Technische Universität Clausthal

Institut für Informatik

Sommersemester 2004

Ausarbeitung des Seminarvortrages

„Axiomatische Theorien in der Logik"

im Themenkomplex II:

„Information und Logik"

Hauptseminar **„Theoretische Informatik"**

bei Herrn Prof. Kupka

Robert Hartmann

(Matrikelnummer: 302300; Studiengang: Informatik)

Axiomatische Theorien in der Logik

Blaise Pascal (1623-1662) in
„Von der Methode der geometrischen, d.h. methodischen und vollkommenen Beweise“ :

> Ich will also das, was ein Beweis ist, […] verständlich machen […]
> Vorher muß ich aber die Idee von einer noch höheren und vollkommeneren Methode geben, wohin die Menschen jedoch niemals gelangen können: denn was über die Geometrie geht, geht über uns hinaus; trotzdem ist es notwendig, etwas davon zu sagen, obgleich es unmöglich zu verwirklichen ist.
> Diese wahre Methode, welche Beweise in höchster Vollendung führen würde, wenn es möglich wäre, sie zu erreichen, würde in zwei Hauptsachen bestehen:
> Einmal, keinen Begriff zu verwenden, dessen Sinn man nicht vorher deutlich erklärt hätte, zum anderen, niemals eine Behauptung aufzustellen, die man nicht aus schon bekannten Wahrheiten bewiesen hätte; d.h. mit einem Wort, alle Begriffe zu definieren und alle Behauptungen zu beweisen.

{Zitat aus Karl Vorländer: „Geschichte der Philosophie, Band 4, Philosophie der Neuzeit“;
Rowohlt Taschenbuchverlag Band 261/62, 1966 München}

Inhalt

1) Begriffsdefinitionen

A: (formale) Aussagenlogik

Definition (Formel oder Aussagensatz):

Jedes (aussagenlogische) Symbol, das für eine Aussage steht, ist ein Aussagensatz.
Die Wahrheitssymbole sowie jede Aussage selbst sind Aussagensätze.
Aussagen lassen sich mit Verknüpfungssymbolen zu einer neuen Aussage verschmelzen.

Wahrheitssymbole:	*true*	richtig, wahr
	false	falsch, unwahr
Verknüpfungssymbole:	*not*, $\neg$	Negation
	and, $\wedge$	Konjunktion
	or, $\vee$	Disjunktion
	if-then	Bedingung (oder Folgerung, Implikation)
	$\equiv$	Äquivalenz
	if-then-else	Bedingung mit Alternative

Normaler Weise werden auch $\Rightarrow$ für Implikation, $\Leftrightarrow$ für Äquivalenz benutzt.
In diesem Text werden diese Zeichen als metasprachliche Elemente benutzt,
welche metasprachliche Implikation bzw. metasprachliche Äquivalenz bedeuten.

Definition (Interpretation einer Formel):

Die Zuweisung von Wahrheitswerten (*true* oder *false*) zu den aussagenlogischen Symbolen in einer Formel heißt Interpretation einer Formel.

Definition (Wert einer Formel):

Der (Wahrheits-)Wert einer Aussage ist *true* oder *false*, nie beides gleichzeitig.
Der Wert ermittelt sich während des Auswertens der Interpretation.
Im Folgenden setze ich Kenntnis über die Art, wie mit Formeln umgegangen werden kann, voraus.

Definition (Gültigkeit einer Formel):

Eine Formel F ist gültig [valid], falls der Wert von F unter jeder Interpretation *true* ist.
F wird dann auch Tautologie genannt.

B: Prädikatenlogik (erster Ordnung)

Definition (Symbole):

Zu den Symbolen der Aussagenlogik kommen folgende hinzu:

Konstanten: $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ a_1,\ b_1,\ c_1$ ...

Variablen: $u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ u_1,\ v_1,\ w_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1$ ...

Funktionssymbole [Funktionen]: $f,\ g,\ h,\ f_1,\ g_1,\ h_1$ ...

Prädikatsymbole [Prädikate]: $p,\ q,\ r,\ p_1,\ q_1,\ r_1$ ...

Existenzquantor: $\exists$ „Es existiert"
Allquantor: $\forall$ „Für alle"

Konstanten und Variablen beschreiben Objekte, Funktionssymbole und Prädikatssymbole beschreiben Funktionen und Relationen auf diesen Objekten.

Definition (Term):

Konstanten und Variablen sind Terme,
die Anwendung von f auf n Terme ergibt einen Term, d.h: $f(t_1,...,t_n)$ ist ein Term.

Definition (Aussage):

Aussagen in der Prädikatenlogik sind dafür gedacht, Relationen (Beziehungen) zwischen Objekten zu beschreiben.
Die Wahrheitssymbole sind Aussagen,
$p(t_1,...,t_n)$ ist eine Aussage, wenn $t_1,...,t_n$ n Terme sind.

Definition (Satz):

Jede Aussage ist ein Satz.
Sätze lassen sich mit den gleichen Verknüpfungssymbolen wie Formeln der Aussagenlogik zu einem neuen Satz verschmelzen.
Zusätzlich: $(\exists x)F,\ (\forall x)F$ sind Sätze, wenn F ein Satz ist.

Definition (freie und gebundene Variable):

Variablen, die von Quantoren (Allquantoren oder Existenzquantoren) gebunden werden, heißen gebundene Variablen. Alle anderen heißen freie oder ungebundene Variablen

> *Beispiel*:
> Sei F ein Satz mit $F = (\exists x)(\forall z)\,p(x,\ f(z), y)$.
> So sind x und z in F gebundene Variablen, da sie jeweils durch $(\exists x)$ bzw. $(\forall z)$ gebunden sind.
> y in F ist freie Variable.

Definition (Bereinigung):

Ein prädikatenlogischer Satz F heißt bereinigt, falls keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt und falls keine Variable als gebundene Variable in mehreren Quantoren auftritt. Durch Umbenennung von gebundenen Variablen lässt sich jeder Satz F in eine bereinigte Form $\tilde{F}$ überführen, die zu F logisch äquivalent ist.

Definition (Pränexform, pränexe Normalform):

Ein Satz F ist in Pränexform, falls er die Bauart $Q_1 x_1 ... Q_n x_n E$ hat, wobei die Q_i Quantoren sind und in E kein Quantor mehr vorkommt.

Definition (geschlossener Satz):

Ein Satz, in dem keine freien Variablen vorkommen, heißt geschlossener Satz.

Beispiel:
Der Satz $(\forall x) p(x, y)$ ist nicht geschlossen, hingegen $(\forall x)(\exists y) p(x, y)$ wohl.

Definition (Interpretation eines Satzes):

Sei D eine beliebige <u>nicht leere</u> Menge, D heiße Domain.
Eine Interpretation I über einer Domain D verbindet Werte mit jeder Konstanten, Variablen, sowie jedem Funktions- und Prädikatssymbol in folgender Weise:

- Zu jeder Konstanten a, ein Element $a_I \in D$
- Zu jeder Variablen x, ein Element $x_I \in D$
- Zu jedem Funktionssymbol f mit n-Argumenten, eine n-äre Funktion $f_I(d_1,...,d_n)$, wobei die $d_j \in D$ und der Wert von $f_I(d_1,...,d_n)$ zu D gehört.
- Zu jedem Prädikatensymbol p mit n-Argumenten, eine n-äre Relation $p_I(d_1,...,d_n)$, wobei die $d_j \in D$ und der Wert von $p_I(d_1,...,d_n)$ ist entweder *true* oder *false*.

Definition (Gültigkeit eines Satzes):

In der Prädikatenlogik ist die Gültigkeit eines Satzes nur für geschlossene Sätze definiert.
Ein geschlossener Satz F ist gültig [valid], falls der Wert von F unter jeder Interpretation *true* ist.

Definition (Allgemeinster Unifikator, most general unifier)

Sei Γ eine Menge von Literalen, das sind Formeln oder Teilformeln, Sätze oder Teilsätze.
q heißt Unifikator (Vereinheitlicher) von Γ, wenn q alle Elemente aus Γ durch simultane Substitution gleich macht. Dies bedeutet für $F \neq G, F \in \Gamma, G \in \Gamma$ ist $Fq = Gq$.

Anmerkung: Der Unifikator wird unter anderem bei den später eingeführten Resolutions- und Skolemisierungsregeln angewendet.

C: Axiomatische Theorien

Definition (Axiome):

Eine Theorie wird durch ihre Axiome, das ist eine Menge von geschlossenen Sätzen, definiert. Ein Axiom wird dann erfüllt, wenn seine Interpretation *true* liefert.

