Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik

SS 2009
WS 2009/10
SS 2010

Kurzskript
[Draft / Unvollständig]

Highlights aus Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)

Robert Hartmann *

6. Oktober 2010

Zur Vorbereitung der (Wiederholungs-)Klausur
bei Herrn Prof. Peter Becker

*Dipl. Inf. Robert Hartmann
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg, FB Informatik
Standort: Sankt Augustin, Raum: C184
http://www2.inf.h-brs.de/~rhartm2m/
Robert.Hartmann@h-brs.de

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Programmierung

Die Lineare Programmierung oder Lineare Optimierung ist eines der Hauptverfahren des Operations Research und beschäftigt sich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen über einer Menge, die durch lineare Gleichungen und Ungleichungen eingeschränkt ist. Der Begriff „Programmierung“ ist eher im Sinne von „Planung“ zu verstehen als im Sinne der Erstellung eines Computerprogramms. Er wurde schon Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig, einem der Begründer der Linearen Optimierung, geprägt, bevor Computer zur Lösung linearer Optimierungsprobleme eingesetzt wurden.

Definition 1.1. (Lineares Optimierungs-Problem (LP)): Eine *lineare Funktion* f aus dem $\mathbb{R}^p$ soll optimiert, d.h. minimiert oder maximiert, werden:

$$\mathbf{opt}\{f(x)\}$$

- Dabei sei der mathematische Funktionsoperator **opt** $\in \{\min, \max\}$.
- Die lineare Funktion über x wird als Polynom vom Grad p definiert: $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$.
  - Es heiße $c \in \mathbb{R}^p$ der *Koeffizientenvektor*.
  - Es heiße $x \in \mathbb{R}^p$ der *Lösungsvektor*.
  - Es gilt: $f(x) = c^{\mathrm{T}}x = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i x_i = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_px_p$, mit $c_i, x_i \in \mathbb{R} (i \in \mathbb{N})$

An die Kompontenten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des Lösungsvektors werden häufig sogenannte *Vorzeichenbedingungen* gestellt. Vorzeichenbedingungen stellen Anforderungen an den Wertebereich der x_i. Es gibt nur einige verschiedene Vorzeichenbedingungen der Form:

- $x_j \in \mathbb{R}$: keine Werteinschränkung für diese Komponente
- $x_j \leq 0$: **positive Werte** als Lösung sind **nicht** erlaubt
- $x_j \geq 0$: **negative Werte** als Lösung sind **nicht** erlaubt

O.B.d.A. gibt es stets $n \in \mathbb{N}$ *Nebenbedingungen*, die bei der Lösung eines LPs zuberücksichtigen sind. Jede Nebenbedingung erhalte einen eindeutigen Namen $N_i(x)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.
Nebenbedingungen können folgende Form besitzen:

- *lineare Ungleichungen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x \leq b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$
- *lineare Funktionen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x = b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$
- *lineare Ungleichungen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x \geq b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$

Lösbarkeit von LPs Für jedes LP gilt genau eine der vier Aussagen:

1. Das LP besitzt keine zulässigen Lösungen. (z. B. $\max\{x \mid x \leq 1,\ x \geq 2\ \}$).
2. Das LP ist unbeschränkt, d. h. es gibt Lösungen mit beliebig hohem Zielfunktionswert (z. B. $\max\{x \mid x \geq 0\}$).
3. Das LP hat unendlich viele Optimallösungen.
4. Das LP hat genau genau eine Optimallösung.

1.1 Graphische, geometrische Lösung

Definition 1.2. (Simplex): Ein p-dimensionales Simplex ist eine geschlossene oder beschränkte p-dimensionale geometrische Figur mit mindestens $p+1$ Eckpunkten.
Was bei der graphischen, geometrischen Lösung zu tun ist ...
Im p-dimensionalen Fall wird zunächst das geometrische Objekt $\mathcal{OPT}$, das durch die zu optimierende lineare Funktion beschrieben ist, bestimmt (gezeichnet / dargestellt / festgehalten). Schließlich wollen wir am Ende das Optimum auch markieren.

- Im 2-D Fall ist $\mathcal{OPT}$ einfach eine mit Stift und Lineal zeichenbare EUKLIDische Gerade, die der Geradengleichung $f(x)$ gehorcht.
- Im 3-D Fall ist $\mathcal{OPT}$ die durch $f(x)$ beschriebene Ebene, die im 3-D Raum eingebettet ist; auch die Ebene lässt sich „einfach“ in ein Koordinatensystem eintragen.

Die Vorzeichenbedingungen zu beachten, bedeutet nichts weiter als die Koordinatenachsen zu beschneiden. Dadurch wird der Definitions- und der Wertebereich der zu optimierenden Funktion $f(x)$ und der Nebenbedingungen $N_i(x)$ eingegrenzt.

Im p-dimensionalen Fall werden nun die Nebenbedingungen in geometrische Objekte transformiert (bei $\geq$, $\leq$ wird aber nur der Grenzfall $=$ zur Bestimmung des Objektes angenommen)

- Im 2-D Fall wird jede Nebenbedingung als eine Gerade aufgefasst.
- Im $3D$-Fall werden Nebenbedingungen als Ebenen aufgefasst.

Die geometrischen Objekte der Nebenbedingungen müssen die Vorzeichenbedingungen erfüllen.
Bei der Beschneidung und Eingrenzung des $\mathbb{R}^p$ durch Vorzeichen- und Nebenbedingungen kann es vorkommen:

- dass ein p-dimensionales Simplex übrig bleibt, so ist das LP lösbar.[1]

[1] Ergibt sich durch die Beschneidungen ein p-dimensionales Simplex – also ein p-dimensionale geometrische Figur mit mindestens $p+1$ Eckpunkten – , so gibt es eine endliche Anzahl von zulässigen Lösungen im Inneren und dem Rand des Simplexes.

Kandidaten für die optimalen Lösung sind in den Ecken des Simplexes zu suchen.

Es verbleibt nun die Koordinaten der Eckpunkte des Simplex in $f(x)$ einzusetzten und das x als beste Lösung zu ermitteln, welches das beste Ergebnis liefert.

