{(2.20)}{=} F_{n-2} + F_n + F_n + F_{n+2} \\ &= F_n - F_{n-1} + 2F_n + F_n + F_{n+1} \\ &= 4F_n + (F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= 5F_n \end{aligned}$$

Damit lassen sich Identitäten (einfach) „übersetzen“: Für $n \in \mathbb{N}$

liefert (1.4) etwa

$$\begin{aligned}
 (-1)^n &= F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = \frac{1}{25}((L_{n-2} + L_n)(L_n + L_{n+2}) - (L_{n-1} + L_{n+1})^2) \\
 &= \frac{1}{25}((2L_n - L_{n-1})(2L_n + L_{n+1}) - L_{n-1}^2 - 2L_{n-1}L_{n+1} - (L_{n-1} + L_n)^2) \\
 &= \frac{1}{25}(4L_n^2 + 2L_n \underbrace{(L_{n+1} - L_{n-1})}_{=L_n} - 3L_{n-1}L_{n+1} - 2L_{n-1}^2 - 2L_{n-1}L_n - L_n^2) \\
 &= \frac{1}{25}(5L_n^2 - L_{n-1}(3L_{n+1} + 2 \underbrace{(L_{n-1} + L_n)}_{L_{n+1}})) \\
 &= \frac{5}{25}(L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1})
 \end{aligned}$$

also

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = (-1)^n \cdot 5 (n \in \mathbb{N}) \quad (2.27)$$

Kapitel 3

Der goldene Schnitt

Bemerkung 4 :

- a) Hier und im Folgenden wird bei geometrischen Betrachtungen stets die Anschauungseben, euklidische Ebene, oder der 3-dimensionale Anschauungsraum, euklidischer Raum, kurz **Ebene** oder **Raum** zu Grunde gelegt: \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3

Für Punkte P und Q bezeichnet \underline{PQ} die **Strecke von P nach Q** , i.e. die Menge der Punkte zwischen P und Q – inklusive der Endpunkte P und Q – und \overline{PQ} ihre **Länge**.

Für $P \neq Q$ sei PQ die Gerade durch P und Q

- b) **Empfehlung:** ALBRECHT BEUTESPACHER / B. PETRI: Der Goldene Schnitt, Heidelberg, Berlin, Oxford; 1996², 187 Seiten > 300 Literaturhinweise!

Definition 2 Major, Minor, Goldener Schnitt:

A und B seien irgendwelche Punkte:

- α) Wird \underline{AB} durch $S(\in \underline{AB})$ so geteilt, dass $\overline{AS} > \overline{SB} > 0$ ist, heiße \overline{AS} **Major** und \overline{SB} **Minor** von \underline{AB} (bezüglich S).
- β) Eine Strecke ist **stetig** oder im **Goldenen Schnitt** geteilt, wenn sich die größere Teilstrecke zur kleineren verhält wie die Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke; mit anderen Worten: \underline{AB} ist durch S stetig geteilt mit Major $M = \overline{AS}$ und Minor $m = \overline{SB}$ im Falle $\frac{M}{m} = \frac{M+m}{M}$

Satz 4 :

Eine Strecke ist genau im Falle

$$M = \gamma m \quad (3.1)$$

stetig geteilt mit Major M und Minor m

Beweis : Per definitionem hat man $x \Leftrightarrow \frac{M}{m} = \frac{M+m}{M} = 1 + \frac{1}{x}$ oder wegen $M > m > 0$, also $x > 0$, dann äquivalent $x^2 = x + 1$ und wegen (2.8) und $x > 0$ damit gleichwertig $\gamma = x = \frac{M}{m}$

□

Satz 5 Konstruktion des Goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal:

Gemäß folgender Konstruktion wird die Strecke \overline{AB} mit $A \neq B$ durch S stetig geteilt: Errichte auf AB in B ein Lot der Länge $r = \frac{\overline{AB}}{2}$ mit Endpunkt C . Der Kreis um C mit Radius r schneidet \overline{AC} in D und der Kreis um A mit Radius \overline{AD} die Strecke \overline{AB} in S .

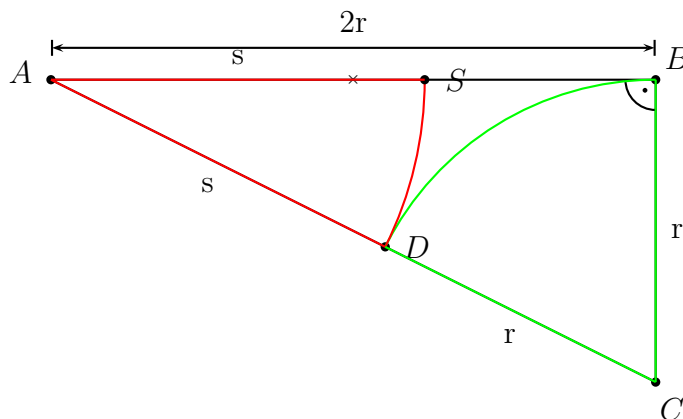


Abbildung 3.1: Konstruktion des Goldenen Schnittes

Beweis : Mit $s \Leftrightarrow \overline{AD}$ folgt sukzessive

$$\begin{aligned} s^2 + 2sr &= (s + r)^2 = (2r)^2 + r^2 = 5r^2 \\ s^2 &= 2sr - 4r^2 = 0 \\ s_{1,2} &= \frac{1}{2}(-2r \pm \sqrt{4r^2 + 16r^2}) \end{aligned}$$

wegen $s > 0$ also

$$\begin{aligned}\overline{AS} = s &= -r + r\sqrt{5} = r(\sqrt{5} - 1) = r\left(1 + \sqrt{5} - \frac{5-1}{2}\right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2r - r(\sqrt{5} - 1)) \\ &= \gamma(2r - s) = \gamma\overline{SB}\end{aligned}$$

und nach (Kapitel 3) Satz 4 damit das Gewünschte.

□

Bemerkung 5 : Es gibt - seit dem Altertum - sogenannte Goldene Zirkel, mit denen man einfach stetig teilen kann (etwa bei Schreibern!):

a) **Reduktionszirkel:** (siehe Abb 3.2) $M = \gamma m$

Abbildung 3.2: Skizze eines Goldenen Zirkels

Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{x}{y} = \frac{M}{m} = \gamma$

b) **Komfortabler:** (siehe Abb 3.3) $M = \gamma m$

Abbildung 3.3: Skizze eines komfortabeleren Goldenen Zirkels

Behauptung: $x = \gamma y$

Beweis: Übung !

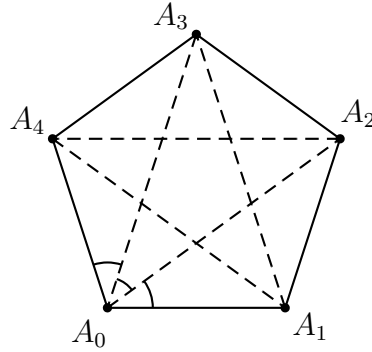
Erinnerung 3 : Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{A}_2$: Die Winkelsumme im n-Eck ist $(n - 2)\pi$, genauer: die Summe der Innenwinkel eines ebenen konvexen n-Ecks ist $(n - 2)\pi$ (Beweis etwa mittels Induktion und Winkelsummen Dreieck!)

Satz 6 : $\mathfrak{F} = A_0A_1A_2A_3A_4$ sei ein ebenes reguläres - d.h. gleiche Seiten, gleiche Winkel und konvex ! - Fünfeck (Pentagon), [siehe Abb 3.4]:

Dann gilt:

a) Jeder (Innen)Winkel hat 108°

b) Alle Diagonalen sind gleich lang: $\forall m, n \in \mathbb{U}_5 : A_n A_{(n+2) \bmod 5} = A_m A_{(m+2) \bmod 5}$

Abbildung 3.4: Skizze eines K_5

- c) Jede Diagonale ist parallel zu ihrer gegenüberliegenden Seite: $\forall n \in \mathbb{U}_5 : A_n A_{(n+2) \bmod 5} \parallel A_{(n+3) \bmod 5} A_{(n+5) \bmod 5}$
- d) Zwei Diagonalen, die keine Ecke gemeinsam haben, teilen sich stetig.
- e) Eine Diagonale verhält sich zu einer Seite im Goldenen Schnitt:
 $\forall m, n \in \mathbb{U}_5 : \overline{A_m A_{(m+2) \bmod 5}} = \gamma \overline{A_n A_{(n+1) \bmod 5}}$

Beweis :

- a) Die Winkelsumme von \mathfrak{F} ist (Kapitel 3) Erinnerung 3 zufolge $(5 - 2)\pi = 3\pi$ und für einen Winkel hat man daher $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$
- b) Wegen Transitivität der Gleichheit genügt zu zeigen $\overline{AD} = \overline{BD}$ [siehe Abb 3.5]
 und dazu $\sphericalangle BAD \rightleftharpoons \alpha = \beta \rightleftharpoons \sphericalangle ABD$:
 Wegen $\overline{AE} = \overline{ED}$ ist $\sphericalangle DAE \rightleftharpoons \delta = \varepsilon \rightleftharpoons \sphericalangle ADE$,
 also $2\delta = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, d.h. $\delta = 36^\circ$ und daher $\alpha = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$;
 ebenso folgt für $\beta = 72^\circ$ und somit $\alpha = \beta$.
- c) Aus Symmetriegründen genügt zu zeigen: $AB \parallel CE$ [siehe Abb 3.6]
 Das Lot von D auf AB habe den Fußpunkt F und schneide CE in S ; Es sei $\sphericalangle FSC \rightleftharpoons \alpha$ und $\sphericalangle BCS \rightleftharpoons \beta$
 Nach b) folgt $\beta = 72^\circ$ und nach (Kapitel 3) Erinnerung 3 damit
 $\alpha \stackrel{E3,a)}{=} \underbrace{2 \cdot 180^\circ - 90^\circ - 108^\circ - 72^\circ}_{= 180^\circ + 90^\circ - 180^\circ} = 90^\circ$ was

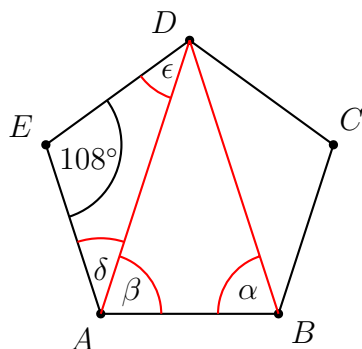


Abbildung 3.5:

$AB \parallel CE$ beweist (gleiche Wechselwinkel bedingen Parallelität!)