Definition (Modell):

Eine Interpretation I ist genau dann ein Modell für eine Theorie T mit den Axiomen A_i, wenn jedes der Axiome A_i der Theorie unter dieser Interpretation I erfüllt ist.

Definition (Theorieerweiterung):

Unter der Erweiterung einer Theorie versteht man das Hinzufügen von geschlossenen Sätzen zu der Menge der Axiome.
Anmerkung: Durch Theorieerweiterung kann sich die Menge der Modelle verringern.
Theorien, die keine Modelle besitzen, heißen inkonsistente Theorien.

Definition (Gültigkeit eines Satzes):

Ein geschlossener Satz F ist gültig [valid], falls der Wert von F unter jedem Modell der Theorie *true* ist.
Anmerkung: Beachte den feinen Unterschied zur Prädikatenlogik: Ein geschlossener Satz F ist gültig [valid], falls der Wert von F unter jeder Interpretation *true* ist.

Definition (Relativierende Quantoren):

Für jedes unäre Prädikatensymbol p und jeden Satz F

$$(\forall px)F \Leftrightarrow (\forall x)[\mathit{if}\ \ p(x)\ \mathit{then}\ F]$$

$$(\exists px)F \Leftrightarrow (\exists x)[\,p(x)\ \mathit{and}\ \ F\,]$$

***Beispiele*:**

In der Theorie T_1 bestehe die Menge der Axiome aus genau:	I Sei eine Interpretation für T_1, in der gilt:
$F_1 : (\forall x)\, p\big(x, f(x)\big)$	$f(x) \Leftrightarrow$ Vater von x
$F_2 : (\forall x)\, p\big(x, m(x)\big)$	$m(x) \Leftrightarrow$ Mutter von x
$F_3 : (\forall x, y)\big[if\ \ p(x,y)\ then\ gf(x, f(y))\big]$	$p(x,y) \Leftrightarrow$ y ist Elternteil von x
$F_4 : (\forall x, y)\big[if\ \ p(x,y)\ then\ gm(x, m(y))\big]$	$gf(x,y) \Leftrightarrow$ y ist Großvater von x
	$gm(x,y) \Leftrightarrow$ y ist Großmutter von x
	J Sei eine Interpretation für T_1, in der gilt:
	$f(x) \Leftrightarrow 2x$
	$m(x) \Leftrightarrow 3x$
	$p(x,y) \Leftrightarrow y = 2x$ oder $y = 3x$
	$gf(x,y) \Leftrightarrow y = 4x$ oder $y = 6x$
	$gm(x,y) \Leftrightarrow y = 6x$ oder $y = 9x$

Die Interpretation I der Theorie T_1 bekomme den Namen „Familieninterpretation“, J hingegen heiße „Integerinterpretation“.

Gültigkeit eines Satzes:
Der Satz G: $(\forall x)[not\ \ p(x,x)]$ bedeutet in der Familieninterpretation, niemand ist sein eigener Vorfahre, was anschaulich klar ist – wenn man klonen und der gleichen außer Acht lässt. Damit könnte man meinen, dass der Satz gültig ist in T_1.
Jedoch in der Integerinterpretation wird klar, dass dieser Satz in der Theorie nicht gilt, da er nicht für die Integerinterpretation gilt.
Der Satz gilt genau deshalb in J nicht, da er dort die Bedeutung „Unter allen ganzen Zahlen x, gibt es kein x, so dass $x=2x$ *oder* $x=3x$ gilt“ erhält. Dies ist aber bekanntlich nicht der Fall, denn für $x=0$ ist „$0=2 \bullet 0$ *oder* $0=3 \bullet 0$“ erfüllt.

Theorie erweitern:
Möchte man G zu den Axiomen, die erfüllt werden müssen, hinzunehmen, d.h. die Theorie um G erweitern, dann ist die Integerinterpretation kein Modell für die neue Theorie T_2 mehr, da in J nicht alle Axiome erfüllt werden.

Inkonsistente Theorie:
Im Folgenden wollen wir die Theorie T_1 um die Existenz eines „Ersten Menschen“ erweitern.
In der Familieninterpretation hieße das dann:
Es gibt unter allen Personen y keine, die Vorfahr von der Person a ist.
a ist der „Erste Mensch“.
Formale Notation: A: $(\forall y)[not\ \ p(a, y)]$
Angenommen die Familieninterpretation gilt, dann gilt auch das „Vateraxiom“, d.h. $(\forall x)\, p(x, f(x))$ ist wahr für x. Nun werde x auf das Domainelement a gesetzt, damit gilt auch $p(a, f(a))$. Nun sei $y = f(a)$. Damit $(\exists y) p(a,y)$ ebenfalls unter I. Jetzt wird die Dualität der Quantoren ausgenutzt, d.h. $(\exists y)p(a,y) \Leftrightarrow not(\forall y)[not\ \ p(a,y)]$.
Damit haben wir die Negation von A erhalten. Widersprechen sich zwei Axiome, so kann es keine Modelle geben.

Vorschlag für Bedingungen an ein axiomatisches System (Karl Popper *{Logik der Forschung, S. 41}**):*

Karl Popper schlägt diese allgemeinen Bedingungen vor:
„Wir sagen, dass ein theoretisches System axiomatisiert ist,
wenn eine Anzahl von Sätzen, Axiomen, aufgestellt wird,
die folgenden vier Grundbedingungen genügen:
Das System der Axiome muss, für sich betrachtet,

(a) widerspruchsfrei sein, was mit der Forderung äquivalent ist, dass nicht jeder beliebige Satz aus dem Axiomensystem ableitbar sein soll;
(b) unabhängig sein, d.h. keine Aussage enthalten, die aus den übrigen Axiomen ableitbar ist („Axiom“ soll nur ein innerhalb des Systems nichtableitbarer Grundsatz heißen.)

Was ihr logisches Verhältnis zu den übrigen Sätzen des axiomatisierten Systems betrifft, so sollen die Axiome überdies

(c) zur Deduktion aller Sätze dieses Gebietes hinreichen und
(d) notwendig sein, d.h. keine überflüssigen Bestandteil enthalten.“

2) Polarität des Vorkommens

Es ist geschickt, beim später vorgestellten deduktiven Tableaux-Verfahren, einer Methode zum Beweisen von Formeln, Sätzen und Theorien, eine Strategie zu benutzen, welche die erfolglosen Anwendungen verhindert. Diese Strategie berücksichtigt die Polarität, daher wird im Folgenden die Polarität eingeführt.

Definition (Polarität des Vorkommens in der Aussagenlogik):

Jedem Teil einer Formel lässt sich mit den folgenden Polaritätsregeln eine Polarität zuordnen.

- Top Regel:
  Sei S eine Formel, so besitzt S positive Polarität.
  Notation: S^{+}
- Not Regel:
  Sei E eine Teilformel von S, und besitze E die Form $(not\ F)$, dann besitzt die Komponente F inverse Polarität zu E in S.
  Notation: $[not\ F]^{p} \Rightarrow not\ F^{-p}$
- And/Or Regel:
  Sei E eine Teilformel von S in der Form $(F\ and\ G)$ oder $(F\ or\ G)$, so besitzen die Komponenten F und G jeweils dieselbe Polarität wie E in S.
  Notation: $$[F\ and\ G]^{p} \Rightarrow F^{p}\ and\ G^{p}$$ $$[F\ or\ G]^{p} \Rightarrow F^{p}\ or\ G^{p}$$
- If-then Regel:
  Sei E eine Teilformel von S in der Form $(if\ F\ then\ G)$, dann wird die Polarität aufgebrochen.
  Notation: $[if\ F\ then\ G]^{p} \Rightarrow if\ F^{-p}\ then\ G^{p}$
- $\equiv$ Regel:
  Sei E eine Teilformel von S in der Form $(F \equiv G)$, dann wird die Polarität neutralisiert.
  Notation: $[F \equiv G]^{p} \Rightarrow F^{+/-} \equiv G^{+/-}$
- If-then-else Regel:
  Sei E eine Teilformel von S in der Form $(if\ F\ then\ G\ else\ H)$, dann
  Notation: $[if\ F\ then\ G\ else\ H]^{p} \Rightarrow if\ F^{+/-}\ then\ G^{p}\ else\ H^{p}$

Definition (Polarität des Vorkommens in der Prädikatenlogik):

Jedem Teil eines Satzes lässt sich mit den folgenden Polaritätsregeln eine Polarität zuordnen.