- dass ein unbeschränkter Bereich des $\mathbb{R}^p$ übrig bleibt, d.h. es existiert kein Simplex, dann ist das LP unbeschränkt

- dass keine Punkte mehr übrig bleiben, dann ist das LP nicht lösbar

Algorithmus : zur graphischen/geometrischen Lösung
Eingabe : die zu optimierende Funktion $f(x)$, Vorzeichenbedingungen, Nebenbedingungen
Ausgabe : Lösung des Optimierungsproblems

$S \leftarrow \emptyset$ `// Menge` S `wird als leere Menge initialisiert`
$B \leftarrow$ Vorzeichenbedingungen $\cup$ Nebenbedingungen `// Menge` B `enthält alle Bedingungen.`
foreach $B \ni b_i, b_j \in B; i \neq j$ **do** Bestimme die jeweiligen Schnittpunkte s aller Nebenbedingungen und Vorzeichenbedingungen untereinander. Sammele alle Schnittpunkte in einer Menge S
    $s \leftarrow b_i \cap b_j$
    $S \leftarrow S \cup s$
foreach $s \in S$ **do** Teste für alle Elemente $s \in S$, ob s sämtliche Bedingungen erfüllen. Wenn s mindestens eine Bedingung nicht erfüllt, entferne s aus S.
    if not `checkConstraints(`s, B`)`
    `/* Hinweis: checkConstraints(`s, B`) liefert` **`true`** `genau dann, wenn` s `alle Bedingungen in` B `erfüllt, sonst liefert es` **`false`**`. */`
    then
        $S \leftarrow S \setminus s$
`/* Hinweis: Die verbleibenden Elemente in` S `sind Kandidaten für die optimale Lösung. */`
switch S **do**
    case $S = \emptyset$, $|S| = 0$
        so gibt es keine Lösung
    case $S \neq \emptyset$, $|S| \geq \aleph_0$ *mit* $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
        `// die Mächtigkeit der Menge` S `ist` $|S| \geq \aleph_0$ mit $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
        so gibt es („aufzählbar“ oder „überaufzählbar“) unendlich viele Lösungen.
    case $S \neq \emptyset$, $|S| = n \in \mathbb{N}$
        `// Die Menge` S `enthält abzählbar viele Elemente`
        so gibt es genau n Kandidaten für die optimale Lösung.
        foreach $s \in S$ **do** Finde das optimalen $s \in S$
            setze s in die zu optimierende Funktion $f(x)$ für x ein, und betrachte das Ergebnis von $f(s)$
            Dasjenige s, welches das optimale Ergebnis liefert, ist als optimale Lösung des Optimierungsproblems gefunden.
            return s

1.2 Simplex-Tableau Verfahren

Das Verfahren mit dem Simplex-Tableau zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen hat Ähnlichkeiten mit dem GAUSSschen Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.
In beiden Verfahren

- hat Unbekannte, die man berechnen will
- ist eine gültige Operation: „Eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile dazu addieren."

Simplex-Tableau Verfahren was als Vorarbeit zu tun ist ...

Man formuliere das Optimierungsproblem in geeigneter Weise als Maximierungsproblem. Das ist ziemlich einfach, denn entweder handelt es sich beim gegebenen Problem schon um ein Maximierungsproblem oder – und nur dann ist etwas zu tun – es handelt sich um ein Minimierungsproblem.
Ein Minimierungsproblem wird in ein Maximierungsproblem umgewandelt, indem die Nebenbedingungen und Vorzeichenbedingungen beibehalten werden aber die Zielfunktion mit -1 multipliziert wird: z.B. $\min\{2x_1 + 3x_2 + x_3\} \;\Leftrightarrow\; \max\{-[2x_1 + 3x_2 + x_3]\}$

Gibt es Variablen x_j, die die Nichtnegativitätsbedingung **nicht** erfüllen, d.h. $x_j < 0$ wäre nach Vorzeichenbedingung zulässig, müsste man in der Zielfunktion und den Nebenbedingungen jedes Auftreten von x_j durch $(x'_j - x''_j)$ ersetzen, wobei nun die Vorzeichenbedingung von x_j durch die zwei Vorzeichenbedingungen $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ zu ersetzen ist.

Standard-Maximierungs-Problem in kanonischer Form

Definition 1.3. (kanonische Form): Ein LP ist in *kanonischer Form* genau dann, wenn alle Nebenbedingungen Ungleichungen der Form $\sum a_i x_i \leq b$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ sind.

Definition 1.4. (Standard-Maximierungs-Problem): Ein LP ist ein *Standard-Maximierungs-Problem* genau dann, wenn es ein Maximierungsproblem ist und der Punkt 0, also der Ursprung eines karthesischen Koordinatensystems, alle Bedingungen erfüllt und somit eine Ecke des Simplex ist.

Stelle sicher, dass das Maximierungsproblem ein Standard-Maximierungs-Problem ist, und bringe es in kanonische Form.

Definition 1.5. (Schlupfvariable): Eine *Schlupfvariable* ist eine Variable, die zur linken Seite der Ungleichung in geeigneter Weise additiv hinzugefügt aus der Ungleichung eine Gleichung macht: z.B. Durch Hinzufügen der Schlupfvariable s verändert sich die Ungleichung der Nebenbedingung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 < b$ zur Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + s = b$

Als letzter Schritt der Vorarbeit muss nun die Anzahl der notwendigen Schlupfvariablen bestimmt werden: Die Anzahl der Schlupfvariablen entspricht der Anzahl der Nebenbedingungen. Da in der Vorlesung die Optimierungsprobleme auf die kanonischer Form beschränkt wurden, gilt für die Koeffizienten der Schlupfvariablen die Nichtnegativitätsbedingung.