- d) Aus Symmetriegründen genügt es, die Behauptung für \underline{BD} und \underline{CE} zu zeigen: [siehe Abb 3.7]

Dazu seien S der Schnitt von BD mit CE sowie $a \Leftarrow \overline{ES}$ und $b \Leftarrow \overline{CS}$. Nach dem Beweis von b) ist $\gamma \Leftarrow \sphericalangle DES = 36^\circ$ und $\beta \Leftarrow \sphericalangle SDE = 72^\circ$, also $\alpha \Leftarrow \sphericalangle DSE = 180^\circ - \underbrace{\beta}_{72^\circ} - \underbrace{\gamma}_{36^\circ} = 180^\circ -$

$$108^\circ = 72^\circ = \beta$$

d.h.

$$(*)a = \overline{DE}$$

und somit

$$\frac{a}{b} \underbrace{=}_{\text{Strahlensatz, undc)}} \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \underbrace{=}_{(*)} \frac{a+b}{a} = \gamma$$

- e) Nach d) hat man (mit den obigen Bezeichnungen) $\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \frac{a+b}{a} = \gamma$

□

Korollar A Konstruktion eines Pentagons der Seitenlänge a mit Zirkel und Lineal: Etwa:

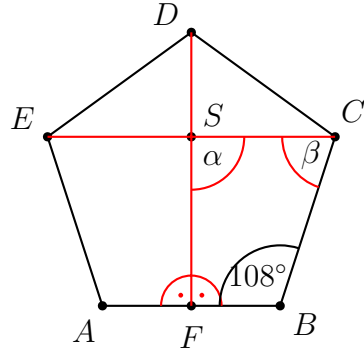


Abbildung 3.6:

- a) In Figur zu Satz 5 (Abb: 3.1) schneide der Kreis um A mit Radius s den um S mit Radius \overline{SB} in T . Der verdreifachte $\sphericalangle SAT$ sei α . A, B, C, D, E seien Punkte mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = a$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \alpha$ dann ist $ABCDE$ ein Pentagon der Seitenlänge a .
- b) Der Kreis um den Mittelpunkt M einer Strecke \overline{AB} mit $\overline{AB} = a$ durch den Endpunkt L eines Lotes in B auf AB der Länge a schneide AB (auf der Seite von B) in S . Der Kreis um A mit Radius $s \Leftarrow \overline{AS}$ schneide den Kreis um B mit Radius s in D . Ergänzt man die Punkte A, B, D in naheliegender Weise durch C und E , hat man in $ABCDE$ ein Pentagon der Seitenlänge a .

Beweis Nur als Skizze:

- a) Mit der **Abbildung 3.8**
und nach dem Beweis von (Kapitel 3) Satz 6b ist $\alpha = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$,
und damit folgt die **Abbildung 3.9**
- b) Wegen $b \Leftarrow \overline{ML} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ hat man $s = \frac{a}{2} + b = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) = \gamma a$ und auch nach (Kapitel 3) Satz 6e das Gewünschte.
[siehe Abb: 3.10]

□

Bemerkung 6 :

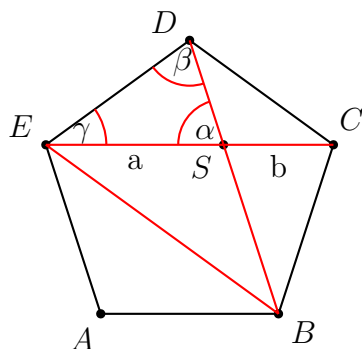


Abbildung 3.7:

a)**Name:** „Goldener Schnitt“ [golden ratio, golden number, golden section; sectio aurea] wurde als Name erstmals schriftlich in einer Fußnote in MARTIN OHMS „Die reine Elementar-Mathematik 1835“⁹ gebraucht.

Bei EUKLID noch „proportio habens medium et duo extremua“, später auch „Teilung im äußeren und mittleren Verhältnis“.

LUCA PACIOLI benutzt „divina proportio“¹⁰, ansonsten auch „stetige Teilung“ und auch „sectio proportionalis“ (proportionale Teilung)

b)**Geschichte:** Goldener Schnitt bereits bei den Pythagoräern, mögl. HIPPOSOS VON METAPONT (= −450): Inkommensurabilität von Seite und Diagonale am Pentagon (Dodekaeder), mögl. auch EUDOXOS VON KUIDOS (*-400 Kuidos, †-347 Kuidos); Buch 2 Satz 11 der Elemente des Euklid explizit.

c)**Pentagramm:** Der Stern aus den Diagonalen eines regulären Fünfecks heißt **Pen-**

⁹ MARTIN OHM (*6.5.1792 Erlangen, †1.4.1872 Berlin), Mathematiker, Privatdozent in Erlangen, Oberlehrer in Thom, Privatdozent und Professor in Berlin – Bruder von GEORG SIMON OHM (*16.3.1789 Erlangen, †6.7.1854 München) berühmter Physiker – Der Vater war Schlossermeister, und erlaubte seiner Tochter ebenfalls eine hervorragende Ausbildung.

¹⁰ LUCA PACIOLI (*1445 Sansepolcro [Toskana, 60 km nördlich von Perugia; Piero della Francesca!], †1517 ib) Mathematiker, Venedig, Rom (LEON BATTISTA ALBATTI!), 1470 Franziskaner, Unis: Perugia, Zaclar (Kroatien), Perugia, Neapel, Rom, Mailand, (LEONARDO DA VINCI), Venedig, Florenz (Universität von Pisa!), Bologna (SCIPIONE DEL FERRO!), Florenz (Santa Croce), Venedig, Perugia, Rom, Sansepolcro – Bücher über Arithmetik und Geometrie, speziell „De divina proportionibus“ Venedig 1509

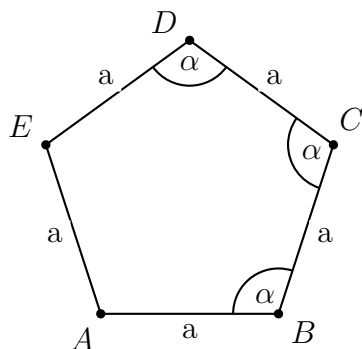


Abbildung 3.9:

Pflanzen, etc.

- d) Im Folgenden Analyse des **Grenzprozesses der Quotienten** sukzessiver Fibonaccizahlen zu γ : Sieht man sich die ersten Quotienten an: $1; 2; 1, 5; 1, \bar{6}; 1, 6; 1, 625; 1, 61538\dots; 1, 61904\dots$ so kann man - über Korollar C zu (Kapitel 2) Satz 3 hinausgehend - vermuten:

Satz 7 : Mit $q_n \Leftrightarrow \frac{F_{n+1}}{F_n}$ sowie $a_n \Leftrightarrow q_{2n-1}b_n \Leftrightarrow q_{2n}$ und $d_n = b_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hat man:

- a) $a_n < b_n$
- b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow$
- c) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge
- d) $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \gamma$

Beweis : Sei $n \in \mathbb{N}$

- a) Formel (1.4) liefert

$$(*) F_{2n-1} F_{2n+1} - F_{2n}^2 = (-1)^{2n} > 0, \text{ also,}$$

$$(**) F_{2n}^2 < F_{2n-1} F_{2n+1}, \text{ und damit}$$

$$a_n = q_{2n-1} = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = q_{2n} = b_n$$

$$q = \gamma$$

□

Beispiel 2 :

- a) Nach (Kapitel 3) Satz 7 folgt $\forall n \in \mathbb{N} : \gamma \approx \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{q_{2n-1} + q_{2n}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right)$ für $n = 8$ damit (vgl. (Kapitel 1) Beispiel 1a)

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{F_{16}}{F_{15}} + \frac{F_{17}}{F_{16}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{987}{610} + \frac{1597}{987} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} (1,61803278689 + 1,61803444782) \\ &= \frac{1}{2} (3,23606723471) \\ &= 1,618033617355 \end{aligned}$$

also ist der absolute Fehler kleiner als 0,0000004

- b) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{18}{7} &= 2 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \\ &= [2, 1, 1, 3] \end{aligned}$$

- c) Ferner gilt

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 + \frac{5 - 1}{2(\sqrt{5} + 1)} \\ &= 1 + \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma}} \\ &= [1, 1, 1, \dots] = [\overline{1}] \end{aligned}$$

- d) Für $ggT(221, 299)$ liefert der **Euklidische Algorithmus** (EA)

$$229 : 221 = 1, \text{ Rest } 78$$

$$\begin{array}{r} 221 \\ --- \\ 78 \end{array}$$

$$221 : 78 = 2, \text{ Rest } 65$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ --- \\ 65 \end{array}$$

$$78 : 65 = 1, \text{ Rest } 13 \quad \leq \text{ ist ggT}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ -- \\ 13 \end{array}$$

$$65 : 13 = 5, \text{ Rest } 0$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ -- \\ 0 \end{array}$$

mithin $ggT(221, 299) = 13$
in der Tat:

$$221 = 13 \cdot 17$$

$$299 = 13 \cdot 23$$

damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{299}{221} &= 1 + \frac{78}{221} \\ \frac{221}{78} &= 2 + \frac{65}{78} \\ \frac{78}{65} &= 1 + \frac{13}{65} \\ \frac{65}{13} &= 5 \end{aligned}$$

also

$$\frac{299}{221} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [1, 2, 1, 5]$$

Erinnerung 4 EA:

Für $a, b \in \mathbb{N}$ sei $r_{-2} \Leftarrow a$, $r_{-1} \Leftarrow b$ und $n, q_\nu, r_\nu \in \mathbb{N}_0$ für $\nu \in \mathbb{U}_{n+1}$ eindeutig bestimmt durch

$$\begin{aligned} r_\nu &\Leftarrow q_{\nu+2}r_{\nu+2} + r_{\nu+1} \\ \text{und } 0 &< r_{\nu+2} < r_{\nu+1} \\ \text{für } \nu &= -2, -1, 0, 1, \dots, n-4, n-3 \\ \text{und } r_{n-2} &\Leftarrow q_n r_{n-1} \\ r_n &\Leftarrow 0 \end{aligned}$$

Dann ist $ggT(a, b) = r_{n-1}$

Mit anderen Worten, als Beweisidee :

Mit

$$Q_\mu \Leftarrow \begin{pmatrix} q_\mu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat man

$$Q_\mu = \begin{pmatrix} r_{\mu-1} \\ r_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\mu-2} \\ r_{\mu-1} \end{pmatrix} (\mu \in \mathbb{U}_{n+1})$$

da Q_μ invertierbar – mit $Q_\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_\mu \end{pmatrix}$ – für jedes μ , ist $Q \Leftarrow (q_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1,2} \Leftarrow \prod_{\mu=0}^n Q_\mu$ invertierbar.

