Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik

SS 2009
WS 2009/10
SS 2010

Kurzskript
[Draft / Unvollständig]

Highlights aus Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)

Robert Hartmann *

5. März 2013

Zur Vorbereitung der (Wiederholungs-)Klausur
bei Herrn Prof. Peter Becker

*Dipl. Inf. Robert Hartmann
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg, FB Informatik
Standort: Sankt Augustin, Raum: C184
http://www2.inf.h-brs.de/~rhartm2m/
Robert.Hartmann@h-brs.de

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Programmierung

Die Lineare Programmierung oder Lineare Optimierung ist eines der Hauptverfahren des *Operation Research*s und beschäftigt sich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen über einer Menge, die durch lineare Gleichungen und Ungleichungen eingeschränkt ist. Der Begriff „Programmierung“ ist eher im Sinne von „Planung“ zu verstehen als im Sinne der Erstellung eines Computerprogramms. Er wurde schon Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig, einem der Begründer der Linearen Optimierung, geprägt, bevor Computer zur Lösung linearer Optimierungsprobleme eingesetzt wurden.

Definition 1.1. (Lineares Optimierungs-Problem (LP)): Eine *lineare Funktion* f aus dem $\mathbb{R}^p$ soll optimiert, d.h. minimiert oder maximiert, werden:

$$\mathbf{opt}\{f(x)\}$$

- Dabei sei der mathematische Funktionsoperator **opt** $\in \{\min, \max\}$.
- Die lineare Funktion der *Dimension* p über x wird als Polynom vom *Grad* 1 definiert: $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$.
  - Es heiße $c \in \mathbb{R}^p$ der *Koeffizientenvektor*.
  - Es heiße $x \in \mathbb{R}^p$ der *Lösungsvektor*.
  - Es gilt: $f(x) = c^{\mathrm{T}}x = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i x_i = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_px_p$, mit $c_i, x_i \in \mathbb{R}(i \in \mathbb{N})$

An die Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des Lösungsvektors werden häufig sogenannte *Vorzeichenbedingungen* gestellt. Vorzeichenbedingungen stellen Anforderungen an den Wertebereich der x_i. Es gibt nur einige verschiedene Vorzeichenbedingungen der Form:

- $x_j \in \mathbb{R}$: keine Werteinschränkung für diese Komponente
- $x_j \leq 0$: **positive Werte** als Lösung sind **nicht** erlaubt
- $x_j \geq 0$: **negative Werte** als Lösung sind **nicht** erlaubt

O.B.d.A. gibt es stets $n \in \mathbb{N}$ *Nebenbedingungen*, die bei der Lösung eines LPs zuberücksichtigen sind. Jede Nebenbedingung erhalte einen eindeutigen Namen $N_i(x)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.
Nebenbedingungen können folgende Form besitzen:

- *lineare Ungleichungen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x \leq b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$
- *lineare Funktionen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x = b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$
- *lineare Ungleichungen* der Form $N_i(x) : a^{\mathrm{T}}x \geq b_i$ mit $a, x \in \mathbb{R}^p$ und $b_i \in \mathbb{R}$

Lösbarkeit von LPs Für jedes LP gilt genau eine der vier Aussagen:

1. Das LP besitzt keine zulässigen Lösungen. (z. B. $\max\{x \mid x \leq 1,\ x \geq 2\ \}$).
2. Das LP ist unbeschränkt, d. h. es gibt Lösungen mit beliebig hohem Zielfunktionswert (z. B. $\max\{x \mid x \geq 0\}$).
3. Das LP hat unendlich viele Optimallösungen.
4. Das LP hat genau genau eine Optimallösung.

1.1 Graphische, geometrische Lösung

Definition 1.2. (Simplex): Ein p-dimensionales Simplex ist eine geschlossene oder beschränkte p-dimensionale geometrische Figur mit mindestens $p+1$ Eckpunkten.
Was bei der graphischen, geometrischen Lösung zu tun ist ...
Im p-dimensionalen Fall wird zunächst das geometrische Objekt $\mathcal{OPT}$, das durch die zu optimierende lineare Funktion beschrieben ist, bestimmt (gezeichnet / dargestellt / festgehalten). Schließlich wollen wir am Ende das Optimum auch markieren.

- Im 2-D Fall ist $\mathcal{OPT}$ einfach eine mit Stift und Lineal zeichenbare EUKLIDische Gerade, die der Geradengleichung $f(x)$ gehorcht.
- Im 3-D Fall ist $\mathcal{OPT}$ die durch $f(x)$ beschriebene Ebene, die im 3-D Raum eingebettet ist; auch die Ebene lässt sich „einfach“ in ein Koordinatensystem eintragen.