Algorithmus : Simplex-Tableau Verfahren

Eingabe : Standard-Maximierungs-Problem in kanonischer Form
Ausgabe : Lösung des Optimierungsproblems

if not *Test: „Formulierung in kanonischer Form“*
then
    `// Test ist nicht erfolgreich gewesen`
    `abort(`*keine kanonische Form*`)`
if not *Test: „Standard-Maximierungs-Problem“*
then
    `// Test ist nicht erfolgreich gewesen`
    `abort(`*keine Standard-Maximierungs-Problem*`)`
Bestimmung der notwendigen Schlupfvariablen s_i
Aufstellung des Simplex-Algorithmus-Tableaus
while not *Optimalitätstest: „Alle x_i der ZFZ sind 0 und alle s_i der ZFZ sind ≥ 0“*
do
    Finde Pivotspalte `/* Pivotspalte wird die jenige Spalte mit kleinstem ZFZ-Eintrag */`
    if *Lösbarkeitstest: „Falls alle Einträge der Pivotspalte ≤ 0 sind, ist das Problem unbeschränkt.“* **then**
        `abort(`*Problem unbeschränkt*`)`
    Finde Pivotzeile `/* Der` **`kleinste nicht negative Quotient`** `aus Konstante` b `und den Koeffizienten in der Pivotspalte` x_i`, ohne die ZFZ, bestimmt die Pivotzeile. */`
    Pivotschritt `/* Bringe durch Äquivalenzumformungen das Pivotelement auf den Wert 1 und alle anderen Einträge der Pivotspalte auf den Wert 0; d.h:`
        `(1.) Dividiere Pivotzeile durch Pivotelement`
        `(2.) Subtrahiere oder addiere jede andere Zeile mit einem geeigneten Vielfachen der Pivotzeile. */`
    Basistausch `/* Ersetze die Zeilenbeschriftung der noch aktuellen Pivotzeile durch die Spaltenbeschriftung der noch aktuellen Pivotspalte. Werteinträge bleiben fest. */`
return Optimale Werte der x_i `/* Die optimalen Werte der` x_i `stehen in der Spalte` b `in den jeweiligen mit` x_i `beschrifteten Zeilen. */`

Die Anzahl der Schleifendurchläufe (beim Simplex-Tableau Verfahren für Standard-Maximierungs-Probleme) ist identisch mit der Anzahl der Unbekannten x_i.

Im Folgenden wird beispielhaft ein Maximierungsproblem sowohl auf graphischem/geometrischem Weg als auch mit dem Simplex-Tableau Verfahren gelöst.

Aufgabe

Gegeben sind:[2]
Punkte

$$A = \left(0; -\frac{1}{2}\right) \quad B = (2;1) \quad C = (2;0) \quad D = \left(2\frac{1}{5}; 2\right) \quad E = (0;3)$$

Geraden:

$$\begin{aligned} g &= \{A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\} \\ h &= \{C + u(D - C), u \in \mathbb{R}\} \\ i &= \{E + v(D - E), v \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Maximiere

$$z = z(x, y) = 3x - 2y$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} N_1 &:= z(x, y) \geq g(x) + 3x - 3y \\ N_2 &:= z(x, y) \geq h(x) + 3(x - y) \\ N_3 &:= z(x, y) \leq i(x) - 3(y - x), \end{aligned}$$

wobei stets gelten soll $x \geq 0$, $y \geq 0$

a) durch analyische Geometrie mit graphischer Unterstützung

b) durch Anwenden des Simplex-Tableau Verfahrens

Lösung

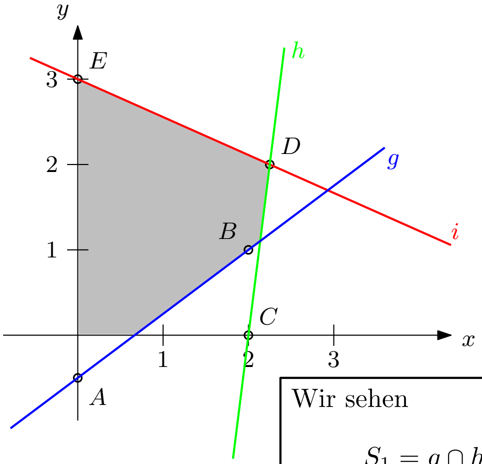
Die Nebenbedingungen sind Bedingungen an die zu optimierende Funktion, wir benötigen aber Bedingungen an die Parameter x und y der Form „Parameter **op** Ausdruck“, wobei **op** $\in \{\leq; =; \geq; >; <\}$ sein kann.
Wir formulieren daher die Nebenbedingungen um:

$N_1 : z(x, y) \geq g(x) + 3x - 3y$	$N_2 : z(x, y) \geq h(x) + 3(x - y)$	$N_3 : z(x, y) \leq i(x) - 3(y - x)$
$3x - 2y \geq g(x) + 3x - 3y$	$3x - 2y \geq h(x) + 3x - 3y$	$3x - 2y \leq i(x) - 3y + 3x$
$3y - 2y \geq g(x)$	$y \geq h(x)$	$y \leq i(x)$
$y \geq g(x)$		

a) geometrische / graphische Lösung

Beim Schnitt der Nebenbedingungsgrenzen mit den Vorzeichenbedingungen und beim Schnitt der Nebenbedingungsgrenzen untereinander entstehen zwei Schnittpunkte S_1 und S_2. Der Schnitt der Vorzeichenbedingungen liefert den Punkt $0 = (0; 0)$.

[2] An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Kollegin Dipl. Inf. Katharina Stollenwerk bedanken, die in Ihrer ersten Arbeitswoche meine handschriftliche Aufzeichnung von Aufgabe und Lösung, die ich den Tutoriumsteilnehmern in Moodle bereitgestellt hatte, in kurzer Zeit in LaTeXbzw. die Graphiken mit IPE gesetzt hat.



$A = (0, -\frac{1}{2})$ $\quad g = \overline{AB}$

$B = (2, 1)$ $\quad h = \overline{CD}$

$C = (2, 0)$ $\quad i = \overline{ED}$

$D = (2\frac{1}{5}, 2)$

$E = (0, 3)$ $\quad N_1 := y \geq g(x)$

$N_2 := y \geq h(x)$

$N_3 := y \leq i(x)$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

Wir sehen

$$S_1 = g \cap h$$

$S_2 = g \cap \{(1; 0) \cdot K, K \in \mathbb{R}\}$

Das oben graue Gebiet, bzw. der graue Bereich oder Ausschnitt der $x-y$-Ebene, wird durch das Simplex $\mathfrak{S} = (0; S_2; S_1, D; E)$ begrenzt.
Die Lösungskandidaten des LPs $\max\{3x - 2y\}$ liegen im Inneren von $\mathfrak{S}$. Kandidaten der optimalen Lösungen sind in den Eckpunkten des Simplexes $\mathfrak{S}$ zu finden.
Wir müssen nun testen, ob wir das richtige Simplex gefunden haben, nämlich dann, wenn alle Eckpunkte des Simplexes alle Bedingungen erfüllen. Dazu brauchen wir die Geradengleichungen von $g(x)$, $h(x)$, $i(x)$ sowie die Koordinaten von S_1 und S_2.