Und es folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{-2} \\ r_{-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} \cdot r_{n-1} \\ q_{21} \cdot r_{n-1} \end{pmatrix}$$

also $r_{n-1} | a, b$ mithin

$$(*) r_{n-1} | ggT(a, b) \Leftarrow d$$

und andererseits

$$\begin{pmatrix} r_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

daher $r_{n-1} \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

(Da $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ als Euklidischer Ring ein Hauptidealring ist !)

und daher $d | r_{n-1}$, somit $(*)$ zufolge $r_{n-1} = d$, q.e.d.

Definition 3 Kettenbruch, $[q_0, q_1, \dots]$; Näherungsbruch: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha_0 \Leftrightarrow \alpha$ sowie $q_\nu \Leftrightarrow \lceil \alpha_\nu \rceil$ und $\alpha_{\nu+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_\nu - q_\nu}$, falls $q_\nu \neq \alpha_\nu$, für $\nu = 0, 1, \dots$

α) Die – durch α eindeutig bestimmte – Folge $[q_0, q_1, \dots]$ heiße (regelmäßige(r)) **Kettenbruch**(entwicklung)(Kb)[continued fraction] **von** α oder **zu** α und α auch **Wert** des Kettenbruchs $[q_0, q_1, \dots]$ – wofür wir auch wie allgemein üblich „par abus de langage“ [franz.: durch Mißbrauch der Sprache] $\alpha = [q_0, q_1, \dots]$ schreiben – sowie q_ν dann ν -**ter Teilnenner** ($\nu = 0, 1, \dots$)

Gibt es ein n ($n \in \mathbb{N}_0$) mit $q_n = \alpha_n$, werde der Kettenbruch **endlich** oder **abbrechend** genannt, sonst **unendlich** oder **nichtabbrechend**.

Existieren – bei einem unendlichen Kettenbruch – n ($\in \mathbb{N}_0$) und k ($\in \mathbb{N}$) mit

$$q_{n+k} = q_n = \lambda k + \kappa (\kappa = 0, \dots, k-1; \lambda \in \mathbb{N})$$

so schreiben wir $[q_0, q_1, \dots, \overline{q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+k-1}}]$ und nennen den Kettenbruch **periodisch**.

β) Es sei

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_0 q_1 + 1 \\ q_1 \end{pmatrix} \text{ und} \\ \begin{pmatrix} P_\nu \\ Q_\nu \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_{\nu-1} \cdot P_{\nu-2} \\ Q_{\nu-1} \cdot Q_{\nu-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_\nu \\ 1 \end{pmatrix} (\nu = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ heiße der ν -te **Näherungsbruch** von α

Beispiel 3 : Für (Kapitel 3) Beispiel 2c - γ ! - ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \gamma, q_0 = \lceil \gamma \rceil = 1 \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - q_0} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}, \\
 q_1 &= \lceil \alpha_1 \rceil = \left\lceil \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} \right\rceil = \lceil \gamma \rceil = 1, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - 1} \\
 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2 - \sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} \\
 &= \frac{2\sqrt{5} + 5 - 3}{4} = \gamma \\
 q_2 &= 1, \dots \\
 \text{und } \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{1}{1} = 1; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1} = 2; \\
 \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ also} \\
 \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{3}{2} \\
 \begin{pmatrix} P_3 \\ Q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \text{also } \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

Satz 8 : Der Kettenbruch von α ist genau dann endlich, wenn α rational ist.

Beweis :

a) Der Kettenbruch von α sei endlich.

Dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha_n = q_n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Ist $n = 0$, haben wir $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{Q}$

Sei $n > 0$:

Ist $\alpha_\nu \in \mathbb{Q}$, so auch $\alpha_{\nu-1}$:

Denn $\alpha_{\nu-1} = \frac{1}{\alpha_\nu} + q_{\nu-1}$

es war ja: $\alpha_\nu = \frac{1}{\alpha_{\nu-1} - q_{\nu-1}}$

Damit folgt $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{Q}$

b) Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, oBdA etwa $\alpha = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

Nach dem **Euklidischen Algorithmus** – siehe (Kapitel 3) Erinnerung 4 – gibt es $n, p_\nu, r_\nu \in \mathbb{N}_0$ für $\nu \in \mathbb{U}_{n+1}$ mit

$$r_{-2} = a, r_{-1} = b$$

$$r_\nu \Rightarrow p_{\nu+2}r_{\nu+1} + r_{\nu+2}(0 < r_{\nu+2} < r_{\nu+1}) \text{ für } \nu = -2, -1, \dots, n-3 \text{ und} \\ r_{\nu-2} \Rightarrow p_n r_{n-1}, r_n = 0$$

Also ist $\alpha_0 = \alpha = \frac{a}{b} = \frac{r_{-2}}{r_{-1}} = p_0 + \frac{r_0}{r_{-1}}(0 < r_0 < r_{-1})$ und $q_0 = \lceil \alpha_0 \rceil = p_0$, mit $\alpha_{\nu+2} = p_{\nu+2} + \frac{r_{\nu+2}}{r_{\nu+1}}$ und $q_{\nu+2} = p_{\nu+2}$ ferner $\alpha_{\nu+3} = \frac{1}{\alpha_{\nu+2} - q_{\nu+2}} = \frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu+2}} = p_{\nu+3} + \frac{r_{\nu+3}}{r_{\nu+2}} q_{\nu+3} = \lceil \alpha_{\nu+3} \rceil = p_{\nu+3}$ schließlich $\alpha_n = \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = p_n$ und so $q_n = \lceil \alpha_n \rceil = \lceil p_n \rceil = p_n = \alpha_n$

□

Bemerkung 7 : Wir dehnen den in (Kapitel 3) Definition 3 eingeführten Formalismus m.m. dahingehend aus, dass statt $[q_0, \dots, q_n]$ auch $[x_0, \dots, x_n]$ für reelle Variablen x_0, \dots, x_n mit entsprechender Bedeutung geschrieben werden darf.

Wegen $x_{n+1} = \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - x_n}$ also $\alpha_n = x_n + \frac{1}{x_{n+1}}$, gilt dann insbesondere $[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = [x_1, \dots, x_n - 1, x_n + \frac{1}{x_{n+1}}]$

Satz 9 : Mit den Beziehungen von (Kapitel 3) Definition 3 gilt

$$[q_0, \dots, q_k] = \frac{P_k}{Q_k} (k = 0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

Beweis : Induktion nach k

$$\text{I.A.: } k = 0 : [q_0] = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}$$

$$k = 1 : \text{Mit } \alpha = [q_0, q_1] \text{ hat man } \alpha_0 = \alpha \text{ und } q_1 = \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}, \text{ also}$$

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1}$$

I.S.: Nach (Kapitel 3) Bemerkung 7 folgt

$$\begin{aligned}
 [q_0, \dots, q_{k+1}] &= [q_0, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{1}{q_{k+1}}] \\
 &= \underbrace{\frac{(q_k + \frac{1}{q_{k+1}})P_{k-1} + P_{k+2}}{(q_k + \frac{1}{q_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k+2}}}_{I.V.} \\
 &= \frac{q_{k+1}(q_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{q_{k+1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} \\
 &= \frac{P_k q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}} \\
 &= \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}
 \end{aligned}$$

□

Als Erinnerung : Es war in (Kapitel 3) Definition 3: $P_0 \leftrightsquigarrow q_0, Q_0 \leftrightsquigarrow 1; P_1 \leftrightsquigarrow q_0 q_1 + 1, Q_1 \leftrightsquigarrow q_1; P_\nu \leftrightsquigarrow q_\nu P_{\nu-1} + P_{\nu-2}, Q_\nu \leftrightsquigarrow q_\nu Q_{\nu-1} + Q_{\nu-2} (\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$

Bemerkung 8 : Die Näherungsbrüche berechnet man etwa gemäß:

q_0	q_1	q_2	q_3	\dots	q_k
q_0	$q_1 P_0 + 1$	$q_2 P_1 + P_0$	$q_3 P_2 + P_1$	\dots	$q_k P_{k-1} + P_{k-2}$
1	q_1	$q_2 Q_1 + Q_0$	$q_3 Q_2 + Q_1$	\dots	$q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$

Tabelle 3.1: Schritte im EUKLIDISCHENalgorithmus

zum Beispiel:

1	2	2	2	2
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$3 \cdot 7 + 3 = 17$	$2 \cdot 17 + 7 = 41$
1	2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 5 + 2 = 12$	$2 \cdot 12 + 5 = 29$

Tabelle 3.2: Schritte im EUKLIDISCHENalgorithmus am Beispiel

mit $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ für $k = 0, 1, \dots$; also $\delta_0 = 1; \delta_1 = \frac{3}{2} = 1,5; \delta_2 = \frac{7}{5} = 1,4; \delta = \frac{17}{12} = 1,41\bar{6}; \delta_4 = \frac{41}{29} = 1,41379\dots$; es ist nämlich $[1, \bar{2}] = \sqrt{2} = 1,414213\dots$

Satz 10 : Mit den Bezeichnungen von (Kapitel 3) Definition 3 β gilt

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}} (k \in \mathbb{N}) \quad (3.3)$$

und

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^k q_k}{Q_k Q_{k-2}} (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \quad (3.4)$$

Beweis : Es ist

$$\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 q_1 + 1 & q_0 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-1} q_k + P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-1} q_k + Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix} (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

$$\prod_{\kappa=0}^k \begin{pmatrix} q_\kappa & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Und damit

$$\begin{aligned} (*) P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} &= \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix} \\ &\stackrel{41}{=} \left| \prod_{\kappa=0}^k \begin{pmatrix} q_\kappa & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \prod_{\kappa=0}^k \begin{vmatrix} q_\kappa & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\kappa=0}^k (-1) = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

was Formel (3.3) beweist.

Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat man daher

$$\begin{aligned}
 P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k &= \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix} \\
 &= \left| \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_k & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(*)}{=} (-1)^{k-1+1} q_k = (-1)^k q_k
 \end{aligned}$$

was Formel (3.4) zeigt.

□

Korollar A : Für $[q_0, q_1, \dots]$ mit $q_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q_k \in \mathbb{N}$ für $k = 1, 2, \dots$ seien P_k und Q_k wie in (Kapitel 3) Definition 3β.

Dann gilt:

- a) $Q_k < Q_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$)
- b) $k \leq Q_k$ für $k = 1, 2, 3$ und $k < Q_k$ für $k = 4, 5, \dots$
- c) $ggT(P_k, Q_k) = 1$ ($\frac{P_k}{Q_k}$ ist also gekürzt!)

Beweis :

- a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist alle $Q_{k-1} \geq 1$ und $q_{k+1} \in \mathbb{N}$ also $Q_k \leq q_{k+1} Q_k < q_{k+1} Q_k + 1 \leq q_{k+1} Q_k + Q_{k-1} = Q_{k+1}$
- b) Nach Definition hat man

$$\begin{aligned}
 1 &\leq q_1 = Q_1 \\
 2 &\leq q_2 + 1 \leq q_2 Q_1 + Q_0 = Q_2 \\
 3 &= 2 + 1 \leq 2q_3 + 1 \leq q_3 Q_2 + Q_1 = Q_3
 \end{aligned}$$

für $k \geq 4$ und $k-1 \leq Q_{k-1}$ ferner $k = k-1+1 \leq Q_{k-1}+1 < q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} = Q_k$

- c) Formel (3.3) liefert $P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k+1}$, mithin $|P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1$ und daher $d \mid ggT(P_k, Q_k) \mid 1$, also $d = 1$

□

Korollar B : $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ sei der k -te Näherungsbruch von $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots]$ mit $q_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q_1, q_2, \dots \in \mathbb{N}$ Dann gilt:

$$\delta_0 < \delta_2 < \delta_4 \dots \leq \alpha \leq \dots < \delta_3 < \delta_1$$

Beweis : Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $\delta_k - \delta_{k-2} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} \underset{(3.4)}{=} \frac{(-1)^k q_k}{Q_{k-2} Q_k}$ was

$$\delta_0 < \delta_2 < \dots \text{ bzw } \dots < \delta_3 < \delta_1 \text{ beweist, für } k \in \mathbb{N} \text{ analog } \delta_{2k-1} - \delta_{2k-2} \underset{(3.3)}{=} \frac{(-1)^{2k-1+1}}{Q_{2k-1} Q_{2k-2}} > 0$$

□

Korollar C : Für $\alpha = [q_0, q_1, \dots]$ mit $q_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q_1, q_2, \dots \in \mathbb{N}$ sei $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ die k -te Näherung. Dann gilt $|\alpha - \delta_k| \leq \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^2}$; von zwei sukzessiven Näherungen genügt mindestens eine - etwa δ_k - sogar der Ungleichung $|\alpha - \delta_k| < \frac{1}{2Q_k^2}$

Beweis : Es ist $|\alpha - \delta_k| \underset{KorB}{\leq} |\delta_{k+1} - \delta_k| \underset{(3.3)}{=} \left| \frac{(-1)^{k+2}}{Q_{k+1} Q_k} \right| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k} \underset{KorAa}{<} \frac{1}{Q_k^2}$ OBdA:

$\delta_k < \alpha < \delta_{k+1}$, dann $\alpha - \delta_k \leq \frac{1}{2}(\delta_{k+1} - \delta_k)$ oder $\delta_{k+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(\delta_{k+1} - \delta_k)$ was die zweite Behauptung mittels der ersten beweist.

□

Korollar D : Die Kettenbruchnäherungen sind die besten rationalen Näherungen; genauer: Jeder andere Bruch zwischen α und der k -ten Näherung $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ von α hat einen größeren Nenner als Q_k

Beweis : OBdA sei $0 < \delta_k < \alpha < \delta_{k+1}$

Gäbe es $P, Q \in \mathbb{N}$ (mit $ggT(P, Q) = 1$) und $0 < Q \leq Q_k$ sowie $\delta_k < \frac{P}{Q} < \delta_{k+1}$, wäre $\frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \geq \frac{1}{Q Q_k}$ und $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P}{Q} \geq \frac{1}{Q Q_{k+1}}$, also $\delta_{k+1} - \delta_k = \left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P}{Q} \right) + \left(\frac{P}{Q} - \frac{P_k}{Q_k} \right) \geq \frac{1}{Q Q_k} + \frac{1}{Q Q_{k+1}} > \frac{1}{Q Q_{k+1}} \geq \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$
 $\Rightarrow \delta_{k+1} - \delta_k > \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$ im **Widerspruch** zu (3.3)

□

Korollar E : Für $k \in \mathbb{N}$ sind die $\frac{F_{k+1}}{F_k}$ die besten rationalen Näherungen für γ .

Beweis : Nach (Kapitel 3) Beispiel 2c ist $\gamma = [1] = [1, 1, 1, \dots]$ Nach (Kapitel 3) Definition 3 hat man

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{q_0}{1} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{F_2}{F_1} \\ \delta_1 &= \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1} = 2 = \frac{F_3}{F_2} \\ \delta_k &= \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} q_k + Q_{k-2}} = \frac{P_{k-1} + P_{k-2}}{Q_{k-1} + Q_{k-2}}\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, also, mit Induktion $\delta_k = \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}}$ was mit Korollar D die Behauptung beweist.

□

Definition 4 Approximierbarkeit von der Ordnung n : $\alpha (\in \mathbb{R})$ heiße **approximierbar durch rationale Zahlen von der Ordnung $n (\in \mathbb{N})$** , wenn es eine – nur von α abhängige – Konstante K_1 gibt, dass unendlich viele Brüche $\frac{p}{q}$ existieren mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{K_1}{q^n}$

Beispiel 4 :

- a) Jede rationale Zahl ist approximierbar von der Ordnung 1 (\rightarrow Beweis als Übung)
- b) Wegen Korollar C ist jede irrationale Zahl approximierbar von Ordnung 2 ist.

Satz 11 : Eine reelle algebraische Zahl α vom Grad n – d.h. α ist Nullstelle eines Polynoms vom Grad n mit (ganz)rationalen Koeffizienten – ist nicht von höherer als n -ter Ordnung approximierbar durch rationale Zahlen.

Beweis : α sei Lösung von $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu = 0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $a_n \neq 0$.

Es liege $\frac{p}{q} (\in \mathbb{Q} \setminus \{\alpha\})$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ näher an α als jede andere Nullstelle von f .

Der Mittelwertsatz liefert $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \cdot f'(\xi)$ mit $\xi (\in \mathbb{R})$ zwischen α und $\frac{p}{q}$

Es ist $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu} \right| = \left| q^{-n} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \right| = \frac{\left| \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \right|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}$

Sei K_2 so gewählt, dass $f'(x) < \frac{1}{K_2}$, $|\alpha - x| < 1$, so gilt für $|\alpha - \frac{p}{q}| < 1$

$$\text{auch } \frac{K_2}{q^n} \leq K_2 \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \frac{\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{\left| f'(\xi) \right|} = \frac{\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{\left| \frac{\frac{p}{q} - \alpha}{\frac{p}{q} - \alpha} \right|} = \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|$$

Wir nehmen an, dass α von der Ordnung $n+1$ approximierbar ist, dann gibt es eine Konstante K_1 mit $\frac{K_2}{q^n} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{K_1}{q^{n+1}}$

$\Rightarrow q \cdot K_2 < K_1$ was im **Widerspruch** zur Behauptung, dass K_1 eine Konstante ist, steht.

□

Beispiel 5 :

- a) Sei $\alpha \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}} = 0,1100010\dots$ und für $n \in \mathbb{N}$ ferner $\sum_{\nu=0}^n \frac{1}{10^{\nu!}} \Leftrightarrow \frac{p}{10^{n!}} \Leftrightarrow \frac{p}{q}$ Dann ist $0 < \alpha - \frac{p}{q} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}} < \frac{2}{10^{(n+1)!}}$ Für $N \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ folgt $10^{(n+1)!} = (10^{n!})^{n+1} = q^{n+1} > q^N$ und somit $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \alpha - \frac{p}{q} < \frac{2}{10^{(n+1)!}} < \frac{2}{q^N}$ mithin ist α approximierbar vom Grade N und nach (Kapitel 3) Satz 11 damit nicht algebraisch vom Grade $< N$. Somit ist α transzendent.
- b) Eine quadratische Irrationalität – d.h. eine irrationale Nullstelle eines ganzrationalen Polynoms 2-ten Grades – ist nach (Kapitel 3) Beispiel 4b approximierbar von der Ordnung 2 und nach (Kapitel 3) Satz 11 sind sie damit genau von der Ordnung 2 approximierbar.
- c) Lösungen quadratischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten haben die Form $r \pm s\sqrt{d}$ mit $r, s \in \mathbb{Q}$ und $d \in \mathbb{Z}$ mit quadratfreiem d ; ist $d > 0$ sind die Lösungen aus \mathbb{R} . Die Zahlen $\alpha = r + s\sqrt{d}$ und $\bar{\alpha} = r - s\sqrt{d}$ heißen **konjugiert**. Konjugation ist ein involutorischer Automorphismus des Rings (besser Körpers) $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, d.h. im wesentlichen: $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$ und $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ (und somit auch $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \overline{\frac{\alpha}{\beta}}$).
- d) **Kurzexkursion:** \mathbb{A} sei die Menge der algebraischen Zahlen und \mathbb{T} die der transzendenten, also $\mathbb{A} \cup \mathbb{T} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{A} \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Es ist $|\mathbb{A}| = \aleph_0 (\Leftrightarrow |\mathbb{N}|)$ (Abzählung der ganzrationalen Polynome!), also $|\mathbb{T}| > \aleph_0$, d.h. \mathbb{T} ist überabzählbar, genauer $|\mathbb{T}| = |\mathbb{R}|$, somit die