- Top Regel:
  Sei S ein Satz, so besitzt S positive Polarität.
  Notation: S^+
- Aussagenverbindungsregeln: Das sind die Regeln für die Aussagenlogik
- Conditional-term Regeln: Habe ein Subterm von S die Form $(if\ F\ then\ r\ else\ s)$
  Notation: $[if\ F\ then\ r\ else\ s]^p \Rightarrow if\ F^{+/-}\ then\ r\ else\ s$
  Beachte, dass keine Polaritäten an die Subterme r und s gebunden werden.
- Quantoren Regel:
  Sei E ein Teilsatz von S in der Form $(\forall x)F$ oder $(\exists x)F$:
  Notation: $[(\forall x)F]^p \Rightarrow (\forall x)F^p$ bzw. $[(\exists x)F]^p \Rightarrow (\exists x)F^p$

Definition (Kraft von Quantoren [=force of quantifiers]):

Ein Quantor hat universelle Kraft (kenntlich gemacht durch das Superscript $(...x)^{\forall}$)
in einem Satz, wenn

- er ein Allquantor mit positiver Polarität ist $[(\forall x)F]^+ \Rightarrow (\forall x)^{\forall} F$
- er ein Existenzquantor mit negativer Polarität ist $[(\exists x)F]^- \Rightarrow (\exists x)^{\forall} F$

Ein Quantor hat existenzielle Kraft (kenntlich gemacht durch das Superscript $(...x)^{\exists}$)
in einem Satz, wenn

- er ein Allquantor mit negativer Polarität ist $[(\forall x)F]^- \Rightarrow (\forall x)^{\exists} F$
- er ein Existenzquantor mit positiver Polarität ist $[(\exists x)F]^+ \Rightarrow (\exists x)^{\exists} F$

Ein Quantor mit dualer Kraft (kenntlich gemacht durch das Superscript $(...x)^{\forall\exists}$)
kann nur im direkten Wirkungsbereich von Äquivalenzverbindung $\equiv$ oder bei *if-then-else* Konstrukten vorkommen.

3) Skolemisierung

Beim deduktiven Tableaux-Verfahren für Prädikatenlogik (und axiomatische Theorien) spielt die Skolemisierung von Sätzen eine Rolle.
Die Idee der Skolemisierung sei zunächst einmal an einem einfachen Beispiel gezeigt.

Beispiel:

Sei $S_1 = (\forall x)(\exists y)x < y$ und $S_2 = (\forall x)x < f(x)$ zwei Sätze.
S_1, S_2 beschreiben ähnliche Sachverhalte, nämlich, dass es zu jedem x ein noch größeres y gibt. Der zweite Satz ist allerdings stärker, denn er gibt an, wie ein solch größeres Element aus der Domain berechnet werden kann.

S_1 lässt sich aus S_2 herleiten: =>

$(\forall x)x < f(x)$
also $x < f(x)$
nun sei $y = f(x)$
damit $(\exists y)x < y$
letztlich $(\forall x)(\exists y)x < y$

Der zweite Satz folgt jedoch aus dem ersten nicht, denn aus der Tatsache, dass es ein größeres y zu jedem x gibt, kann nicht geschlossen werden, dass die Funktion f hierfür stets ein Beispiel liefert.
Ist I jedoch eine Interpretation mit konkreter Relation $<$ und gilt S_1 in I, so kann man in I jedem x einen der möglichen y-Werte zuordnen, für die $x < y$ gilt. Auf I ist dann eine <u>neue</u> einstellige Operation f_I definiert, für die gilt: $(\forall x)x < f(x)$
Anders: Gilt S_1 in I, dann kann I so um eine neue Operation <u>erweitert</u> werden, dass auch S_2 gilt.
Die Skolemisierung ist eine Verallgemeinerung dieses Gedankenganges.

Schritte der (vollen) Skolemisierung unter Berücksichtigung der Polarität:

Schritt 1: Beseitigung der Quantoren mit dualer Kraft.

- Äquivalenz Elimination:
  $F \equiv G \Leftrightarrow (if\ F\ then\ G)\ and\ (if\ G\ then\ F)$
  $F \equiv G \Leftrightarrow (F\ and\ G)\ or\ ((not\ F)\ and\ (not\ G))$
- Elimination der bedingten Verbindung:
  $if\ F\ then\ G\ else\ H \Leftrightarrow (if\ F\ then\ G)\ and\ (if\ (not\ F)\ then\ H)$
  $if\ F\ then\ G\ else\ H \Leftrightarrow (F\ and\ G)\ or\ ((not\ F)\ then\ H)$
- Elimination der bedingten Relation/Funktion
  $p(\overline{r}, if\ F\ then\ t_1\ else\ t_2, \overline{s}) \Leftrightarrow if\ F\ then\ p(\overline{r}, t_1, \overline{s})\ else\ p(\overline{r}, t_2, \overline{s})$
  $f(\overline{r}, if\ F\ then\ t_1\ else\ t_2, \overline{s}) \Leftrightarrow if\ F\ then\ f(\overline{r}, t_1, \overline{s})\ else\ f(\overline{r}, t_2, \overline{s})$

Schritt 2: Falls nötig, bereinigen des Satzes, d.h. Umbenennung aller gebundenen Variablen in dem Satz, um sicher zustellen, dass sich alle gebundenen Variablen namentlich von einander unterscheiden.

Schritt 3: Bringe den Satz in Pränexform.

Führe die Schritte 4 und 5, von rechts nach links auf einen Satz angewendet, aus.

Schritt 4: Besitzt der zu entfernende Quantor strikte universelle Kraft, wird er aus dem Satz unter Anwendung der universal-elimination Regel (siehe deduktives Tableaux Verfahren) entfernt, durch Hinzufügen einer Skolem-Konstanten oder Skolem-Funktion.
Führe Schritt 4 so lange aus, bis keine Quantoren strikter universeller Kraft mehr vorhanden sind.

Schritt 5: Besitzt der zu entfernende Quantor strikte existenzielle Kraft und liegt er nicht im Wirkungsbereich eines Quantors mit universeller Kraft, wird er aus dem Satz unter Anwendung der existential-elimination Regel (siehe deduktives Tableaux Verfahren) entfernt, durch einfaches Weglassen des Quantors. Jedoch muss für entsprechende Variablen, die ihren Quantor verloren haben, ein Domain-Element eingesetzt werden.
Führe Schritt 5 so lange aus, bis keine Quantoren strikter existenzieller Kraft mehr vorhanden sind.

Anmerkung: Das Entfernen von Quantoren mit dualer Kraft ist nicht kritisch, da es sich hier um Äquivalenz-Umformungen handelt. Das Entfernen von Quantoren strikter existenzieller Kraft in Kombination mit dem Ersetzen der von diesen Quantoren gebundenen Variablen durch Domain-Elemente ist ebenfalls eine Äquivalenz-Umformung. Jedoch die Skolemisierung von universal kräftigen Quantoren ist keine Äquivalenz-Umformung, jedoch behält sie die Gültigkeit des Ursprungssatzes bei, was für Beweise der Gültigkeit völlig ausreicht.

4) Deduktives Tableaux-Verfahren

A: Allgemeines

Die Tabelle besteht aus zwei Spalten:

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)

Pro Annahme und Ziel eine Zeile, d.h. Annahmen und Ziele dürfen nicht in einer Zeile stehen, wobei es egal ist in welcher Reihenfolge eingetragen wird.
Zum Beispiel $If\,(A_1 \text{ and } A_2 \text{ and } A_3) \text{ then } (G_1 \text{ or } G_2 \text{ or } G_3)$ kann in folgender Tabelle notiert sein.

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	G_3
A_2	
A_3	
	G_1
A_1	
	G_2

Sowohl die Annahmen als auch die Ziele werden nur in simplifizierter Form in die Tabelle eingetragen.