Bestimmung der Geradengleichungen (nach Verfahren der linearen Algebra und analytischer Geometrie

Punkte A und B und Gerade g Es war

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g = \{A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + t(B - A), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Wir fassen die Punktmenge der Geraden als Lösungsmenge eines LGS mit 2 GL und 1 Unbekannten auf:

$$x = 2 \cdot t$$
$$y = -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot t$$

Ziel unserer Umformungen ist es, die Werte für y in Abhängigkeit von den Werten von x zu bringen, und dabei gleichzeitig die Variable t „loszuwerden".

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}x \\ y &= -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot t \end{aligned}$$

setze $t = \frac{1}{2}x$ in y ein:

$$y = -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

Damit gilt genau für alle Punkte von g die Geradengleichung $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
NB: Punkte von g sind Lösungen der Gleichung $\frac{3}{4}x - y - \frac{1}{2} = 0$.

Punkte C und D und Gerade h Es war

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$h = \{C + u(D - C), u \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} h &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C + u(D - C), u \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\left(\begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), u \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0,2 \\ 2 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Auch hier fassen wir die Punktmenge der Geraden als Lösungsmenge eines LGS mit 2 GL und 1 Unbekannten auf. Nach den folgenden Umformungs- und Einsetzungsschritten können wir die y-Werte in Abhängigkeit von x ausdrücken und haben die Unbekannte u eleminiert

$$\begin{aligned} x &= 2 + u \cdot 0,2 \quad \Leftrightarrow u = \frac{x-2}{0,2} \\ y &= 0 + u \cdot 2 \\ &\overset{**}{=} 0 + \frac{x-2}{0,2} \cdot 2 \\ &= \frac{x-2}{\frac{2}{10}} \cdot 2 = \frac{10(x-2)}{2} \cdot 2 = 10x - 20 \end{aligned}$$

**Einsetzen von u in y

Damit gilt für alle Punkte von h die Geradengleichung $h(x) = 10x - 20$, gleichwertig lösen sie die Gleichung $10x - y - 20 = 0$.

Punkte D und E und Gerade i Es war

$$C = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$i = \{E + v(D - W), v \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} i &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E + v(D - E), v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \left(\begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right), v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2,2 \\ -1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Bearbeiten wir nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 0 + v \cdot 2,2 \quad \Leftrightarrow v = \frac{x}{2,2} \\ y &= 3 + v \cdot (-1) \\ &\overset{**}{=} 3 + \frac{x}{2,2} \cdot (-1) \\ &= 3 - \frac{x}{\frac{22}{10}} = 3 - \frac{10}{22}x = -\frac{5}{11}x + 3 \\ &\text{**Einsetzen von } v \text{ in } y \end{aligned}$$

und wir erhalten $i(x) = -\frac{5}{11}x + 3$ als Geradengleichung, was äquivalent zu $-\frac{5}{11}x - y + 3 = 0$ ist.

Bestimmung der Koordinaten von S_1 und S_2

$$S_1 = g \cap h$$

Wir setzen die vektorielle Parameterform von g in die x-y-Gleichungsform von h ein und lösen nach der einen Unbekannten auf. Dies wiederum setzen wir in g als Parameterwert ein und erhalten die gesuchten Koordinaten von S_1.

$$\begin{aligned} g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + t(B - A), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \\ h &: \quad 10x - y - 20 = 0 \end{aligned}$$

$$10\cdot(0+t\cdot 2)-\left(-\frac{1}{2}+t\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\right)-20=0 \qquad \leftarrow \text{nach } t \text{ auflösen}$$
$$20t+\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}t-20=0$$
$$(20-1\frac{1}{2})t+\frac{1}{2}-20=0$$
$$18\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=20$$
$$18\frac{1}{2}t=19\frac{1}{2}$$
$$t=\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}=\frac{\frac{39}{2}}{\frac{37}{2}}=\frac{39}{37}=1\frac{2}{37}$$
$$S_1=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+1\frac{2}{37}\begin{pmatrix}2\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\frac{2}{37}\cdot 2\\-\frac{1}{2}+1\frac{2}{37}\cdot 1\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{4}{37}\\1\frac{3}{37}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2,108\dots\\1,081\dots\end{pmatrix}$$
$$S_2=g\cap\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot K, K\in\mathbb{R}\right\}}_{\text{Parameterform der } x\text{-Achse}}$$

Wir setzen die Parameterform der x-Achse in die x-y- Gleichungsform von g ein, und wir lösen dann nach K auf. Mit K können wir S_2 angeben.

$$g: \qquad \frac{3}{4}x-y-\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{3}{4}\cdot(1\cdot K)-(0)-\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{3}{4}\cdot K-\frac{1}{2}=0$$
$$K=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$$

$$S_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$$

Test, ob das Simplex $\mathfrak{S}=(0;S_2;S_1;D;E)$ alle Bedingungen erfüllt

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}, S_1=\begin{pmatrix}2\frac{4}{37}\\1\frac{3}{37}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2,2\\2\end{pmatrix}\ E=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

Bedingung	$0=(0;0)$	$S_2=(\frac{2}{3};0)$
$x\geq 0$	$0\geq 0$	$\frac{2}{3}\geq 0$
$y\geq 0$	$0\geq 0$	$0\geq 0$
$y\geq g(x)$	$0\geq g(0)=\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$	$0\geq g(\frac{2}{3})=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$
$y\geq h(x)$	$0\geq h(0)=10\cdot 0-20=-20$	$0\geq h(\frac{2}{3})=10\cdot\frac{2}{3}-20=6\frac{2}{3}-20=-13\frac{1}{3}$
$y\leq i(x)$	$0\leq i(0)=-\frac{5}{11}\cdot 0+3=3$	$0\leq i(\frac{2}{3})=-\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{3}+3=-\frac{10}{33}+3=2\frac{23}{33}$