Existenz transzedenter Zahlen bewiesen ist (CANTOR!). $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ ist ein Körper, ein sogenannter reell abgeschlossener Körper (anordenbarer Körper, bei dem der Zwischenwertsatz für Polynomfunktionen gilt.); für diese ist die „elementare Theorie“ noch entscheidbar! (TARSKI) Wichtiges Übertragungsprinzip! Die Irrationalität von e ist leicht zu zeigen (Taylorreihe, FOURIER!), seine Transzendenz jedoch schwer: HERMITE 1873; ebendo wie dir von π , allgemeiner die von Logarithmen algebraischer Zahlen: LINDEMANN 1882. GELFOND bewies 1929 die Transzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ und er und - unabhängig - THEODOR SCHNEIDER 1934 die von α^β , falls $0 \neq \alpha \neq 1, \beta$ algebraisch und β irrational. (7. Hilbertsches Problem)

Satz 12 : Der Kettenbruch von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist genau dann periodisch, wenn α algebraisch vom Grade 2 - d.h. eine quadratische Irrationalität - ist.

Beweis :

a) Der Kettenbruch von α sei **periodisch**, und zwar

I. **reinperiodisch**, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \alpha = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$. Dann ist $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha]$, nach dem Beweis von (Kapitel 3) Satz 9 also $\alpha = \frac{\alpha P_n + P_{n-1}}{\alpha Q_n + Q_{n-1}}$, was $Q_n \alpha^2 + (Q_{n-1} - P_n) \alpha - P_{n-1} = 0$ ergibt, also die Algebraizität von α vom Grade 2.

II. **gemischt periodisch**, etwa $\alpha = [a_0, \dots, a_m, \overline{b_1, \dots, b_n}]$; mit $\beta \Leftarrow [\overline{b_1, \dots, b_n}]$ (Kapitel 3) Bemerkung 7 und (Kapitel 3) Satz 9 folgt $\alpha = \frac{\beta P_m + P_{m-1}}{\beta Q_m + Q_{m-1}}$, nach I. ist β von der Form $p + q\sqrt{d}$ mit $p, q \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{N}$, also auch α („Nenner rational machen!“)

b) α sei eine quadratische Irrationalität etwa $\alpha = \frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $b(> 0)$ kein Quadrat sowie $c \neq 0$. Dann ist $\alpha = \frac{ac \pm \sqrt{bc^2}}{c^2} \Leftarrow \frac{k \pm \sqrt{d}}{m}$ mit $d, k, m \in \mathbb{Z}$ und $d(> 0)$ nicht Quadrat, sowie $m \mid d - k^2$, da $d - k^2 = bc^2 - a^2 c^2 = (b - a^2) c^2$. Die Kettenbruchentwicklung von α liefert $\alpha_0 = \frac{k_0 \pm \sqrt{d}}{m_0}$ mit $k_0 \Leftarrow k, m_0 \Leftarrow m$, also $\alpha_0 = \alpha$, und

$\alpha_\nu = \frac{k_\nu + \sqrt{d}}{m_\nu}$ sowie $a_\nu \Leftrightarrow \lfloor \alpha_\nu \rfloor$ und

$$\begin{aligned} \frac{k_{\nu+1}}{m_{\nu+1}} + \sqrt{d}m_{\nu+1} &= \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{\alpha_\nu - a_\nu} \\ &= \frac{1}{\frac{k_\nu + \sqrt{d}}{m_\nu} - a_\nu} \\ &= \frac{m_\nu}{k_\nu - a_\nu m_\nu + \sqrt{d}} \\ &= \frac{m_\nu(k_\nu - a_\nu m_\nu - \sqrt{d})}{(k_\nu - a_\nu m_\nu)^2 - \sqrt{d}^2} \end{aligned}$$

also $\frac{1}{m_{\nu+1}} = \frac{m_\nu}{d - (k_\nu - a_\nu m_\nu)^2}$, mithin

$$(*)m_{\nu+1} = \frac{d - (k_\nu - a_\nu m_\nu)^2}{m_\nu} = \frac{d - k_\nu^2}{m_\nu} + 2a_\nu k_\nu - a_\nu^2 m_\nu$$

und analog $\frac{k_{\nu+1}}{m_{\nu+1}} = \frac{m_\nu(k_\nu - a_\nu m_\nu)}{(k_\nu - a_\nu m_\nu)^2 - d}$, somit

$$k_{\nu+1} \underbrace{=}_{(*)} \frac{d - (k_\nu - a_\nu m_\nu)^2}{m_\nu} \cdot \frac{m_\nu(k_\nu - a_\nu m_\nu)}{(k_\nu - a_\nu m_\nu)^2 - d} = a_\nu m_\nu - k_\nu$$

und daher entsprechend

$$(**)m_{n+1} \underbrace{=}_{(*)} \frac{d - (k_n - a_n m_n)^2}{m_n} = \frac{d - k_{n+1}^2}{m_n}$$

für $\nu = 0, 1, \dots$

Wegen $m_0 | d - k_0^2$ und (*) gilt $m_0, m_1, \dots \in \mathbb{Z}$ und (**) zufolge $m_\mu | d - k_\mu^2$ für $\mu = 0, 1, \dots$. Da d kein Quadrat, folgt $m_\nu \neq 0$ nach (*) für $\nu = 0, 1, \dots$

Für $n \geq 2$ hat man

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

und nach refb5c daher auch

$$\alpha = \frac{\overline{\alpha}_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\overline{\alpha}_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

also sukzessive

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_n Q_{n-1} + \overline{\alpha}_n Q_{n-2} &= \overline{\alpha}_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ \overline{\alpha}_n (\overline{\alpha}_n Q_{n-1} - P_{n-1}) &= P_{n-2} - \overline{\alpha}_n Q_{n-2} \\ \overline{\alpha}_n &= \frac{P_{n-2} - \overline{\alpha}_n Q_{n-2}}{\overline{\alpha}_n Q_{n-1} - P_{n-1}} = -\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \left(\frac{\overline{\alpha} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\overline{\alpha} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}} \right) \end{aligned}$$

wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha \neq \bar{\alpha}$ ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\alpha} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\bar{\alpha} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}} = \frac{\bar{\alpha} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\bar{\alpha} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}} = \frac{\bar{\alpha} - \alpha}{\bar{\alpha} - \alpha} = 1$ und somit die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\bar{\alpha}_n < 0$ für $n > N$; sei also $n > N$: Dann ist $0 < \alpha_n - \bar{\alpha}_n = \frac{k_n + \sqrt{d}}{m_n} - \frac{k_{n-1} + \sqrt{d}}{m_{n-1}} = \frac{2\sqrt{d}}{m_n}$, mithin $m_n > 0$ und wegen $(**)$ daher $k_{n+1}^2 < d$ und $0 < m_n < d$; folglich können k_0, k_1, \dots und ebenso m_0, m_1, \dots jeweils nur endlich viele Werte haben (es sind ja ganze Zahlen!) Es gibt also minimale Zahlen $i, j \in \mathbb{N}_0$ so dass $i < j$ und $a_i = a_j$ was $\alpha = [a_0, \dots, a_{i-1}, \overline{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}}]$ bedingt.

□

Bemerkung 9 : Teil a) von (Kapitel 3) Satz 12 stammt von EULER, 1737, der Teil b) von LAGRANGE¹², 1770

Satz 13 : Ist $d (\in \mathbb{N})$ keine Quadratzahl, gibt es ein $g (\in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $r_0, r_1, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{d} = [g, \overline{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, 2g}] = [g, \overline{r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1, r_0, 2g}]$

Beweis : Literatur etwa „H. Scheid: Zahlentheorie, BI 1991, I.9, Satz 25, S. 60f “

□

¹² JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (*25.01.1736 Turin, †10.04.1813 Paris) Genialer Mathematiker, Physiker und Astronom. Er war schon mit 19 Jahren Professor an der Militäruniversität in Turin, dann Prof. in Berlin und Paris. Seine Arbeitsgebiete waren: Mechanik, Astronomie, Analysis (Variationsrechnung) sowie Zahlentheorie.

Kapitel 4

Der Euklidische Algorithmus

Bemerkung 10 :

- a) An den **Euklidischen Algorithmus**, kurz EA oder A2, wurde in (Kapitel 3) Beispiel 2 und (Kapitel 3) Erinnerung 4 erinnert: wir benutzen die dortige Notation.
- b) Der EA ist auch heute noch wichtig: **Zahlentheorie**, **Kryptologie** (etwa beim RSA-Verfahren), **Computeralgebra**, **Schieberegister**, etc.
- c) **Ziel:** Wenigstens für pessimale Komplexität [worst case complexity] d.h. **Anzahl der Divisionen** im ungünstigsten Falle zu bestimmen.