Katalog von Simplifizierungen:

- Negation

$not\ \ true \Rightarrow false$	(not true)
$not\ \ false \Rightarrow true$	(not false)
$not(not\ \ F) \Rightarrow F$	(not not)
$not((not\ \ F)\ and\ (not\ \ G)) \Rightarrow F\ or\ G$	(not and)
$not((not\ \ F)\ or\ (not\ \ G)) \Rightarrow F\ and\ G$	(not or)
$not(if\ \ F\ \ then\ (not\ \ G)) \Rightarrow F\ and\ G$	(not if)
$not((not\ \ F) \equiv G) \Rightarrow F \equiv G$	(not iff links)
$not(F \equiv (not\ \ G)) \Rightarrow F \equiv G$	(not iff rechts)
$not(if\ \ F\ \ then\ (not\ \ G)\ else\ (not\ \ H)) \Rightarrow if\ \ F\ \ then\ G\ else\ H$	(not cond)

- Konjunktionen

$F \;\; and \;\; true \Rightarrow F$	(and true)
$true \;\; and \;\; F \Rightarrow F$	(true and)
$F \;\; and \;\; false \Rightarrow false$	(and false)
$false \;\; and \;\; F \Rightarrow false$	(false and)
$F \;\; and \;\; F \Rightarrow F$	(and selbst)
$F \;\; and \;\; (not \;\; F) \Rightarrow false$	(and not)
$(not \;\; F) \;\; and \;\; F \Rightarrow false$	(not and)

- Disjunktionen

$F \;\; or \;\; true \Rightarrow true$	(or true)
$true \;\; or \;\; F \Rightarrow true$	(true or)
$F \;\; or \;\; false \Rightarrow F$	(or false)
$false \;\; or \;\; F \Rightarrow F$	(false or)
$F \;\; or \;\; F \Rightarrow F$	(or selbst)
$F \;\; or \;\; (not \;\; F) \Rightarrow true$	(or not)
$(not \;\; F) \;\; or \;\; F \Rightarrow true$	(not or)

- Implikation

$if \;\; true \;\; then \;\; G \Rightarrow G$	(if true)
$if \;\; false \;\; then \;\; G \Rightarrow true$	(if false)
$if \;\; F \;\; then \;\; true \Rightarrow true$	(then true)
$if \;\; F \;\; then \;\; false \Rightarrow not \;\; F$	(then false)
$if \;\; F \;\; then \;\; F \Rightarrow true$	(if selbst)
$if \;\; (not \;\; F) \;\; then \;\; F \Rightarrow F$	(if not)
$if \;\; F \;\; then \;\; (not \;\; F) \Rightarrow not \;\; F$	(then not)
$if \;\; (not \;\; G) \;\; then \;\; (not \;\; F) \Rightarrow if \;\; F \;\; then \;\; G$	(Kontraposition)

- Äquivalenz

$F \equiv true \Rightarrow F$	(iff true)
$true \equiv F \Rightarrow F$	(true iff)
$F \equiv false \Rightarrow not \;\; F$	(iff false)
$false \equiv F \Rightarrow not \;\; F$	(false iff)
$F \equiv F \Rightarrow true$	(iff selbst)
$F \equiv (not \;\; F) \Rightarrow false$	(iff not)
$(not \;\; F) \equiv F \Rightarrow false$	(not iff)

- Bedingung mit Alternative [conditional]

$if\ \ true\ \ then\ \ G\ \ else\ \ H\ \Rightarrow\ G$ (cond if true)

$if\ \ false\ \ then\ \ G\ \ else\ \ H\ \Rightarrow\ H$ (cond if false)

$if\ \ F\ \ then\ \ true\ \ else\ \ H\ \Rightarrow\ F\ \ or\ \ H$ (cond then true)

$if\ \ F\ \ then\ \ false\ \ else\ \ H\ \Rightarrow\ (not\ \ F)\ \ and\ \ H$ (cond then false)

$if\ \ F\ \ then\ \ G\ \ else\ \ true\ \Rightarrow\ if\ \ F\ \ then\ \ G$ (cond else true)

$if\ \ F\ \ then\ \ G\ \ else\ \ false\ \Rightarrow\ F\ \ and\ \ G$ (cond else false)

$if\ \ F\ \ then\ \ G\ \ else\ \ G\ \Rightarrow\ G$ (cond selbst)

$if\ \ (not\ \ F)\ \ then\ \ G\ \ else\ \ H\ \Rightarrow\ if\ \ F\ \ then\ \ H\ \ else\ \ G$ (cond not)

B: Aussagenlogik

Definition (Semantische Bedeutung einer Tabelle)

Eine Tabelle mit den Annahmen $A_1, A_2, ..., A_m$ und den Zielen $G_1, G_2, ..., G_n$ ist wahr unter einer Interpretation I , falls folgendes erfüllt ist:

Falls alle Annahmen A_i unter I wahr sind,
dann ist mindestens ein Ziel G_j wahr unter I

Unwahr unter einer Interpretation I wird eine Tabelle, falls folgendes erfüllt ist:

Alle Annahmen A_i sind unter I wahr und jedes Ziel G_j ist unter I unwahr.

Nach logischer Umformung der Definition gilt:
Eine Tabelle ist unter einer Interpretation I wahr, genau dann, wenn mindestens eine Annahme A_i unwahr unter I ist oder mindestens ein Ziel G_j unter I wahr ist.

Definition (Gültigkeit einer Tabelle)

Eine Tabelle ist gültig wenn ihre semantische Bedeutung wahr ist für jede Interpretation. Äquivalent dazu: Eine Tabelle ist genau dann gültig, wenn die mit ihr assoziierte Formel gültig ist.

Definition (Positionswechsel, Dualitätseigenschaft)

Unter einem Positionswechsel versteht man das Verschieben eines Ziels in die Annahme-Spalte, bzw. das Verschieben einer Annahme in die Ziel-Spalte.

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	F

Wird dann zu:

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
(not F)	

Definition (Polarität in einer Tabelle):

Polarität wurde oben schon eingeführt. Für Tabellen gelten die gleichen Regeln, wobei eine Anfangspolarität wie folgt gesetzt wird:

- Jedes Ziel hat positive Polarität
- Jede Annahme hat negative Polarität
- Die Polarität von Teilformeln in Annahmen oder Zielen ist abhängig von den vorher eingeführten Polaritätsregeln.

Anmerkung: Wird während des Verfahrens die Dualitätseigenschaft ausgenutzt, d.h. wechselt F die Spalte, so behält F an sich seine ursprüngliche Polarität bei.

Beispiel:

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$[F]^+$

Wird dann zu:

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$[not[F]^+]^-$	

Deduktionsregeln

1. Ersetzungsregel (rewriting rule)
2. Trennungsregel (splitting rule)
3. Schlussregel (resolution rule)
4. Regeln zur Äquivalenzbehandlung (equivalence rule)

Ersetzungsregeln:

- Negation

  $not(F\ and\ G) \Leftrightarrow (not\ F)\ or\ (not\ G)$ (not and)

  $not(F\ or\ G) \Leftrightarrow (not\ F)\ and\ (not\ G)$ (not or)

  $not(if\ F\ then\ G) \Leftrightarrow F\ and\ (not\ G)$ (not if)

  $not(F \equiv G) \Leftrightarrow F \equiv (not\ G)$ (not iff)

  $not(if\ F\ then\ G\ else\ H) \Leftrightarrow if\ F\ then\ (not\ G)\ else\ (not\ H)$ (not cond)

- Elimination

  $if\ F\ then\ G \Leftrightarrow (not\ F)\ or\ G$ (if or)

  $F \equiv G \Leftrightarrow (if\ F\ then\ G)\ and\ (if\ G\ then\ F)$ (iff and)

  $F \equiv G \Leftrightarrow (F\ and\ G)\ or\ ((not\ F)\ and\ (not\ G))$ (iff or)

  $if\ F\ then\ G\ else\ H \Leftrightarrow (if\ F\ then\ G)\ and\ (if\ (not\ F)\ then\ H)$ (cond and)

  $if\ F\ then\ G\ else\ H \Leftrightarrow (F\ and\ G)\ or\ ((not\ F)\ and\ H)$ (cond or)

- Kommutativität

  $F\ and\ G \Leftrightarrow G\ and\ F$ (and)

  $F\ or\ G \Leftrightarrow G\ or\ F$ (or)

  $F \equiv G \Leftrightarrow G \equiv F$ (iff)

- Assoziativität

  $(F\ and\ G)\ and\ H \Leftrightarrow F\ and\ (G\ and\ H)$ (and)

  $(F\ or\ G)\ or\ H \Leftrightarrow F\ or\ (G\ or\ H)$ (or)

  $(F \equiv G) \equiv H \Leftrightarrow F \equiv (G \equiv H)$ (iff)

- Distributivität
  $F \text{ and } (G \text{ or } H) \Leftrightarrow (F \text{ and} G) \text{ or } (F \text{ and } H)$ (and or)
  $F \text{ or } (G \text{and } H) \Leftrightarrow (F \text{ or } G) \text{ and } (F \text{ or } H)$ (or and)

Trennungsregeln:

- And-Trennung:
  Die Annahme $A_1 \text{ and } A_2$ wird in zwei neue Zeilen aufgetrennt, d.h.

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A_1 \text{ and } A_2$	

wird zu

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A_1 \text{ and } A_2$	
A_1	
A_2	

- Or-Trennung:
  Das Ziel $G_1 \text{ or } G_2$ wird in zwei neue Zeilen aufgetrennt, d.h.