Bedingung	$S_1 = (2\frac{4}{37}; 1\frac{3}{37})$
$x \geq 0$	$2\frac{4}{37} \geq 0$
$y \geq 0$	$1\frac{3}{37} \geq 0$
$y \geq g(x)$	$1\frac{3}{37} \geq g(\frac{2}{3}) = \frac{3}{4} \cdot 2\frac{4}{37} - \frac{1}{2} = 1\frac{43}{74} - \frac{1}{2} = 1\frac{3}{37}$
$y \geq h(x)$	$1\frac{3}{37} \geq h(2\frac{4}{37}) = 10 \cdot 2\frac{4}{37} - 20 = 21\frac{3}{37} - 20 = 1\frac{3}{37}$
$y \leq i(x)$	$1\frac{3}{37} \leq i(1\frac{3}{37}) = -\frac{5}{11} \cdot 2\frac{4}{37} + 3 = -\frac{390}{407} + 3 = 2\frac{17}{407}$

Bedingung	$D = (2,2;2)$	$E = (0,3)$
$x \geq 0$	$2,2 \geq 0$	$0 \geq 0$
$y \geq 0$	$2 \geq 0$	$3 \geq 0$
$y \geq g(x)$	$2 \geq g(2,2) = \frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{33}{20} - \frac{1}{2} = \frac{33-10}{20} = 1\frac{3}{20}$	$3 \geq g(0) = -\frac{1}{2} = 0$
$y \geq h(x)$	$2 \geq h(2,2) = 10 \cdot 2\frac{1}{5} - 20 = 22 - 20 = 2$	$3 \geq h(0) = -20$
$y \leq i(x)$	$2 \leq i(2,2) = -\frac{5}{11} \cdot 2\frac{1}{5} + 3 = -1 + 3 = 2$	$3 \leq i(0) = 3$

$\Rightarrow$ Simplex erfüllt alle Bedingungen.

Punkt	$z(x,y) = 3x - 2y$
$0 = (0;0)$	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$
$S_2 = (\frac{2}{3}; 0)$	$3 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot 0 = 2$
$S_1 = (2\frac{4}{37}; 1\frac{3}{37})$	$3 \cdot (2\frac{4}{37}) - 2 \cdot (1\frac{3}{37}) = 6\frac{12}{37} - 2\frac{6}{37} = 4\frac{6}{37}$
$D = (2,2;2)$	$3 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2 = 6,6 - 4 = 2,6$
$E = (0;3)$	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$

Man erkennt, dass S_1 in $z(x,y)$ eingesetzt den größtern Wert liefert. Also ist $x = 2\frac{4}{37}$, $y = 1\frac{3}{37}$ die optimale, d.h. maximale, Lösung mit einem Zielfunktionswert von $4\frac{6}{37}$.

b) Anwendung des Simplex-Tableau-Verfahrens

$$z = z(x,y) = 3x - 2y$$

$$\text{LP} : \max\{z\}; \qquad x \geq 0; y \geq 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} N_1 : y \geq g(x) \\ N_2 : y \geq h(x) \\ N_3 : y \leq i(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{mit Aufgabenteil a} \\ \text{ergibt sich}\end{array} \left\{\begin{array}{l} N_1 : y \geq \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2} \\ N_2 : y \geq 10x - 20 \\ N_3 : y \leq -\dfrac{5}{11}x + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{umstellen} \\ \text{zu}\end{array} \left\{\begin{array}{l} N_1 : \dfrac{3}{4}x - y \leq \dfrac{1}{2} \\ N_2 : 10x - y \leq 20 \\ N_3 : \dfrac{5}{11}x + y \leq 3 \end{array}\right.$$

Formulierung des Maximierungsproblems in gewohnter Art:

$$\max\{z(x)\} = \max\{3x_1 - 2x_2\},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ mit der Eingeschränkung $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$N_1 : \frac{3}{4}x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2}$$
$$N_2 : 10x_1 - x_2 \leq 20$$
$$N_3 : \frac{5}{11}x_1 + x_2 \leq 3$$

Hinweis: *Gäbe es eine Variable x_j, die die Nichtnegativitätsbedingung* ***nicht*** *erfüllt, d.h. $x_j < 0$ wäre zulässig, müsste man überall (d.h. in z und in den N_i) das x_j durch $(x'_j - x''_j)$ ersetzen, wobei nun $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ erfüllt wäre.*

Test: Formulierung in kanonischer Form Ja, die Formulierung ist in kanonischer Form, denn alle Nebenbedingungen sind Ungleichungen der Form

$$\sum a_i x_i \leq b \qquad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: *Die Lösung von nicht kanonischer Form ist außerhalb des Prüfungsstoffes.*

Test: Standard-Maximierungs-Problem Ein Standard-Maximierungsproblem liegt vor, wenn der Punkt 0 alle Bedingungen erfüllt, also eine Ecke des Simplex ist: Nur dann funktioniert das Verfahren aus der Vorlesung, sonst nämlich nicht.
Hinweis: *Der „2-Phasen-Simple-Algorithmus“, der helfen würde, wenn der Startpunkt keine gültige oder zulässige Basislösung liefert, liegt außerhalb des Prüfungs- und Vorlesungsstoffes.*

$$N_1 : \frac{3}{4} \cdot 0 - 0 \leq \frac{1}{2} \qquad N_2 : 10 \cdot 0 \leq 20 \qquad N_3 : \frac{5}{11} \cdot 0 + 0 \leq 3$$

die Vorzeichen sind auch erfüllt
⇒ Ein Standard-Maximierungsproblem in kanonischer Form liegt vor.

Bestimmung der Anzahl der notwendigen Schlupfvariablen: 3 Ungleichungen ⇒ 3 Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3

Aufstellung des Simplex-Algorithmus-Tableaus: **Hinweis:** *Bei jeder Ungleichung belegen wir genau* ***eine*** *Schlupfvariable mit dem Wert 1 (kanonische Form). Bei nicht kanonischer Form:*

$$\begin{aligned} s = 1 \text{ für } & \sum a_i x_i \leq b \\ s = -1 \text{ für } & \sum a_i x_i \geq b \\ s = 0 \text{ für } & \sum a_i x_i = b \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Hinweis: *Der Grund für die Invertierung der Koeffizientenvorzeichen in der Zielfunktionszeile ist, man optimiert $z = z(x) = \sum c_i x_i$, indem man die Gleichung $z - (\sum c_i x_i) = 0$ löst.*

Optimalitätstest Sind alle Koeffizienten in der ZFZ größer oder gleich Null? Nein, also müssen wir rechnen: Insbesondere die x_i müssen in der ZFZ auf Null gebracht werden. Die s_i müssen größer oder gleich Null sein.