Erinnerung 5 : $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ sei ein **Ring**, i.e. eine (algebraische) Struktur, ein (algebraisches) Gebilde, eine Algebra so, dass $(R, +)$ bzw. (R, \cdot) eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0) bzw. Halbgruppe ist mit $x(y + z) = xy + xz$ und $(x + y)z = xz + yz$ mit $x, y, z \in R$. Ist \mathcal{R} zudem **kommutativ**, d.h. (R, \cdot) kommutativ, und **nullteilerfrei**, i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ($x, y \in R$) werde \mathcal{R} **Integritätsbereich** oder **Integritätsring** [(integral) domain] genannt; ein solcher - mit $R' \hookrightarrow R \setminus \{0\}$ - heiße **euklidisch** oder **euklidischer Ring** im Falle $\exists \varphi \in \mathbb{N}_0^{R'} \forall a \in R \forall b \in R' \exists g \in R : a = bg \vee \varphi(a - bg) < \varphi(b)$

Beispiel :

- a) $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist euklidisch mit $\varphi \hookrightarrow x \mapsto |x|$
- b) $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ sei ein kommutativer Ring mit Eins; dann ist $\mathcal{R}[x]$ euklidisch mit $\varphi \hookrightarrow p(x) \mapsto \gamma(p(x))$, wenn $\gamma(p(x))$ der Grad von $p(x)$ ist (wobei für $p(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

und $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ der Grad definiert wird als $\gamma(p(x)) \Leftarrow \max\{\nu | a_\nu \neq 0\}$

- c) Der **Gaußsche** Ring, d.h. $\mathbb{Z}[i] (\Leftarrow \{x + yi | x, y \in \mathbb{Z}\})$ und $i^2 = -1$; ist euklidisch mit $\varphi \Leftarrow x + yi \mapsto x^2 + y^2$;

Jeder euklidische Ring $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ist **Hauptidealring**, d.h. \mathcal{R} hat eine Eins und jedes **Ideal** - d.h. jede Untergruppe (also Moduln) I von $(R, +)$ mit $RI, IR \subseteq I$ - ist **Hauptideal**, i.e. wird von einem Element erzeugt.

Definition 5 Komplexität beim EA:

- $\alpha)$ Für $u, v \in \mathbb{N}$ sei $D(u, v)$ die **Zahl der Divisionen** beim EA zur Bestimmung von $ggT(u, v)$
- $\beta)$ Ferner sei $d(n) \Leftarrow \min\{u \in \mathbb{N} | \exists v \in \mathbb{N} : u > v \wedge D(u, v) = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$

Beispiel 6 : Das Beispiel $ggT(13, 8)$ also

$\begin{array}{r} 13 : 8 = 1, \text{ Rest } 5 \\ 8 \\ -- \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 : 5 = 1, \text{ Rest } 3 \\ 5 \\ - \\ 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} 5 : 3 = 1, \text{ Rest } 2 \\ 3 \\ - \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 : 2 = 1, \text{ Rest } 1 \\ 2 \\ - \\ 1 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2 : 1 = 2, \text{ Rest } 0 \\ 2 \\ - \\ 0 \end{array}$	

und mithin $D(13, 8) = 5$ - man kann sogar leicht $d(5) = 13$ zeigen - und Anderes legen die folgende Vermutung nahe:

Satz 14 : (DE LAGNY ¹³, 1733): Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(n) = F_{n+2}$ und für v aus (Kapitel 4) Definition 5 β dann $v = F_{n+1}$

Beweis : Seien $n, u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$ und $D(u, v) = n$. Mit den Bezeichnungen von (Kapitel 3) Erinnerung 4 hat man – siehe auch (Kapitel 3) Beispiel 2d – dann $r_{-2} = u$ und $r_{-1} = v$ sowie bei **n Divisionen**

$$\begin{aligned}
 (*) \frac{r_{-2}}{r_{-1}} &= q_0 + \frac{r_0}{r_{-1}} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_{-1}}{r_0}} \\
 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}} = \dots \\
 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{\dots}{q_{n-2} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}}}}}} \\
 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{\dots}{q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}}}} \\
 &= [q_0, q_1, \dots, q_{n-2}, q_{n-1}] = \frac{u}{v}
 \end{aligned}$$

Sukzessives Einsetzen liefert ferner

$$\begin{aligned}
 r_{n-3} &= q_{n-1}r_{n-2} \\
 r_{n-4} &= q_{n-2}r_{n-3} + r_{n-2} = q_{n-2}q_{n-1}r_{n-2} + r_{n-2} = (q_{n-2}q_{n-1} + 1)r_{n-2} \\
 r_{n-5} &= q_{n-3}r_{n-4} + r_{n-3} = q_{n-3}(q_{n-2}q_{n-1} + 1)r_{n-2} + q_{n-1}r_{n-2} \\
 &= (q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1} + q_{n-3} + q_{n-1})r_{n-2} \\
 r_{n-6} &= q_{n-4}r_{n-5} + r_{n-4} = (q_{n-4}q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1} + q_{n-4}q_{n-3} + q_{n-4}q_{n-1})r_{n-2} + (q_{n-2}q_{n-1} + 1)r_{n-2} \\
 &= (q_{n-4}q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1} + q_{n-4}q_{n-3} + q_{n-4}q_{n-1} + q_{n-2}q_{n-1} + 1)r_{n-2} \\
 &\dots \\
 u = r_{-2} &= (q_0q_1 \cdot \dots \cdot q_{n-1} + s)r_{n-2}
 \end{aligned}$$

wobei s eine Summe von kleineren Produkten der q_ν ist. Damit u minimal wird, muss r_{n-2} möglichst klein sein, also $r_{n-2} = 1$, und die q_ν ebenso, wobei $q_{n-1} = 1$ wegen $r_{n-2} < r_{n-3}$ nicht möglich ist, was nun $q_\nu = 1$ für $\nu \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ und $q_{n-1} = 2$ ergibt, also (*) zufolge:

$$\frac{u}{v} = [1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, 2]$$

¹³ THOMAS FANTET DE LAGNY (*7.11.1660 Lyon, †11.4.1734 Paris) Nach Jurastudium in Toulouse Privatlehrer in Paris, Prof. für Hydrographie in Rochefort, stellvertretender Bankdirektor, Mitarbeiter der Akademie: u.a. Numerik, π auf 120 Dezimalstellen - (Kapitel 4) Satz 14 in M'ém. Acad. Sci. Paris, 11 (1733), S.363-364

Damit folgt

$$\begin{aligned}
r_{n-2} &= 1 = F_2 \\
r_{n-3} &= q_{n-1}r_{n-2} = 2 \cdot 1 = 2 = F_3 \\
r_{n-4} &= q_{n-2}r_{n-3} + r_{n-2} = 1 \cdot F_3 + F_2 = F_3 + F_2 = F_4 \\
&\dots \\
r_{n-\nu} &= q_{n-\nu+2}r_{n-\nu+1} + r_{n-\nu+2} = 1 \cdot F_{\nu-1} + F_{\nu-2} = F_\nu \\
&\dots \\
r_0 &= q_2r_1 + r_2 = 1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2} = F_n \\
v = r_{-1} &= q_1r_0 + r_1 = 1 \cdot F_n + F_{n-1} = F_{n+1} \\
u = r_{-2} &= q_0r_{-1} + r_0 = 1 \cdot F_{n+1} + F_n = F_{n+2}
\end{aligned}$$

□

Korollar A : Seien $N \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{N}_0, v \in \mathbb{A}_{N-1}$ dann gilt $D(u, v) \leq \lfloor_\gamma \log(3 - \gamma)N \rfloor$

Beweis : Nach dem ersten Schritt des EA angewandt auf u, v hat man $v > u \bmod v$ und so nach (Kapitel 4) Satz 14 die Maximalzahl n von Divisionen, also $D(u, v) \leq n$, wegen $(n-1) + 2 = n+1$ für $v = F_{n+1}$ und $u \bmod v = F_n$ Es ist

$$\begin{aligned}
(*) \frac{\sqrt{5}}{\gamma} &= \frac{\sqrt{5}\bar{\gamma}}{-1} = \frac{\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \\
&= 3 - \gamma
\end{aligned}$$

Wegen $F_{n+1} = v < N$ und $||x| - |y|| \leq |x - y| (x, y \in \mathbb{R})$ gilt

$$\frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \underbrace{\leq}_{(2.11)} \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} - \left| \frac{\bar{\gamma}^{n+1}}{\sqrt{5}} \right| \leq \left| \frac{\gamma^{n+1} - \bar{\gamma}^{n+1}}{\sqrt{5}} \right| = F_{n+1} < N$$

damit $N - F_{n+1} \geq 1$ zufolge $\frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} < N$, also $\gamma^n < \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\gamma} N}_{(*)} = (3 - \gamma)N$ und

daher $n = \gamma \log \gamma^n < \gamma \log(3 - \gamma)N$, wegen $n \in \mathbb{N}$ mithin $D(u, v) \leq n \leq \lfloor_\gamma \log(3 - \gamma)N \rfloor$

□

Bemerkung 11 : Zur konkreten Abschätzung gemäß Korollar A – realiter (Kryptologie) treten Zahlen von hunderten von Dezimalstellen auf! – dient die folgende Formel:

$$\gamma \log(3 - \gamma)N \approx 2,078 \cdot \ln N + 0,6723 \approx 4,785 \cdot \lg N + 0,6723$$

Korollar B : (Lamé ¹⁴, 1844):

Die Zahl der Divisionen beim EA ist höchstens das 5-fache der Stelligkeit der kleineren Zahl.

Beweis : Entweder (a) direkt aus (Kapitel 4) Satz 14 ähnlich wie Korollar

A, oder

(b) Seien $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$ und v habe s (Dezimal)Stellen, also $10^{s-1} \leq v < 10^s$ für $s \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$(*)s = \lceil \lg(v+1) \rceil$$

und zu zeigen

$$(**)D(u, v) \leq 5s$$

Wegen $F_6 = 8 < 10^1 < 13 = F_7$ für $s = 1$ hat man (Kapitel 4) Satz 14 zufolge $D(u, v) \leq 6 - 1 = 5 = 5 \cdot 1$ und analog für $s = 2$ $F_{11} = 89 < 10^2 < 144 = F_{12}$ und $D(u, v) \leq 11 - 1 = 10 = 5 \cdot 2$ sowie für $s = 3$ $F_{16} = 987 < 10^3 < 1597 = F_{17}$ und $D(u, v) \leq 16 - 1 = 15 = 5 \cdot 3$ für $s \in \mathbb{A}_3$ also (**).