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G_1 \text{ or } G_2$

wird zu

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G_1 \text{ or } G_2$
	G_1
	G_2

- If-Trennung:
  Das Ziel $\text{if } A \text{ then } G$ wird in zwei neue Zeilen aufgetrennt, d.h.

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$\text{If } A \text{ then } G$

wird zu

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$\text{If } A \text{ then } G$
A	
	G

Schlussregeln:

- AA-Resolution

  P sei Teilformel in A_1 und A_2, dann ersetze jedes Vorkommen von P in A_1 mit *false* und in A_2 mit *true*. Führe dann auf der Disjunktion von A_1 und A_2 alle Vereinfachungen durch, und füge diese dann als neue Annahme zur Tabelle hinzu.

Annahmen	Ziele
$A_1[P]$	
$A_2[P]$	

Annahmen	Ziele
$A_1[P]$	
$A_2[P]$	
$A_1[\mathit{false}]\,or\,A_2[\mathit{true}]$	

Es ist durchaus auch inverse Besetzung möglich, das würde bedeuten:

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A_1[P]$	
$A_2[P]$	
$A_1[\mathit{true}]\,or\,A_2[\mathit{false}]$	

- GG-Resolution

  P sei Teilformel in G_1 und G_2, dann ersetze jedes Vorkommen von P in G_1 mit *false* und in G_2 mit *true*. Führe dann auf der Konjunktion von G_1 und G_2 alle Vereinfachungen durch, und füge diese dann als neues Ziel zur Tabelle hinzu.

Annahmen	Ziele
	$G_1[P]$
	$G_2[P]$

Annahmen	Ziele
	$G_1[P]$
	$G_2[P]$
	$G_1[\mathit{false}]\,and\,G_2[\mathit{true}]$

Auch hier ist eine umgedrehte Belegung denkbar.

- AG-Resolution

Annahmen	Ziele
$A[P]$	
	$G[P]$

Annahmen	Ziele
$A[P]$	
	$G[P]$
	$not\ A[\mathit{false}]\,and\,G[\mathit{true}]$

- GA-Resolution

Annahmen	Ziele
	$G[P]$
$A[P]$	

Annahmen	Ziele
	$G[P]$
$A[P]$	
	$G[\mathit{false}]\,and\ not\ A[\mathit{true}]$

<u>Anmerkung:</u> Man sieht, AG- und GA-Resolution haben zueinander inverse Belegung. Betrachtet man die Polaritäten, so bekommt man automatisch eine Entscheidungshilfe mitgeliefert, welches Erscheinen von *P* durch *false* und welches andere mit *true* ersetzt werden soll. (Polaritätsstrategie folgt nach den Regeln zur Äquivalenzbehandlung)

Regeln zur Äquivalenzbehandlung:

- AA-Äquivalenz (links-nach-rechts)
  $P \equiv Q$ sei Teilformel in A_1 und P in A_2, dann ersetze jedes Vorkommen von $P \equiv Q$ in A_1 mit *false* und in A_2 ersetze *P* mit *Q*. Führe dann auf der Disjunktion von A_1 und A_2 alle Vereinfachungen durch, und füge diese dann als neue Annahme zur Tabelle hinzu.

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < P >$	

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < P >$	
$A_1[\mathit{false}]\ \mathit{or}\ A_2 < Q >$	

- AA-Äquivalenz (recht-nach-links)
  $P \equiv Q$ sei Teilformel in A_1 und Q in A_2, dann ersetze jedes Vorkommen von $P \equiv Q$ in A_1 mit *false* und in A_2 ersetze *Q* mit *P*. Führe dann auf der Disjunktion von A_1 und A_2 alle Vereinfachungen durch, und füge diese dann als neue Annahme zur Tabelle hinzu.

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < Q >$	

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < Q >$	
$A_1[\mathit{false}]\ \mathit{or}\ A_2 < P >$	

- GG-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
	$G_1[P \equiv Q]$
	$G_2 < P >$

Annahmen	Ziele
	$G_1[P \equiv Q]$
	$G_2 < P >$
	$G_1[\mathit{false}]\ \mathit{and}\ G_2 < Q >$

- GG-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
	$G_1[P \equiv Q]$
	$G_2 < Q >$

Annahmen	Ziele
	$G_1[P \equiv Q]$
	$G_2 < Q >$
	$G_1[\mathit{false}]\ \mathit{and}\ G_2 < P >$

- AG-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
$A[P \equiv Q]$	
	$G < P >$

Annahmen	Ziele
$A[P \equiv Q]$	
	$G < P >$
	$\mathit{not}(A[\mathit{false}])\ \mathit{and}\ G < Q >$

- AG-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
$A[P \equiv Q]$	
	$G < Q >$

Annahmen	Ziele
$A[P \equiv Q]$	
	$G < Q >$
	$not(A[false])\ and\ G < P >$

- GA-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
	$G[P \equiv Q]$
$A < P >$	

Annahmen	Ziele
	$G[P \equiv Q]$
$A < P >$	
	$G[false]\ and\ not(A < Q >)$

- GA-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
	$G[P \equiv Q]$
$A < Q >$	

Annahmen	Ziele
	$G[P \equiv Q]$
$A < Q >$	
	$G[false]\ and\ not(A < P >)$

Polaritätsstrategie im Tableaux-Verfahren

Angenommen man möchte mit einer Resolutionsregel das Vorkommen von P in F_1 und F_2 ersetzen durch entsprechende Wahrheitswerte. Dann besagt die Polaritätsstrategie:

1. Ersetze P in $F_1[P]$ durch *false*, wenn mindestens ein Vorkommen von P in $F_1[P]$ negative Polarität besitzt.
2. Ersetze P in $F_2[P]$ durch *true*, wenn mindestens ein Vorkommen von P in $F_2[P]$ positive Polarität besitzt.

Beachte dabei, dass es egal ist in welchen Zeilen in der Tabelle F_1 und F_2 stehen. Auch die relative Position zueinander ist nicht von Bedeutung.
Möchte man mit den oben genannten Regeln Äquivalenzen behandeln, so besagt die Strategie:

In $F[P \equiv Q]$ wird $(P \equiv Q)$ durch *false* ersetzt, wenn mindestens ein Vorkommen von $(P \equiv Q)$ negative Polarität besitzt.

BEISPIEL: Zu zeigen: $if \begin{bmatrix} if\ P\ then\ R \\ and \\ if\ Q\ then\ R \end{bmatrix} then \begin{bmatrix} if\ (P\ or\ Q) \\ then\ R \end{bmatrix}$

Annahmen	Ziele
	G1: $if \begin{bmatrix} if\ P\ then\ R \\ and \\ if\ Q\ then\ R \end{bmatrix} then \begin{bmatrix} if\ (P\ or\ Q) \\ then\ R \end{bmatrix}$

If-Trennung G1

A2: $\begin{matrix} if\ P\ then\ R \\ and \\ if\ Q\ then\ R \end{matrix}$	
	G3: $if\ (P\ or\ Q)\ then\ R$

And-Trennung A2

A4: $[if\ P^{+}\ then\ \boxed{R^{-}}]^{-}$	
A5: $[if\ Q^{+}\ then\ \boxed{R^{-}}]^{-}$	

If-Trennung G3

A6: $[\boxed{P^{-}}\ or\ Q^{-}]^{-}$	
	G7: $\boxed{R^{+}}$

AG-Resolution A4 mit G7

	G8: $not[if\ P\ then\ false]\ and\ true$

AG-Resolution A5 mit G7

	G9: $not[if\ Q\ then\ false]\ and\ true$

Verändere wegen (Then False) G8 und G9

	G8: $not[not\ P]\ and\ true$
	G9: $not[not\ Q]\ and\ true$

Verändere wegen (Not not) G8 und G9

	G8: $P\ and\ true$
	G9: $Q\ and\ true$

Verändere wegen (And true) G8 und G9

	G8: $\boxed{P^{+}}$
	G9: $\boxed{Q^{+}}$

AG-Resolution A6 mit G8

	G10: $not[false\ or\ Q]\ and\ true$

Verändere wegen (Or False) und (and true) G10

	G10: $\boxed{not[Q^{-}]}$

GG-Resolution G9 mit G10

	$not\ [false]\ and\ true \Rightarrow true$

Damit ist die Aussage als gültig bewiesen.

C: Prädikatenlogik

Definition (Semantische Bedeutung einer Tabelle)

Eine Tabelle mit den Annahmen $A_1, A_2, ..., A_m$ und den Zielen $G_1, G_2, ..., G_n$ ist wahr unter einer Interpretation I, falls folgendes erfüllt ist:

Falls der Universalschluss $(\forall *)A_i$ jeder Annahme A_i unter I wahr ist,
dann ist mindestens ein Existenzschluss $(\exists *)G_j$ für ein Ziel G_j unter I wahr.