Finde Pivotspalte: Pivotspalte wird diejenige Spalte mit kleinstem ZFZ-Eintrag (hier x_1).

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Lösbarkeitstest Falls alle Einträge der Pivotspalte kleiner oder gleich Null sind, ist das Problem unbeschränkt.

Finde Pivotzeile Der kleinste nicht negative Quotient aus Konstanten b und Koeffizienten von x_i in der Pivotspalte, ohne die der ZFZ, bestimmt die Pivotzeile.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Q	
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$	← kleinster Quotient
s_2	10	-1		1		20	$\frac{20}{10} = 2$	
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3	$\frac{3}{\frac{5}{11}} = 3\frac{11}{55} = \frac{33}{5} = 6,6$	
z	-3	2	0	0	0	0	/	

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Hinweis: *(Nicht kanonische Form) Wenn eine Zeile (außer z) keine Schulpfvariable enthält, d.h. die entsprechende Nebenbedingung ist eine Gleichung, dann wähle Zeile ohne Schlupfvariable als Pivotzeile und eine beliebige Spalte, in der diese Zeile ein Element ungleich Null enthält, als Pivotspalte. Führe einen Pivotschritt aus. Alle Zeilen (ohne z) mit $b < 0$ müssen nun mit -1 multipliziert werden.*
Das Pivotelement ist also $(x_1; s_1)$ mit dem Wert $\frac{3}{4}$.

Pivotschritt Bringe durch Äquivalenzumformungen das Pivotelement auf den Wert 1 und alle anderen Einträge der Pivotspalte auf 0:

- Dividiere die Pivotzeile durch Pivotelement
- Subtrahiere oder addiere jede andere Zeile von oder zu einem geeigneten Vielfachen der Pivotzeile

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Op
I	s_1	$\boxed{\frac{3}{4}}$	-1	1			$\frac{1}{2}$	$\cdot\frac{4}{3}$
II	s_2	10	-1		1		20	$-10\cdot\frac{4}{3}\cdot\mathrm{I}$
III	s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3	$-\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{3}\cdot\mathrm{I}$
IV	z	-3	2	0	0	0	0	$+3\cdot\frac{4}{3}\cdot\mathrm{I}$

rechnen

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\boxed{1}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$
s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$
z	0	-2	4	0	0	2

Basistausch Ersetze die Zeilenbeschriftung der noch aktuellen Pivotzeile durch die Spaltenbeschriftung der noch aktuellen Pivotspalte: Werteinträge bleiben fest. Hier s_1 gegen x_1.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\boxed{x_1}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$
s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$
z	0	-2	4	0	0	2

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Q	Op
	x_1	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2} = -0,5$	$+\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{37}\cdot\mathrm{II}\right)$
c)	s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{\frac{40}{3}}{\frac{37}{3}} \approx 1,081$	$\cdot\frac{3}{37}$
	s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$	$\frac{\frac{89}{33}}{\frac{53}{33}} = \frac{89}{53} \approx 1,679$	$-\left(\frac{53}{33}cdot\frac{3}{37}\cdot\mathrm{II}\right)$
	z	0	-2	4	0	0	2		$+\left(2\cdot\frac{3}{37}\cdot\mathrm{II}\right)$
			a)					b)	d)

a) Zielfunktionszeile ist noch nicht optimal: Daher neue Pivotspalte mit kleinstem z-Eintrag

b) Quotienten zur Bestimmung der Pivotzeile

c) Pivotelement ist gefunden

d) Operation zur Durchführung des Pivotschrittes

Nach dem Pivotschritt und sich anschließendem Basistausch erhält man

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	1	0	$-\frac{4}{37}$	$\frac{4}{37}$	0	$\frac{78}{37} = 2+\frac{4}{37} \approx 2,1081$
x_2	0	1	$-\frac{40}{37}$	$\frac{3}{37}$	0	$\frac{40}{37} = 1+\frac{3}{37} \approx 1,081$
s_3	0	0	$\frac{460}{407}$	$-\frac{53}{407}$	1	$\frac{34103}{1221} = 27+\frac{1136}{1221} \approx 27,93$
z	0	0	$\frac{68}{37}$	$\frac{6}{37}$	0	$\frac{154}{37} = 4+\frac{6}{37} \approx 4,162$

Die Zielfunktionszeile ist optimal, da alle $x_i = 0$ und alle $s_i \geq 0$ in der z-Zeile sind. Wir können nun ablesen, dass $x_1 = 2\frac{4}{37}$ und $x_2 = 1\frac{3}{37}$ die optimale Lösung liefert und dass $z(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$ den Zielfunktionswert $z = 4\frac{6}{37}$ besitzt.

Anmerkung: Vergleichen wir die Lösungen des graphischen / geometrischen Verfahrens mit den des Simplex-Tableau-Verfahren, erkennen wir, dass beide Verfahren dieselbe Lösung liefern.

2 Graphen

2.1 Grundlagen ungerichteter und gerichteter Graphen

Ein Graph ist ein Ding mit Ecken und Kanten.

Definition 2.1. (Graph, Ecke, Kante):
Es sei $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller *Ecken*, welche auch *Knoten* oder Englisch *vertices* genannt werden.
Es sei $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller *Kanten*, welche auch *Bögen* oder Englisch *edges* genannt werden.
Und es gibt eine Zuordnungsrelation γ zwischen V und E für die gilt:

$$\begin{aligned} \gamma : E &\to V_1 \cup V_2, \text{ wobei } V_1, V_2 \subseteq V \\ \gamma(e) &\mapsto \{v_i, v_j\}, \text{ mit } e \in E, v_i \in V_1, v_j \in V_2, \text{ wobei } i, j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Diese Relation ist eine totale Abbildung und heißt *Inzidenzabbildung* – auch Englisch *incidence relation*. Das Tripel $G = (V, E, \gamma)$[1] heißt *Graph*.

Definition 2.2. (adjazent): Es sei $e \in E$ eine Kante.
Zwei Knoten $a, b \in V$ heißen *adjazent* (engl. *adjacent*), genau dann wenn

$$\exists e \in E : \gamma(e) = \{a, b\}$$

Mit anderen Worten: Die Knoten a und b sind *benachbart*, genau dann wenn die Kante e sie verbindet.