Die Vorzeichenbedingungen zu beachten, bedeutet nichts weiter als die Koordinatenachsen zu beschneiden. Dadurch wird der Definitions- und der Wertebereich der zu optimierenden Funktion $f(x)$ und der Nebenbedingungen $N_i(x)$ eingegrenzt.

Im p-dimensionalen Fall werden nun die Nebenbedingungen in geometrische Objekte transformiert (bei $\geq$, $\leq$ wird aber nur der Grenzfall „=“ zur Bestimmung des Objektes angenommen)

- Im 2-D Fall wird jede Nebenbedingung als eine Gerade aufgefasst.
- Im 3-D Fall werden Nebenbedingungen als Ebenen aufgefasst.

Die geometrischen Objekte der Nebenbedingungen müssen die Vorzeichenbedingungen erfüllen.
Bei der Beschneidung und Eingrenzung des $\mathbb{R}^p$ durch Vorzeichen- und Nebenbedingungen kann es vorkommen:

- dass ein p-dimensionales Simplex übrig bleibt, so ist das LP lösbar.[1]

[1] Ergibt sich durch die Beschneidungen ein p-dimensionales Simplex – also ein p-dimensionale geometrische Figur mit mindestens $p+1$ Eckpunkten – , so gibt es eine endliche Anzahl von zulässigen Lösungen im Inneren und dem Rand des Simplexes.

Kandidaten für die optimalen Lösung sind in den Ecken des Simplexes zu suchen.

Es verbleibt nun die Koordinaten der Eckpunkte des Simplex in $f(x)$ einzusetzen und das x als beste Lösung zu ermitteln, welches das beste Ergebnis liefert.

- dass ein unbeschränkter Bereich des $\mathbb{R}^p$ übrig bleibt, d.h. es existiert kein Simplex, dann ist das LP unbeschränkt

- dass keine Punkte mehr übrig bleiben, dann ist das LP nicht lösbar

Algorithmus : zur graphischen/geometrischen Lösung
Eingabe : die zu optimierende Funktion $f(x)$, Vorzeichenbedingungen, Nebenbedingungen
Ausgabe : Lösung des Optimierungsproblems

$S \leftarrow \emptyset$ `// Menge` S `wird als leere Menge initialisiert`
$B \leftarrow$ Vorzeichenbedingungen $\cup$ Nebenbedingungen `// Menge` B `enthält alle Bedingungen.`
foreach $B \ni b_i, b_j \in B; i \neq j$ **do** Bestimme die jeweiligen Schnittpunkte s aller Nebenbedingungen und Vorzeichenbedingungen untereinander. Sammele alle Schnittpunkte in einer Menge S
  $s \leftarrow b_i \cap b_j$ `// geometrischer Schnitt`
  $S \leftarrow S \cup \{s\}$ `// Vereinigung der Mengen`
foreach $s \in S$ **do** Teste für Element $s \in S$, ob s sämtliche Bedingungen erfüllen. Wenn s mindestens eine Bedingung nicht erfüllt, entferne s aus S.
  if not `checkConstraints(`s, B`)`
  `/* Hinweis: checkConstraints(`s, B`) liefert` **`true`** `genau dann, wenn` s `alle Bedingungen in` B `erfüllt, sonst liefert es` **`false`**`. */`
  then
    $S \leftarrow S \setminus \{s\}$
`/* Hinweis: Die verbleibenden Elemente in` S `sind Kandidaten für die optimale Lösung. */`
switch S **do**
  case $S = \emptyset$, $|S| = 0$
    so gibt es keine Lösung
  case $S \neq \emptyset$, $|S| \geq \aleph_0$ *mit* $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
    `// die Mächtigkeit der Menge` S `ist` $|S| \geq \aleph_0$ mit $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
    so gibt es („aufzählbar“ oder „überaufzählbar“) unendlich viele Lösungen.
  case $S \neq \emptyset$, $|S| = n \in \mathbb{N}$
    `// Die Menge` S `enthält abzählbar viele Elemente`
    so gibt es genau n Kandidaten für die optimale Lösung.
    $S_{opt} \leftarrow \emptyset$ `// Menge der optimalen Lösungen`
    foreach $s \in S$ **do** Finde die optimalen $s \in S$
      setze s in die zu optimierende Funktion $f(x)$ für x ein, und betrachte das Ergebnis von $f(s)$
      Dasjenige s, welches ein optimales Ergebnis liefert, ist als eine optimale Lösung s_{opt} des Optimierungsproblems gefunden.
      $S_{opt} \leftarrow S_{opt} \cup \{s_{opt}\}$
    return S_{opt}

1.2 Simplex-Tableau Verfahren

Das Verfahren mit dem Simplex-Tableau zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen hat Ähnlichkeiten mit dem GAUSSschen Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.
Für beide Verfahren gilt:

- Es gibt Unbekannte, die man berechnen will.
- Eine gültige Operation ist: „Eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile dazu zu addieren.“

Simplex-Tableau Verfahren was als Vorarbeit zu tun ist ...