Unwahr unter einer Interpretation I wird eine Tabelle, falls folgendes erfüllt ist:

Der Universalschluss $(\forall *)A_i$ jeder Annahme A_i unter I ist wahr und der Existenzschluss $(\exists *)G_j$ ist unwahr für jedes Ziel G_j unter I

Nach logischer Umformung der Definition gilt:

Eine Tabelle ist unter einer Interpretation I genau dann wahr,
wenn mindestens ein Universalschluss $(\forall *)A_i$ einer Annahme A_i unwahr unter I ist
oder mindestens ein Existenzschluss $(\exists *)G_j$ eines Ziel G_j unter I wahr ist.

Definition (Gültigkeit einer Tabelle)

Eine Tabelle ist gültig wenn ihre semantische Bedeutung wahr ist für jede Interpretation. Äquivalent dazu: Eine Tabelle ist genau dann gültig, wenn der mit ihr assoziierte geschlossene Satz gültig ist.

Definition (Dualitätseigenschaft & Polarität)

Sowohl Dualitätseigenschaft als auch Polaritätseigenschaft sind inhaltlich gleich der Definition aus der Aussagenlogik, bis auf, dass „Formel" durch „Satz" ersetzt wird.

Deduktionsregeln

Zu den Regeln des aussagenlogischen Verfahrens kommen noch einige Regeln hinzu

1. Ersetzungsregel (rewriting rule)
2. Schlussregel (resolution rule)
3. Regeln zur Äquivalenzbehandlung (equivalence rule)
4. Skolemisierungsregeln (Quantifier-elimination rule)

Ersetzungsregel:

- Quantorentausch:
  $(\forall x)(\forall y)F \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)F$ (all)
  $(\exists x)(\exists y)F \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)F$ (some)
- Quantorendualität:
  $not(\forall x)F \Leftrightarrow (\exists x)(not\ F)$ (not all)
  $not(\exists x)F \Leftrightarrow (\forall x)(not\ F)$ (not some)

- Quantorenmanipulation:
  $(\forall x)[F \text{ and } G] \Leftrightarrow (\forall x)F \text{ and } (\forall x)G$ (all and)
  $(\exists x)[F \text{ or } G] \Leftrightarrow (\exists x)F \text{ or } (\exists x)G$ (some or)
  $(\exists x)[\text{if } F \text{ then } G] \Leftrightarrow \text{if } (\forall x)F \text{ then } (\exists x)G$ (some if)
- Bedingungsmanipulation:
  $p(\bar{r}, \text{if } F \text{ then } t_1 \text{ else } t_2, \bar{s}) \Leftrightarrow \text{if } F \text{ then } p(\bar{r}, t_1, \bar{s}) \text{ else } p(\bar{r}, t_2, \bar{s})$ (Prädikat)
  $f(\bar{r}, \text{if } F \text{ then } t_1 \text{ else } t_2, \bar{s}) \Leftrightarrow \text{if } F \text{ then } f(\bar{r}, t_1, \bar{s}) \text{ else } f(\bar{r}, t_2, \bar{s})$ (Funktion)

Schlussregel:

Es lassen sich $F_1[P_1 ... P_n]$ und $F_2[P_1^{'} ... P_m^{'}]$ mit einander resolvieren, wenn erfüllt ist:

- In F_1 sind $P_1 ... P_n$ quantorenfreie Teilsätze.
- In F_2 sind $P_1^{'} ... P_m^{'}$ quantorenfreie Teilsätze
- Alle freien Variablen von F_1 und F_2 sind so umbenannt worden, dass sie untereinander verschieden sind.
- Es gibt einen allgemeinsten Unifikator (most-general unifier) q, der angewendet auf alle P_g^k das gleiche ergibt:
  $P_1 q = ... = P_n q = P_1^{'} q = ... = P_m^{'} q = Pq$

- AA-Resolution

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A_1[P_1 ... P_k]$	
$A_2[P_1^{'} ... P_l^{'}]$	

↓ ↓ ↓

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A_1[P_1 ... P_k]$	
$A_2[P_1^{'} ... P_l^{'}]$	
$A_1 q[\text{false}, ..., \text{false}] \text{ or } A_2 q[\text{true}, ..., \text{true}]$	

Abkürzende Notation: $[P_1 ... P_k] \leftrightarrow [\overline{P}]$; $[\text{false}, ..., \text{false}] \leftrightarrow [\overline{\text{false}}]$
$[P_1^{'} ... P_l^{'}] \leftrightarrow [\overline{P^{'}}]$; $[\text{true}, ..., \text{true}] \leftrightarrow [\overline{\text{true}}]$

- GG-Resolution

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G_1[\overline{P}]$
	$G_2[\overline{P^{'}}]$

↓ ↓ ↓

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G_1[\overline{P}]$
	$G_2[\overline{P^{'}}]$
	$G_1 q[\overline{\text{false}}] \text{ and } G_2 q[\overline{\text{true}}]$

- AG-Resolution

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A[\overline{P}]$	
	$G[\overline{P'}]$

↓ ↓ ↓

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
$A[\overline{P}]$	
	$G[\overline{P'}]$
	$not(A q[\overline{false}])\ and\ G q[\overline{true}]$

- GA-Resolution

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G[\overline{P}]$
$A[\overline{P'}]$	

↓ ↓ ↓

Annahmen (Assertions)	Ziele (Goals)
	$G[\overline{P}]$
$A[\overline{P'}]$	
	$G q[\overline{false}]\ and\ not(A q\ [\overline{true}])$

Regeln zur Äquivalenzbehandlung:

Die aussagenlogischen Regeln müssen auch ein Wenig angepasst werden.

Im Folgenden gelte,

- F_1 und F_2 sind geschlossene Sätze
- $\overline{P \equiv Q} \leftrightarrow P_1 \equiv Q_1, \ldots, P_n \equiv Q_n$ quantorenfreie Teilsätze in F_1
- $\overline{P'} \leftrightarrow P_1' \ldots P_m'$ quantorenfreie Teilsätze in F_2
- Alle freien Variablen von $F_1[\overline{P \equiv Q}]$ und $F_2 < \overline{P'} >$ sind so umbenannt worden, dass sie untereinander verschieden sind.
- es gibt einen allgemeinsten Unifikator (most-general unifier) q mit der Eigenschaft: $P_1 q = \ldots = P_n q = P_1' q = \ldots = P_m' q = Pq$ und
  $Q_1 q = \ldots = Q_n q = Qq$
- $Pq \neq Qq$

genau dann kann Äquivalenz behandelt werden!

- AA-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
$A_1[\overline{P \equiv Q}]$	
$A_2 < \overline{P'} >$	

Annahmen	Ziele
$A_1[\overline{P \equiv Q}]$	
$A_2 < \overline{P'} >$	
$A_1 q[\overline{false}]\ or\ A_2 q < \overline{Qq} >$	

- AA-Äquivalenz (recht-nach-links)

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < \overline{Q'} >$	

Annahmen	Ziele
$A_1[P \equiv Q]$	
$A_2 < \overline{Q'} >$	
$A_1 q[\overline{false}]\ or\ A_2 q < \overline{Pq} >$	

- GG-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
	$G_1[\overline{P \equiv Q}]$
	$G_2 < \overline{P'} >$

Annahmen	Ziele
	$G_1[\overline{P \equiv Q}]$
	$G_2 < \overline{P'} >$
	$G_1 q[\overline{false}]\ and\ G_2 q < \overline{Qq} >$

- GG-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
	$G_1[\overline{P \equiv Q}]$
	$G_2 < \overline{Q'} >$

Annahmen	Ziele
	$G_1[\overline{P \equiv Q}]$
	$G_2 < \overline{Q'} >$
	$G_1 q[\overline{false}]\ and\ G_2 q < \overline{Pq} >$

- AG-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
$A[\overline{P \equiv Q}]$	
	$G < \overline{P'} >$

Annahmen	Ziele
$A[\overline{P \equiv Q}]$	
	$G < \overline{P'} >$
	$not(Aq[\overline{false}])\ and\ Gq < \overline{Qq} >$

- AG-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
$A[\overline{P \equiv Q}]$	
	$G < \overline{Q'} >$

Annahmen	Ziele
$A[\overline{P \equiv Q}]$	
	$G < \overline{Q'} >$
	$not(Aq[\overline{false}])\ and\ Gq < \overline{Pq} >$

- GA-Äquivalenz (links-nach-rechts)