Definition 2.3. (inzident): Der Knoten $a \in V$ und die Kante $e \in E$ *inzident* (engl. *incident*), genau dann wenn

$$a \in \gamma(e)$$

Mit anderen Worten: Der Knoten a liegt auf – oder an – der Kante e, bzw. die Kante e stößt an Knoten a an.

Bemerkung (verkürzte Graph-Definition)**.** Da für jede Kante $e \in E$ und ihre inzidierenden Knoten $a, b \in V$ stets gilt:

$$\gamma(e) = \{a, b\}$$

[1] Häufig wird in deutschsprachigen Veröffentlichungen der Graph mit $G = (E, K, \gamma)$ beschrieben. Dabei geht die Mengenbezeichnung E auf **E**cke und K auf **K**ante zurück.

können wir in der formalen Definition des Graphen $G = (V, E, \gamma)$ das γ als Menge über Elemente der Form $(e, \{a, b\})$, wobei $e \in E$ und $a, b \in V$ liegt, ansehen.

Weitergehend ist es möglich jede Kante statt mit ihrem Namen $e \in E$ durch die Menge der Knoten, die durch sie zueinander adjazent sind, zu beschreiben. Daher ist es möglich z.B. $\{a, b\} \in E$[2] zuschreiben, wenn es eine Kante gibt, die a mit b verbindet.
Mit anderen Worten: Die Menge der Kanten E läßt sich als Menge von Potenzmengen, die jeweils ein bis zwei Elementen aus V enthalten, auffassen. So kann man den Graphen definieren als
$G = (V, E)$ wobei die Kantenmenge E beschrieben ist als
$E \subseteq \left\{ e \;\middle|\; e \in \{ \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{a_i, b_j\}\} \in \mathcal{P}(V) \wedge a_i, b_j \in V \right\}$

Definition 2.4. (Schlinge): Sei $e \in E$ eine Kante und es gilt

$$\gamma(e) = \{a \mid a \in V \text{ ist ein Knoten}\}$$

dann heißt e eine *Schlinge* (engl. *loop*)

Definition 2.5. (Mehrfachkante, parallele Kante): Seien $e_i, e_j \in E$ (mit $i \neq j \wedge i, j \in \mathbb{N}_0$) zwei Kanten und es gilt

$$\gamma(e_i) = \{a, b \mid a, b \in V\} = \gamma(e_j)$$

dann heißen e_i und e_j *Mehrfachkanten* oder *parallele Kanten* (engl. *parallel edges*).

Definition 2.6. (Ordnung von G, Knotengrad, Maximalgrad von G, Minimalgrad von G): Ist G ein Graph mit E als Kantenmenge und V als Ecken-/Knotenmenge

- so heißt $\mathrm{ord}(G) = |V|$ die *Ordnung* von G.
- so heißt $\deg(a) = |\{e \mid a \in \gamma(e)\}| + |\{e \mid \{a\} = \gamma(e)\}|$ $(\forall a \in V, \forall e \in E)$ der *Knotengrad* oder *Eckengrad* von a; das ist also die Anzahl der mit dieser Ecke inzidierenden Kanten, wobei Schlingen doppelt gezählt werden.
- so heißt $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$ *Maximalgrad* von G.
- so heißt $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$ *Minimalgrad* von G.

Dabei sind $\mathrm{ord}(G), \deg(a), \Delta(G), \delta(G) \in \mathbb{N}_0$

[2] In verschiedenen Büchern wird eine (ungerichtete) Kante auch als $\{ab\} \in E$ notiert

Definition 2.7. (einfacher Graph, schlichter Graph, Multigraph, endlicher Graph, Nullgraph, vollständiger Graph, regulärer Graph):

$$
\begin{aligned}
&G \text{ heißt } \textit{einfacher} \text{ oder} \\
\textit{schlichter} \text{ Graph } &\leftrightarrow G \text{ hat keine Mehrfachkanten oder Schlingen.} \\
G \text{ heißt } \textit{Multigraph} &\leftrightarrow G \text{ besitzt Mehrfachkanten,} \\
&\quad \text{d.h. } E \text{ ist eine Multimenge.} \\
G \text{ heißt } \textit{endlich} &\leftrightarrow V, E \text{ sind endliche Mengen.} \\
G \text{ heißt } \textit{Nullgraph} &\leftrightarrow G \text{ hat keine Kanten, d.h. } E = \emptyset. \\
G \text{ heißt } \textit{vollständiger Graph} &\leftrightarrow G \text{ ist schlichter Graph mit maximaler Kantenzahl.} \\
G \text{ heißt } \textit{regulär} \text{ (vom Grad } r) &\leftrightarrow G \text{ ist schlichter Graph} \\
&\quad \text{und } \exists r \in \mathbb{N}_0 \text{ so, dass } \forall v \in V \text{ gilt } \deg(v) = r
\end{aligned}
$$

Definition 2.8. (Die Klassen N_n und K_n):

- Die Klasse der Nullgraphen mit der Ordnung n bezeichnet man mit N_n.
- Die Klasse der vollständigen Graphen der Ordnung n bezeichnet man mit K_n[3].

Definition 2.9. (Komplementärgraph, Untergraph, Aufspannender Untergraph, Induzierter Untergraph): Sei $G = (V, E)$ ein Graph,

- so heißt $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{v, w\} \notin E \mid v, w \in V, v \neq w\}$ *Komplementärgraph*.
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V, F \subseteq E$ *Untergraph*, man schreibt $H \subseteq G$.
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W = V, F \subseteq E$ *aufspannender Untergraph*.
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V, F = \{\{v_i, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E, v_i, v_j \in W\}$ *induzierter Untergraph*

Definition 2.10. (gerichteter Graph, Digraph, gerichtete Kante, Pfeil): Seien $a, b \in V$, so heißt das geordnete Paar (a, b) *gerichtete Kante* oder *Pfeil* (engl. *arc*) **von** a **nach** b.
Die Menge der gerichteten Kanten werde mit $A \subseteq \left\{ \bigcup_{i,j} (a_i, b_j) \,\middle|\, a_i, b_j \in V \wedge i, j \in \mathbb{N}_0 \right\}$ bezeichnet.
Das Tupel $G = (V, A)$ heiße *gerichteter (orientierter) Graph* oder *Digraph* (engl. *directed graph*).