Man formuliere das Optimierungsproblem in geeigneter Weise als Maximierungsproblem. Das ist ziemlich einfach, denn entweder handelt es sich beim gegebenen Problem schon um ein Maximierungsproblem oder – und nur dann ist etwas zu tun – es handelt sich um ein Minimierungsproblem.
Ein Minimierungsproblem wird in ein Maximierungsproblem umgewandelt, indem die Nebenbedingungen und Vorzeichenbedingungen beibehalten werden aber die Zielfunktion mit -1 multipliziert wird: z.B. $\min\{2x_1 + 3x_2 + x_3\} \;\Leftrightarrow\; \max\{-[2x_1 + 3x_2 + x_3]\}$

Gibt es Variablen x_j, die die Nichtnegativitätsbedingung **nicht** erfüllen, d.h. $x_j < 0$ wäre nach Vorzeichenbedingung zulässig, müsste man in der Zielfunktion und den Nebenbedingungen jedes Auftreten von x_j durch $(x'_j - x''_j)$ ersetzen, wobei nun die Vorzeichenbedingung von x_j durch die zwei Vorzeichenbedingungen $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ zu ersetzen ist.

Standard-Maximierungs-Problem in kanonischer Form

Definition 1.3. (kanonische Form): Ein LP ist in *kanonischer Form* genau dann, wenn alle Nebenbedingungen Ungleichungen der Form $\sum a_i x_i \leq b$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ sind.

Definition 1.4. (Standard-Maximierungs-Problem): Ein LP ist ein *Standard-Maximierungs-Problem* genau dann, wenn es ein Maximierungsproblem ist und der Punkt 0, also der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, alle Bedingungen erfüllt und somit eine Ecke des Simplex ist.

Stelle sicher, dass das Maximierungsproblem ein Standard-Maximierungs-Problem ist, und bringe es in kanonische Form.

Definition 1.5. (Schlupfvariable): Eine *Schlupfvariable* ist eine Variable, die zur linken Seite der Ungleichung in geeigneter Weise additiv hinzugefügt aus der Ungleichung eine Gleichung macht: z.B. Durch Hinzufügen der Schlupfvariable s verändert sich die Ungleichung der Nebenbedingung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 < b$ zur Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + s = b$

Als letzter Schritt der Vorarbeit muss nun die Anzahl der notwendigen Schlupfvariablen bestimmt werden: Die Anzahl der Schlupfvariablen entspricht der Anzahl der Nebenbedingungen. Da in der Vorlesung die Optimierungsprobleme auf die kanonischer Form beschränkt wurden, gilt für die Koeffizienten der Schlupfvariablen die Nichtnegativitätsbedingung.

Algorithmus : Simplex-Tableau Verfahren

Eingabe : Standard-Maximierungs-Problem in kanonischer Form
Ausgabe : Lösung des Optimierungsproblems

if not *Test: „Formulierung in kanonischer Form“*
then
    `// Test ist nicht erfolgreich gewesen`
    `abort(`*keine kanonische Form*`)`
if not *Test: „Standard-Maximierungs-Problem“*
then
    `// Test ist nicht erfolgreich gewesen`
    `abort(`*keine Standard-Maximierungs-Problem*`)`
Bestimmung der notwendigen Schlupfvariablen s_i
Aufstellung des Simplex-Algorithmus-Tableaus
while not *Optimalitätstest: „Alle x_i der ZFZ sind 0 und alle s_i der ZFZ sind ≥ 0“*
do
    Finde Pivotspalte `/* Pivotspalte wird diejenige Spalte mit kleinstem ZFZ-Eintrag */`
    if *Lösbarkeitstest: „Falls alle Einträge der Pivotspalte ≤ 0 sind, ist das Problem unbeschränkt.“* **then**
        `abort(`*Problem unbeschränkt*`)`
    Finde Pivotzeile `/* Der` **`kleinste nicht negative Quotient`** `aus Konstante` b `und den Koeffizienten in der Pivotspalte` x_i`, ohne die ZFZ, bestimmt die Pivotzeile. */`
    Pivotschritt `/* Bringe durch Äquivalenzumformungen das Pivotelement auf den Wert 1 und alle anderen Einträge der Pivotspalte auf den Wert 0; d.h:`
      `(1.) Dividiere Pivotzeile durch Pivotelement`
      `(2.) Subtrahiere oder addiere jede andere Zeile mit einem geeigneten Vielfachen der Pivotzeile. */`
    Basistausch `/* Ersetze die Zeilenbeschriftung der noch aktuellen Pivotzeile durch die Spaltenbeschriftung der noch aktuellen Pivotspalte. Werteinträge bleiben fest. */`
return Optimale Werte der x_i `/* Die optimalen Werte der` x_i `stehen in der Spalte` b `in den jeweiligen mit` x_i `beschrifteten Zeilen. */`