Sei nun $s \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{A}_3$: Wegen $0,6724 \leq 4 \cdot 0,214 = 4 \cdot (5 - 4,786)$ und

¹⁴ GABRIEL LAMÉ (*22.7.1795 Tours, †1.5.1870 Paris) Mathematiker, Physiker und Ingenieur, Prof. St.Petersburg und Paris; Zahlentheorie, Differentialgeometrie, Potentialtheorie, – Satz in „Comptes Rendus Acad Sci. Paris, 19 (1844), S. 867 - 870 “

Mit den Lamé-Parametern λ und μ werden die Beziehungen zwischen Spannungen und Deformation eines Mediums beschrieben, wobei das Verhältnis $\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{v_p}{v_s}\right)^2 - 2$ - mit v_p der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druck-/Kompressionswelle (auch primäre Phase genannt) sowie v_s der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Transversal-/Scheerwelle (auch sekundär Phase genannt) - gilt. (Siehe PROF. WALTER KERTZ – 1961 bis 1990 Leiter des Instituts für Geophysik und Meteorologie der TU Braunschweig – „Einführung in die Geophysik, Band 1, BI 1969, S.43ff“ sowie PROF. JÜRGE FERTIG – Lehrauftrag dann Honorarprofessur TU BS, sowie Regionalgeophysiker bei Preussag AG, ab 1992 Prof. an der TU Clausthal, ehem. Fakultätsdekan der gemeinsamen naturwissenschaftlichen mathematischen Fakultät – „Grundlagen der Seismik“ im „Handbuch zur Erkundung, Bd 3 Geophysik, Springer Verlag 1997“)

$v \leq N-1$ (Korollar A), mithin $v+1 \leq N$, weil dem so ist liefert Korollar A nun

$$\begin{aligned}
 D(u, v) &\leq \lfloor \gamma \log(3 - \gamma)N \rfloor \leq \gamma \log(3 - \gamma)N \\
 &\quad \underbrace{\leq}_{(Kapitel 4) \text{ Bemerkung 11}} 4,786 \lg N + 0,724 \\
 &\leq 4,786 \lceil \lg(v+1) \rceil + 4 \cdot (5 - 4,786) \\
 &\leq 4,786s + 5s - 4,786s = 5s
 \end{aligned}$$

also (**) für $s \in \mathbb{N} \setminus A_3$ und damit für $s \in \mathbb{N}$

□

Bemerkung 12 : Typischerweise ist die Bestimmung der **pessimalen** bzw.

optimalen Komplexität – diese erweist sich hier für den charakteristischen Fall $v|u$ als trivial ! – erheblich einfacher als die der **mittleren Komplexität**:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die mittlere Komplexität:

$$D(n) \Leftarrow \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} D(\nu, n)$$

also die mittlere Zahl der Divisionen beim EA, angewandt auf n und eine kleinere Zahl ν , in der Reihenfolge (ν, n) .

Beispiel : Wegen

$$\begin{aligned}
 D(0, 6) &= 1; D(1, 6) = 2; D(2, 6) = 2 \\
 D(3, 6) &= 2; D(4, 6) = 3; D(5, 6) = 3 \\
 \sum &= 13
 \end{aligned}$$

ist $D(6) = \frac{13}{6} = 2,1\bar{6}$ Es ergibt sich $D(n) = \frac{12 \ln 2}{\pi^2} (\ln n - \sum_{d|n} \frac{\Lambda(d)}{d}) + O((\sum_{d|n} \frac{1}{d})^2)$ wobei Λ die sogenannte VON-MANGOLDT-Funktion ist, definiert durch

$$\Lambda(n) \Leftarrow \begin{cases} \ln p & \text{falls } n = p^r \text{ mit } p \in \mathbb{P} \text{ und } r \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Näheres siehe etwa „DONALD E. KNUTH: Arithmetik, Springer 2001“ 4.5.3, S.176-201

Kapitel 5

Analyse eines Spiels

Bemerkung 13 :

- a) Von R.E. GASKELL und N.J. WHINIHAN – siehe auch: D. KNUTH: The Art of Computerprogramming, Band 1 „Fundermental Algorithms“, Boston et al 1997 3.Auflage, 1.2.8, Fibonacci Numbers No. 37, S.86 – stammt folgendes Spiel. (Fib Quarterly, 1 (1963), S.9-12): Von einem Haufen von $n (\in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ Streichhölzern nehmen zwei Spieler abwechselnd Hölzer weg; beim 1. Zug kann eine beliebige Zahl m mit $1 \leq m < n$ genommen werden. Bei jedem weiteren Zug mindestens ein Holz, aber nicht mehr als das Doppelte des vorausgegangenen Zuges. Der Spieler, der das letzte Holz wegnimmt, gewinnt.

Natürlich gibt es eine **optimale Strategie** – jedes Zweipersonen-nullsummenspiel mit vollständiger Information und endlichen Baum hat eine solche! – aber wie sieht sie aus?

- b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $x \ll y \Leftrightarrow x + 1 < y$

Satz 15 : (ZECKENDORF ¹⁵, 1952): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine - eindeutig bestimmte - Darstellung

$$n = \sum_{\rho=1}^r F_{k_\rho} \quad (5.1)$$

¹⁵ EDOUARD ZECKENDORF (*2. Mai 1901 in Lüttich, Belgien; †16. Mai 1983 ebda.) war ein belgischer Amateur-Mathematiker. Zeckendorf war allgemeiner Mediziner, wurde 1925 Offizier in der belgischen Armee und spezialisierte sich nach seiner Militärzeit als Zahnarzt. Nach der Kapitulation der belgischen Armee 1940 kam er bis 1945 in deutsche Kriegsgefangenschaft. Nach 1945 veröffentlichte er mehrere Schriften, basierend auf der elementaren Zahlentheorie in der „Meldung de la Société Royale des Wissenschaften de Liège“. Obwohl Zeckendorf nur ein Amateur-Mathematiker war, findet der Lehrsatz von Zeckendorf allgemein Anwendung. [Quelle: www.wikipedia.de]

mit $0 \ll k_r \ll k_{r-1} \ll \dots \ll k_2 \ll k_1$

Beweis : (5.1) gelte: wir zeigen

$$(*) F_{k_1+1} > n$$

Beweis : Sei $S \Leftrightarrow \sum_{\rho=1}^r F_{k_\rho}$

Annahme: $F_{k_1+1} \leq n$;

Wegen $0 \ll k_r$ gilt $k_r \geq 2$

Sei k_1

a) **ungerade:** Dann folgt

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{\kappa=1, \kappa \text{ ungerade}}^{k_1} F_\kappa - F_1 \\ &\underbrace{=}_{\text{Aufgabe 3a}(*)} F_{k_1+1} - 1 < F_{k_1+1} \\ &\underbrace{\leq}_{\text{Annahme}} n \end{aligned}$$

also $S < n$ im Widerspruch zu (5.1)

b) **gerade:** Entsprechend ist

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{\kappa=2, \kappa \text{ gerade}}^{k_1} F_\kappa \\ &\underbrace{=}_{\text{Aufgabe 3a}(**)} F_{k_1+1} - 1 \\ &< F_{k_1+1} \underbrace{\leq}_{\text{Annahme}} n \end{aligned}$$

ebenfalls Widerspruch.

Damit ist die Annahme falsch und $(*)$ bewiesen

q.e.d.

(5.1) wird nun durch Induktion nach n bewiesen:

I.A.: $n = 1 : 1 = F_2$, eindeutig!

I.S.: (5.1) sei richtig für alle $n \leq m$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen (5.1) für $m+1$:

F_{k_1} sei die größte Fibonaccizahl $\leq m+1$, die nach $(*)$ Summand von

$m + 1$ sein muss.

Dann ist

$$(**)m + 1 - F_{k_1} < F_{k_1-1}$$

denn sonst wäre $m + 1 \geq F_{k_1} + F_{k_1-1} = F_{k_1+1}$ im Widerspruch zur Maximalität von F_{k_1} .

Nach I.V. gibt es **eindeutig bestimmte Indizes** k_r, \dots, k_2 mit

$0 \ll k_r \ll \dots \ll k_2$ und $m + 1 - F_{k_1} = \sum_{\rho=2}^r F_{k_\rho}$, sowie $(**)$ zufolge

$k_2 \ll k_1$, und man hat die **eindeutige Darstellung**

$$m + 1 = \sum_{\rho=1}^r F_{k_\rho} \text{ mit } 0 \ll k_r \ll \dots \ll k_1$$

□

Korollar : Für $n = \sum_{\rho=1}^r F_{k_\rho}$ gemäß (Kapitel 5) Satz 15 sei $\mu(n) \rightleftharpoons F_{k_r}$ und

$\mu(0) \rightleftharpoons \infty$, dann gilt:

- a) $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(n - \mu(n)) > 2\mu(n)$
- b) $\forall k, m \in \mathbb{N} : m < F_k \Rightarrow \mu(m) \leq 2(F_k - m)$
- c) $\forall m \in \mathbb{N} : m < \mu(n) \Rightarrow \mu(n - \mu(n) + m) \leq 2(\mu(n) - m)$
- d) $\forall m \in \mathbb{N} : m < \mu(n) \Rightarrow \mu(n - m) \leq 2m$

Beweis :

- a) Ist $\mu(n) = n$, hat man $\mu(n - \mu(n)) = \mu(0) = \infty > 2\mu(n)$

Sei also $n > \mu(n)$:

Wegen

$$\begin{aligned} F_{\nu+2} &= F_{\nu+1} + F_\nu \\ &= F_\nu + F_{\nu-1} + F_\nu \\ &= 2F_\nu + F_{\nu-1} \\ &> 2F_\nu \end{aligned}$$

für $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mu(n - \mu(n)) &= \mu(n - F_{k_r}) \\ &\stackrel{=}{\underbrace{\hspace{1cm}}} F_{k_{r-1}} \\ &\quad \text{(Kapitel5)Satz15} \\ &\stackrel{>}{\underbrace{\hspace{1cm}}} F_{k_r+2} \\ &\quad \text{(Kapitel5)Satz15; } K_r \ll K_{r-1} \\ &> 2F_{k_r} = 2\mu(n) \end{aligned}$$