Annahmen	Ziele
	$G[\overline{P \equiv Q}]$
$A < \overline{P} >$	

Annahmen	Ziele
	$G[\overline{P \equiv Q}]$
$A < \overline{P} >$	
	$Gq[\overline{false}]$ and $not(Aq < \overline{Qq} >)$

- GA-Äquivalenz (rechts-nach-links)

Annahmen	Ziele
	$G[\overline{P \equiv Q}]$
$A < \overline{Q} >$	

Annahmen	Ziele
	$G[\overline{P \equiv Q}]$
$A < \overline{Q} >$	
	$Gq[\overline{false}]$ and $not(Aq < \overline{Pq} >)$

Skolemisierungregeln:

- Entfernen von Quantoren mit dualer Kraft
  (die Regeln stehen schon im Abschnitt Skolemisierung)

Hier an einem *Beispiel*:

Annahme	Ziel
	$(\exists y)\left[p\left(f\begin{pmatrix} if\ (\forall x)^{\forall\exists} q(x) \equiv r(a) \\ then\ \ g(y) \\ else\ \ h(y) \end{pmatrix}\right)\right]$

Bedingungsmanipulation liefert

	$(\exists y)\left[p\begin{pmatrix} if\ (\forall x)^{\forall\exists} q(x) \equiv r(a) \\ then\ \ f(g(y)) \\ else\ \ f(h(y)) \end{pmatrix}\right]$

erneute Bedingungsmanipulation liefert

	$(\exists y)\begin{bmatrix} if\ (\forall x)^{\forall\exists} q(x) \equiv r(a) \\ then\ \ p(f(g(y))) \\ else\ \ p(f(h(y))) \end{bmatrix}$

Bedingungselemination liefert

	$(\exists y)\begin{bmatrix} if\ \ ((\forall x)^{\forall\exists} q(x) \equiv r(a))\ then\ p(f(g(y))) \\ and \\ if\ \ not((\forall x)^{\forall\exists} q(x) \equiv r(a))\ then\ \ p(f(h(y))) \end{bmatrix}$

zweimalige Äquivalenzelemination liefert

	$(\exists y)\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} if \left[\begin{array}{l}(\forall x)^{\exists} q(x)\ and\ r(a) \\ or \\ (not (\forall x)^{\forall} q(x))\ and\ (not\ r(a))\end{array}\right] \\ then\ \ p(f(g(y)))\end{array}\right] \\ and \\ \left[\begin{array}{l} if \left[\begin{array}{l}(\forall x)^{\forall} q(x)\ and\ r(a) \\ or \\ (not (\forall x)^{\exists} q(x))\ and\ (not\ r(a))\end{array}\right] \\ then\ \ p(f(h(y)))\end{array}\right]\end{array}\right]$

Hier sind keine Quantoren mit dualer Kraft mehr

- Entfernen von Quantoren mit strikt universeller Kraft
  $(...z)^{\forall} P[z]$ wird durch $P[f(\overline{x},\overline{y})$ ersetzt wobei x freie Variablen in P sind und y durch vor dem zu entfernenden Quantor stehende Quantoren mit existenzieller Kraft gebunden sind. Die neue Funktion f ist die Skolemfunktion. Falls keine freien und auch keine gefundenen Variablen vorkommen, wird die Skolemkonstante a für die gebundene Variable z, deren Quantor entfernt wurde, eingefügt.

Am *Beispiel* 1:

Annahme	Ziel
A: $\begin{array}{l} r(x)\ or \\ (\forall y)^{\exists}\left[q(x,y)\ and \boxed{(\exists z)^{\forall}\ p(x,y,z)}\right]\end{array}$	

Entfernen des Quantors mit universeller Kraft, und Einführen der Skolemfunktion, da noch Quantoren mit existenzieller Kraft vorkommen:

Annahme	Ziel
A’: $\begin{array}{l} r(x)\ or \\ (\forall y)^{\exists}\left[q(x,y)\ and \boxed{p(x,y,f(x,y))}\right]\end{array}$	

Kein Quantor mit universeller Kraft mehr vorhanden

Am *Beispiel* 2:

Annahme	Ziel
	G: $(\forall y)^{\forall}\left[q(y)\ or \boxed{(\forall z)^{\forall}\ p(y,z)}\right]$

Entfernen des Quantors mit universeller Kraft, und Einführen der Skolemkonstante, da keine Quantoren mit existenzieller Kraft vorkommen:

Annahme	Ziel
	G’: $(\forall y)^{\forall}\left[q(y)\ or \boxed{p(y,a)}\right]$

noch einmal skolemisieren

Annahme	Ziel
	G’’: $\left[q(b)\ or\ p(b,a)\right]$

Kein Quantor mit universeller Kraft mehr vorhanden

- Entfernen von Quantoren mit strikt existenzieller Kraft
  $(...z)^{\exists} P[z]$ wird durch $[z]$ ersetzt, d.h Quantor wird weggelassen, wobei dieser Quantor nicht in der Umgebung von Quantoren mit universeller Kraft ist.

Am *Beispiel*:

Annahme	Ziel
	G: $(\exists y)^{\exists}\left[p(y_1)\, or \boxed{(\exists y_2)^{\exists}\, q(y_1, y_2)}\right]$

weglassen des Quantors

Annahme	Ziel
	G': $(\exists y)^{\exists}\left[p(y_1)\, or \boxed{q(y_1, y_2)}\right]$

Nochmalige Anwendung

Annahme	Ziel
	G'': $\left[p(y_1)\, or \boxed{q(y_1, y_2)}\right]$

fertig

Polaritätsstrategie im Tableaux-Verfahren

Bis auf leichte Änderungen ist auch die Polaritätsstrategie für Aussagenlogik anwendbar.
Sei q der größte Unifikator (most general-unifier) wie oben eingeführt.
Es besagt die Polaritätsstrategie für Prädikatenlogik:

1. Ersetze $\overline{Pq}$ in $F_1 q[\overline{Pq}]$ durch $\overline{false}$, wenn mindestens ein Vorkommen von $\overline{Pq}$ in $F_1 q[\overline{Pq}]$ negative Polarität besitzt.
2. Ersetze $\overline{Pq}$ in $F_2 q[\overline{Pq}]$ durch $\overline{true}$, wenn mindestens ein Vorkommen von $\overline{Pq}$ in $F_2 q[\overline{Pq}]$ positive Polarität besitzt.

Beachte dabei, dass es egal ist, in welchen Zeilen in der Tabelle F_1 und F_2 stehen. Auch die relative Position zueinander ist nicht von Bedeutung.
Möchte man mit den oben genannten Regeln Äquivalenzen behandeln, so besagt die Strategie:

In $Fq[\overline{Pq \equiv Qq}]$ wird $(\overline{Pq \equiv Qq})$ durch $\overline{false}$ ersetzt, wenn mindestens ein Vorkommen von $(\overline{Pq \equiv Qq})$ negative Polarität besitzt.

BEISPIEL: Mit Polaritätsstrategie ist zu zeigen: $\begin{array}{l} if\ (\exists y)(\forall x)\, q(x,y) \\ then\ (\forall x)(\exists y)\, q(x,y) \end{array}$

Annahmen	Ziele
	G1: $\begin{bmatrix} if\ \left[(\exists y)^{\forall}(\forall x)^{\exists} q(x,y)\right]^{-} \\ then\ \left[(\forall x)^{\forall}(\exists y)^{\exists} q(x,y)\right]^{+} \end{bmatrix}^{+}$

If-Trennung G1

A2: $(\exists y)^{\forall}(\forall x)^{\exists} q(x,y)$	
	G3: $(\forall x)^{\forall}(\exists y)^{\exists} q(x,y)$

Skolemisierung von A2, Für y Skolemkonstante a:

A4: $(\forall x)^{\exists} q(x,a)$	

Skolemisierung von G3, Für x Skolemkonstante b:

	G5: $(\exists y)^{\exists} q(b,y)$

Skolemisierung von A4

A6: $q(x,a)$	

Skolemisierung von G5

	G7: $q(b,y)$

Vereinheitliche A6 und G7 mit $q = \{x \leftarrow b, y \leftarrow a\}$

A6: $[q(b,a)]^{-}$	G7: $[q(b,a)]^{+}$

AG-Resolution A6 und G7

	G8: $not(false)\ and\ \ true \Rightarrow true$

Damit gilt der Satz.