Definition 2.11. (Eingangsgrad, Ausgangsgrad): Es sei $G = (V, A)$ ein Digraph.

- $\operatorname{indeg}(v) = |\{(x, v) \mid (x, v) \in A\}|$ heißt der *Eingangsgrad* von v.
- $\operatorname{outdeg}(x) = |\{(x, v) \mid (x, v) \in A\}|$ heißt der *Ausgangsgrad* von x.

[3] Die Klasse K_n ist nach Kuratowski, einem polnischen Mathematiker, benannt.

Definition 2.12. (Kantenzug, Weg, Kreis, Bahn, Zyklus):

1. Ein *Kantenzug* ist eine Folge von Kanten, die nacheinander in einem Zug durchlaufen werden können. (Es könnten Kanten mehrfach durchlaufen werden.)
   $Z = (e_1, \ldots, e_r) = (\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\})$ ist ein Kantenzug;
   $\text{length}(Z) = r$ ist die *Länge* des Kantenzuges Z.

2. Ein *gerichteter Kantenzug* ist eine Folge von Knoten, die durch gerichtete Kanten verbunden sind, so dass für jeden Knoten der Folge $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ gilt: $\exists e_i \in E$ mit $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ für alle $1 \leq i \leq r$.

3. Z heißt *geschlossener Kantenzug*, wenn $v_{r+1} = v_0$ gilt. (Es könnten Kanten mehrfach durchlaufen werden.)

4. Z heißt *einfacher Kantenzug*, wenn keine **Kante** mehrfach durchlaufen wird.

5. Z heißt *Weg*, wenn keine **Ecke** mehrfach durchlaufen wird.

6. Ein *Kreis* ist ein geschlossener Weg.

7. Eine *Bahn* ist ein gerichteter Weg.

8. Ein *Zyklus* ist ein gerichteter Kreis und eine geschlossene Bahn.

Definition 2.13. (EULERsche und HAMILTONsche Kreise):

- Eine EULER*sche Linie* ist ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen genau einmal enthält.

- Der Graph G hat genau dann einen EULER*schen Kreis*, wenn jede Ecke in G geraden Grad besitzt und G EULERsch ist.

- Der Graph G heißt HAMILTON*sch* genau dann, wenn er einen HAMILTONschen Kreis besitzt, d.h. einen geschlossenen Weg, der jede Ecke von G genau einmal durchläuft.

Definition 2.14. (Bipartiter Graph): Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn

1. $V = V_1 \cup V_2 \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset$

2. Es verlaufen nur Kanten von der Eckenmenge V_1 in die Eckenmege V_2 (und umgekehrt, aber nicht innerhalb von V_1 oder V_2)

Praktische Sätze; hier ohne Beweise

Satz 2.1. *Für die Kantenanzahl $k = |E|$ eines* ***endlichen schlichten Graphen*** *der Ordnung n gilt: $0 \leq k \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ und für die Ordnung n gilt: $n \geq \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{8k+1})$.*

Satz 2.2. *Ein* ***endlicher schlichter Graph*** *mit mindestens 2 Ecken hat mindestens 2 Ecken gleichen Grades.*

Satz 2.3 (Euler)**.** *Die Summe der Eckengrade ist gerade.* $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Satz 2.4. *Die Anzahl der Ecken ungeraden Gerades eines Graphen mit endlich vielen Kanten ist gerade.*

Satz 2.5. *Ein regulärer Graph ungeraden Grades hat eine gerade Eckenmenge.*

Satz 2.6. *Bei* ***Digraphen*** *gilt stets: Die Summe der Ausgangsgrade = Summe der Eingangsgrade.*

Satz 2.7. *Jeder Kantenzug zwischen a und b enthält einen Weg zwischen a und b (den sog.* a, b*-Weg)*

Satz 2.8 (Dirac, 1952)**.** *Ist* $\deg(v) \geq \frac{1}{2}|V|$ *für alle Ecken* $v \in V$*, dann ist* G HAMILTON*sch.*

Satz 2.9 (Ore, 1960)**.** *Ist* $\deg(v) + \deg(u) \geq |V|$ *für je zwei nichtbenachbarte Ecken* u*,* v*, dann ist* G HAMILTON*sch.*

2.2 Über Zusammenhang, Cliquen und Bäume

Definition 2.15. (verbindbar, zusammenhängend, Zusammenhangskomponente):
Zwei Knoten $a, b \in V$ heißen *verbindbar* (engl. *connected*) genau dann wenn ein Weg von a nach b existiert.
G heißt *zusammenhängend* (engl. *connected*) genau dann wenn je zwei Knoten von G verbindbar sind.
Eine *Zusammenhangskomponente* (engl. *connected component*) von G ist durch eine Knotenmenge $U \subseteq V$ induzierter Untergraph $G(U)$, der zusammenhängend und bezüglich der Knotenzahl maximal ist.

to be continued ...

Literaturverzeichnis

[Bec2008] Becker, Peter: *Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)*. Version: 2008. http://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/graphentheorie/script.pdf
Vorlesungsskript der Vorlesung vom WS 2007/08 bei Prof. Becker an der Fachhochschule Bonn-Rhein-Sieg

[Bec2009] Becker, Peter: *Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)*. Version: 2009. http://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/graphentheorie/
Vorlesungsfolien der Vorlesung vom WS 2008/09 bei Prof. Becker an der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

[Boh] Bohlen, Jan: *Graphentheorie (Operations Research III)*
Sehschlange mit Definitionen und Prüfungsfragen zur Veranstaltung Graphentheorie / Operations Research III von Prof. Klotz an der TU Clausthal

[Lam2004] Lampe, Ansgar: *Graphentheorie 2*. Version: 03.September 2004. http://www2.inf.h-brs.de/~rhartm2m/tuc/graphentheorie2.pdf
Vorlesungsmitschrift der Vorlesung vom SS2004 bei Prof. Klotz an der TU Clausthal

[NN1997] Necas-Niessner, Frank: *Highlights der Informatik – Zusammenfassung von Definitionen und Sätzen*. 1997
Material zur Prüfungsvorbereitung über die Vorlesung Informatik 1 vom WS1996/97 bei Prof. Lex an der TU Clausthal

Stichwortverzeichnis