- b) Für $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist (Kapitel 1) Satz 2a zufolge $F_{\nu-2} \leq F_{\nu-1}$ also sukzessive

$$\begin{aligned} F_\nu &= F_{\nu-1} + F_{\nu-2} \leq 2F_{\nu-1} \\ -F_\nu &\geq -2F_{\nu-1} \end{aligned}$$

$$(*) -F_\nu \leq -F_{\nu-1} \leq -\frac{F_\nu}{2}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m < F_k$ und $\mu(m) \rightleftharpoons F_j$, sowie

j gerade und

k ungerade: Dann gilt $m \leq F_j + F_{j+2} + F_{j+4} + \dots + F_{k-1}$ wegen $m < F_k$ und $(k-1-j) \bmod 2 = 0$

k gerade: Dann ist $m \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_{j+1}$ und $(k-1-j) \bmod 2 = 1$

j ungerade und

k ungerade: Analog hat man $m \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_{j+1}$ und $(k-1-j) \bmod 2 = 1$

k gerade: Schließlich ist $m \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_j$ und $(k-1-j) \bmod 2 = 0$

Also gilt allgemein

$$\begin{aligned} m &\leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_{j+(k-1-j) \bmod 2} \\ &= F_k - \underbrace{(F_{k-2} - F_{k-3})}_{F_{k-4}} + F_{k-5} + \dots \\ &= F_k - \underbrace{(F_{k-4} - F_{k-5})}_{F_{k-6}} + F_{k-7} \\ &\dots \\ &= F_k - F_{j+(k-1-j) \bmod 2+1} + F_{j+(k-1-j) \bmod 2} \\ &= F_k - F_{j-1+(k-1-j) \bmod 2} \\ &\underbrace{\leq}_{(*)} F_k - \frac{F_j}{2} \end{aligned}$$

und somit $\mu(m) = F_j \leq 2(F_k - m)$

- c) Wegen

$$\begin{aligned} \mu(n - \mu(n) + m) &= \mu(F_{k_1} + \dots + F_{k_r} - F_{k_r} + m) \\ &= \mu(F_{k_1} + \dots + F_{k_{r-1}} + m) \\ &= \mu(m) \end{aligned}$$

hat man b) zufolge

$$\mu(n - \mu(n) + m) = \mu(m) \underbrace{\leq}_{b)} 2(\mu(n) - m)$$

- d) Aus $0 < m\mu(n)$ folgt $0 < \mu(n) - m < \mu(n)$ weshalb c) angewandt werden kann:

$$\begin{aligned} \mu(n - m) &= \mu(n - \mu(n) + \mu(n) - m) \\ &\leq 2(\mu(n) - (\mu(n) - m)) \\ &= 2m \end{aligned}$$

□

Satz 16 : Optimale Strategien beim Spiel von (Kapitel 5) Bemerkung 13a

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n = F_{k_1} + \dots + F_{k_r}$ gemäß (Kapitel 5) Satz 15 und $\mu(n) \Leftrightarrow F_{k_r}$

- a) Wenn n Hölzer vorhanden sind, und beim nächsten Zug höchstens $q(\in \mathbb{N})$ genommen werden dürfen, gibt es genau dann einen **gewinnenden**, d.h. zum Sieg führenden, Zug, wenn $\mu(n) \leq q$ ist.
- b) Die Menge G der gewinnenden Züge g , d.h. g Hölzer werden genommen, ist $G = R$ mit $R \Leftrightarrow \{g = F_{k_j} + \dots + F_{k_r} \mid \forall j \in \mathbb{A}_r : j = 1 \vee F_{k_{j-1}} > 2g\}$
- c) Bei $n(\in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ anfänglichen Hölzern kann der erste Spieler stets gewinnen, es sei denn, n ist eine Fibonaccizahl.

Anhang A

Aufgabenblätter

A.1 Aufgabenblatt 1

12.04.2005

- (i) Man schreibe ein Programm zur Berechnung der $n(\in \mathbb{N})$ ersten Fibonaccizahlen und lasse sich die 100 ersten ausdrucken.
- (ii) Wieviele 0–1-Wörter der Länge $n(\in \mathbb{N})$ gibt es, bei denen keine Einsen unmittelbar aufeinander folgen?
- (iii) Man bestimme - und begründe - $\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu F_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^n F_\nu^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Abgabe bis Mittwoch, den 27.04.2005, 15 Uhr c.t.

A.2 Aufgabenblatt 2

19.04.2005

- (iv) Die Zahl der Teilmengen nichtbenachbarter Zahlen der Menge der ersten $n(\in \mathbb{N})$ natürlichen Zahlen ist zu bestimmen.
- (v) Für welche $n(\in \mathbb{N}_0)$ gilt $F_n = n^2$?
- (vi) Eine Powerfrau erstürmt eine n -stufige Treppe, wahlweise jeweils eine Stufe oder deren zwei nehmend $n \in \mathbb{N}$
 - a) Wieviele Möglichkeiten hat die Dame?

- b) Wie lang ist sie bei 40 Stufen beschäftigt, alle Möglichkeiten auszuprobieren, wenn sie 40 Stunden pro Woche „arbeitet“ und ein Treppenauf-und-abgang, inklusive der notwendigen Buchhaltung, in 6 Minuten erledigen kann?

Abgabe bis Mittwoch, den 4.05.2005, 15 Uhr c.t.

A.3 Aufgabenblatt 3

26.04.2005

- (vii) Man beweise: $\forall n \in \mathbb{N} : F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$
- (viii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{\nu=0}^n F_{3\nu}$ zu bestimmen
- (ix) a) Man berechne die Anzahl der Fibonaccizahlen, die nicht größer als $N (\in \mathbb{N})$ sind.
- b) Wieviele Fibonaccizahlen liegen unterhalb von 100 Milliarden?

Abgabe bis Mittwoch, den 11.05.2005, 15 Uhr c.t.

A.4 Aufgabenblatt 4

03.05.2005

- (x) Man beweise: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n \cdot 4$
- (xi) Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n^2 = L_{2n} + (-1)^n \cdot 2$
- (xii) Das gleichseitige Dreieck $\Delta = ABC$ habe den Umkreis \mathcal{K} und die Mittelparallele zu AB von Δ schneide AC in D und BC in S sowie \mathcal{K} in E (auf der Seite von AC) und F (auf der Seite von BC).
- Man beweise: S teilt \underline{DE} stetig mit Major \overline{DS} und Minor \overline{SF} .

Abgabe bis Mittwoch, den 25.05.2005, 15 Uhr c.t.

A.5 Aufgabenblatt 5

10.05.2005

- (xiii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ zeige man: $F_{2^n} = \prod_{\nu=1}^{n-1} L_{2^\nu}$

- (xiv) R bzw. r sei der Um- bzw. Inkreisradius eines regulären Fünfecks der Seitenlänge s . Zu beweisen sind:

a) $\frac{r}{R} = \frac{\gamma}{2}$

b) $\frac{s}{R} = \sqrt{1 + \gamma^{-2}}$

- (xv) Man zeige:

a) $2 \cos 36^\circ = \gamma = 2 \sin 54^\circ$

b) $\gamma = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$

Abgabe bis Mittwoch, den 01.06.2005, 15 Uhr c.t.

A.6 Aufgabenblatt 6

24.05.2005

- (xvi) Ein Rechteck heiße golden, falls sich seine Seiten wie $\gamma : 1$ verhalten:
- a) Man zeige: Spaltet man ein maximales Quadrat ab, bleibt ein goldenes Rechteck übrig.
 - b) Zu beweisen ist: In jedes Quadrat kann ein goldenes Rechteck so eingeschrieben werden, dass seine Ecken die Quadratseiten stetig teilen.
- (xvii) Ein Kreis B - mit Radius b - liege derart innerhalb eines Kreises A - mit Radius a -, dass dieser jenen berührt und der Schwerpunkt des Halbmondes $A - B$ auf dem Rand von B liegt. Man bestimme $\frac{a}{b}$.
- (xviii) Zu zeigen ist: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \gamma - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| \cdot F_n^2 = 5^{\frac{1}{2}}$

Abgabe bis Mittwoch, den 08.06.2005, 15 Uhr c.t.

A.7 Aufgabenblatt 7

31.05.2005

- (xix) In einem Kettenbruch sind zu entwickeln
- a) $\sqrt{3}$
 - b) $\sqrt{5}$

c) $\frac{1355}{946}$

und der Betrag der Differenz zum 4. Näherungsbruch ist jeweils nach oben abzuschätzen.

(xx) Wie groß muss $n(\in \mathbb{N}_0)$ mindestens sein, damit der absolute Fehler von $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ zu γ kleiner als 10^{-k} für $k \in \mathbb{N}_0$ ist?

(xxi) [*] Für $\varepsilon \in]0, 5^{-\frac{1}{2}}[$ gibt es höchstens endlich viele Brüche $\frac{p}{q}$ mit

$$|\gamma - \frac{p}{q}| < \varepsilon \cdot q^{-2}$$

Dies ist zu beweisen.

Abgabe bis Mittwoch, den 15.06.2005, 15 Uhr c.t.

A.8 Aufgabenblatt 8

(xxii) Es sei $a \in \mathbb{N}$

a) Man bestimme den Kettenbruch von $\sqrt{a^2 + 1}$

b) Das Ergebnis von (a) ist auf $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ und $\sqrt{17}$ anzuwenden.

(xxiii) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$

a) Man berechne den Wert von $[a, \overline{b, c}]$ explizit.

b) Das Resultat von (a) soll für $c = 2a$ spezialisiert werden und sodann weiter für

i) $b = a$ und $b = 2a$

ii) $b = 1$ und $b = 2$

iii) mittels des Bisherigen bestimme man den Kettenbruch von $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ und $\sqrt{11}$

(xxiv) Für $d \in \mathbb{Q}$ mit $d > 1$ sowie $g \Leftarrow [d]$ und $g \neq \sqrt{d}$ zeige man, dass $(\sqrt{d} - g)^{-1}$ einen reinperiodischen Kettenbruch hat. (Hinweis: Konjugation ist hilfreich!)

Abgabe bis Mittwoch, den 06.07.2005, 15 Uhr c.t.