BEISPIEL: Mit Polaritätsstrategie ist dieser äquivalenzhaltige Satz

zu zeigen: $$if \begin{bmatrix} (\forall x)[p(x) \equiv q(x)] \\ and \\ (\exists x)[q(x) \equiv r(x)] \end{bmatrix} then\ (\exists x)[p(x) \equiv r(x)]$$

Annahmen	Ziele
	G1: $\begin{array}{l} if \begin{bmatrix} (\forall x)[p(x) \equiv q(x)] \\ and \\ (\exists x)[q(x) \equiv r(x)] \end{bmatrix} \\ then\ (\exists x)[p(x) \equiv r(x)] \end{array}$

If-Trennung und And-Trennung G1

A2: $(\forall x)^{\exists}[p(x) \equiv q(x)]$	
A3: $(\exists x)^{\forall}[q(x) \equiv r(x)]$	
	G4: $(\exists x)^{\exists}[p(x) \equiv r(x)]$

Skolemisierung von A2::

A5: $[p(x) \equiv \boxed{q(x)}]^{-}$	

Skolemisierung von A3, Für x Skolemkonstante a:

A6: $[\boxed{q(a)} \equiv r(a)]$	

Skolemisierung von G4

	G7: $\boxed{[p(x) \equiv r(x)]^{+}}$

Vereinheitliche A5 und A6 mit $q = \{x \leftarrow a\}$ anschließend AA-Äquivalenz

A8: $\boxed{[p(a) \equiv r(a)]^{-}}$	

AG-Resolution A8 und G7

	G8: $not(false)\ and\ \ true \Rightarrow true$

Hier gilt der Satz auch ☺

D: Axiomatische Theorien

Nachdem die Tableaux-Verfahren für Aussagelogik und Prädikatenlogik eingeführt wurden, ist das Tableaux-Verfahren für axiomatische Theorien schnell erklärt.

1. Alle Definitionen aus den vorherigen Verfahren werden übernommen, auch für die Polarstrategie.
2. Alle Axiome der jeweiligen Theorie, werden so wie sie sind in die Spalte der Annahmen eingetragen.

BEISPIEL

Zeige das für die Theorie der Gruppen die „rechte Kürzung gilt“

Annahmen	Ziele
$(\forall x)^{\exists}[x \circ e = x]$ (rechte Identität, rechts neutrales Element e) $(\forall x)^{\exists}[x \circ x^{-1} = e]$ (rechts inverses Element) $(\forall x,y,z)^{\exists}[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$ (Assoziativität) $(\forall x)^{\exists}[x = x]$ (Reflexivität)	
	G1: $(\forall x, y, z)^{\forall}\begin{bmatrix} \textit{if} \;\; x \circ z = y \circ z \\ \textit{then} \; x = y \end{bmatrix}$

Skolemisierung liefert:

$[x \circ e = x]$	
$[x \circ x^{-1} = e]$	
$[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$	
	G2: $\textit{if} \;\; a \circ c = b \circ c$ $\textit{then} \; a = b$

If-Trennung:

A3: $[\boxed{a \circ c} = b \circ c]^{-}$	
	G4: $\boxed{a} = b$

Ausnutzung der Gleichheit beim Axiom „rechte Identität“ und Anwendung von $q = \{x \leftarrow a\}$ ergibt sich aus G4:

	G5: $a \circ e = \boxed{b}$

Erneute Ausnutzung der Gleichheit beim Axiom „rechte Identität“ und Anwendung von $q = \{x \leftarrow b\}$ ergibt sich aus G5:

	G6: $a \circ \boxed{e} = b \circ e$

Ausnutzung der Gleichheit beim Axiom „rechts inverses Element“ angewendet auf G6:

	G7: $a \circ (x \circ x^{-1}) = b \circ \boxed{e}$

Umbenennung von Variablen:

$(x_1 \circ x_1^{-1}) = \boxed{e}$ {Aus Axiom „rechts inverses E“}	
	G7’: $a \circ (x_2 \circ x_2^{-1}) = b \circ \boxed{e}$

Nun:

	G8: $\boxed{a \circ (x_2 \circ x_2^{-1})} = \boxed{b \circ (x_1 \circ x_1^{-1})}$

Mit dem Axiom der Assoziativität und $q=\{x\leftarrow a, y\leftarrow x_2, z\leftarrow x_2^{-1}\}$:

	G9: $(a\circ x_2)\circ x_2^{-1}=(b\circ x_1)\circ x_1^{-1}$

Nutze Gleichheitsregel aus: A3, G9 mit $q=\{x_2\leftarrow c\}$ und ersetzte $a\circ x_2$ mit $b\circ c$ in G9:

	G10: $\left[(b\circ c)\circ c^{-1}=(b\circ x_1)\circ x_1^{-1}\right]^{+}$

Per Resolutionsschluss mit $q=\{x_1\leftarrow c, x\leftarrow (b\circ c)\circ c^{-1}\}$ angewandt auf die Skolemisierung des Reflexitvitätsaxioms und G10 erhält man:

	G10: *true*

Hier ließ sich die Gültigkeit auch ableiten.

5) Ausblick: Axiomatische Theorien mit Induktion

Die wichtigsten axiomatische Theorien werden durch Axiome definiert, welche das Prinzip der mathematischen Induktion benutzen.

Zum Beispiel:
Die natürlichen Zahlen werden durch die Peano-Axiome definiert.
P1: 0 ist eine natürliche Zahl
P2: Jede natürliche Zahl n besitzt einen Nachfolger n_+.
P3: Es gibt keine natürliche Zahl n mit $n_+=0$
P4: Gilt für m und n die Beziehung $m_+=n_+$, dann ist $m=n$.
P5: Eine Aussage, die für 0 und auch für jeden Nachfolger n_+ jeder natürlichen Zahl, für die sie richtig ist, gilt, ist richtig für alle natürlichen Zahlen.

Die Peano-Axiome lassen sich mit
- der Konstenten 0 [Interpretation: Null]
- dem unären Funktionssymbol x_+ [Interpretation: Nachfolger]
- dem unären Prädikatensymbol $integer(x)$ [Interpretation: x ist natürliche Zahl]

wie folgt darstellen:

$$P1:\ integer(0)$$

$$P2:\ (\forall\ integer\ \ x)[integer(x_+)]$$

$$P3:\ (\forall\ integer\ \ x)[not(x_+=0)]$$

$$P4:\ (\forall\ integer\ \ x,y)\begin{bmatrix} if\ \ x_+=y_+ \\ then\ \ x=y\end{bmatrix}$$

$$P5:(\forall\ \ F[x])\begin{bmatrix} if \begin{bmatrix} F[0]\ \ and \\ (\forall\ \ integer\ \ z)\begin{bmatrix} if\ \ F[z] \\ then\ \ F[z_+]\end{bmatrix}\end{bmatrix} \\ then\ \ (\forall\ \ integer\ \ x)\left[F[x]\right]\end{bmatrix}$$

6) Zum Schluss: Fragen aus der Philosophie der Mathematik

1. Die ontologische Frage: Worauf referieren mathematische Ausdrücke, d.h. wovon handelt eigentlich Mathematik?
   Oder mit anderen Worten:
   Falls eine mathematische Aussage wahr ist, was macht sie wahr?
2. Die erkenntnistheoretische Frage: Wie können wir unsere Überzeugung, dass eine mathematische Theorie wahr ist, rechtfertigen (begründen)?
   Inwiefern ist es rational, eine bestimmte mathematische Überzeugung zu haben?

Literaturhinweise:

- **Immanuel Kant (1724-1804):** „Kritik der reinen Vernunft“ (1781/1787)
- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):**
  „Elemente des Kalküls [Elementa calculi]“, (1679)
  „Zur Characteristica“, (nach 1690)

7) Quellenverzeichnis

- Karl Vorländer: „Geschichte der Philosophie, Band 4, Philosophie der Neuzeit“; Rowohlt Taschenbuchverlag Band 261/62, München 1966
- Rechenberg,Pomberger: „Informatik-Handbuch“ 2.Auflage; Hanser Verlag, München 1999 [ISBN 3-446-19601-3]
- Z.Manna,R.Waldinger: „the deductive Foundations of computer programming , a one-Volume Version of THE LOGICAL BASIS FOR COMPUTER PROGRAMMING“; Addison-Wesley 1993 [ISBN 0-201-54886-0]
- http://www.ifi.unizh.ch/groups/ailab/teaching/NAISemi01/Presentations/Philosophie_Mathematik.htm
- http://www.michael-giesecke.de/theorie/dokumente/01_objektbereich/fliesstext/01_axiomatische_grundlegung.htm [→ Popper, „Logik der Forschung“ Tübingen 1973, 5. Aufl., S. 41.]
- Peter Sloterdijk (Hsg): „Leibniz, Ausgewählt und vorgestellt von Thomas Leinkauf“ in der Reihe „Philosophie Jetzt!“; Diederichs, München 1996 [ISBN 3-424-01280-7]