Die Anzahl der Schleifendurchläufe (beim Simplex-Tableau Verfahren für Standard-Maximierungs-Probleme) ist identisch mit der Anzahl der Unbekannten x_i.

Im Folgenden wird beispielhaft ein Maximierungsproblem sowohl auf graphischem/geometrischem Weg als auch mit dem Simplex-Tableau Verfahren gelöst.

Aufgabe

Gegeben sind:[2]
Punkte

$$A = \left(0; -\frac{1}{2}\right) \quad B = (2;1) \quad C = (2;0) \quad D = \left(2\frac{1}{5}; 2\right) \quad E = (0;3)$$

Geraden:

$$\begin{aligned} g &= \{A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\} \\ h &= \{C + u(D - C), u \in \mathbb{R}\} \\ i &= \{E + v(D - E), v \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Maximiere

$$z = z(x, y) = 3x - 2y$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} N_1 &:= z(x, y) \geq g(x) + 3x - 3y \\ N_2 &:= z(x, y) \geq h(x) + 3(x - y) \\ N_3 &:= z(x, y) \leq i(x) - 3(y - x), \end{aligned}$$

wobei stets gelten soll $x \geq 0$, $y \geq 0$

a) durch analytische Geometrie mit graphischer Unterstützung

b) durch Anwenden des Simplex-Tableau Verfahrens

Lösung

Die Nebenbedingungen sind Bedingungen an die zu optimierende Funktion, wir benötigen aber Bedingungen an die Parameter x und y der Form „Parameter **op** Ausdruck“, wobei **op** $\in \{\leq; =; \geq; >; <\}$ sein kann.
Wir formulieren daher die Nebenbedingungen um:

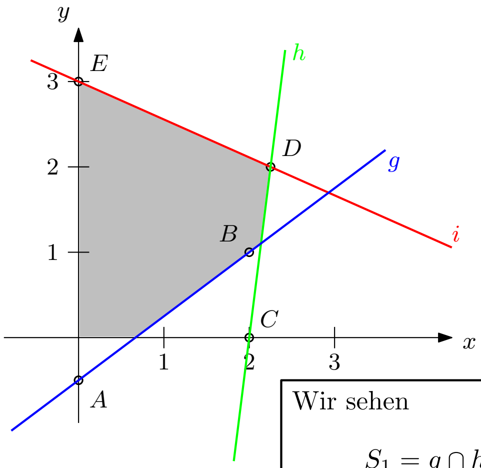
$$\begin{aligned} N_1 : z(x, y) &\geq g(x) + 3x - 3y \\ 3x - 2y &\geq g(x) + 3x - 3y \\ 3y - 2y &\geq g(x) \\ y &\geq g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 : z(x, y) &\geq h(x) + 3(x - y) \\ 3x - 2y &\geq h(x) + 3x - 3y \\ y &\geq h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 : z(x, y) &\leq i(x) - 3(y - x) \\ 3x - 2y &\leq i(x) - 3y + 3x \\ y &\leq i(x) \end{aligned}$$

[2] An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Kollegin Dipl. Inf. Katharina Stollenwerk bedanken, die in Ihrer ersten Arbeitswoche im September 2010 meine handschriftliche Aufzeichnung von Aufgabe und Lösung, die ich den Tutoriumsteilnehmern in Moodle bereitgestellt hatte, in kurzer Zeit in $\LaTeX\,2_\varepsilon$ bzw. die Graphiken mit IPE gesetzt hat.

a) geometrische / graphische Lösung



$A = (0, -\frac{1}{2})$ $\quad g = \overline{AB}$

$B = (2, 1)$ $\quad h = \overline{CD}$

$C = (2, 0)$ $\quad i = \overline{ED}$

$D = (2\frac{1}{5}, 2)$

$E = (0, 3)$ $\quad N_1 := y \geq g(x)$

$N_2 := y \geq h(x)$

$N_3 := y \leq i(x)$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

Wir sehen

$$S_1 = g \cap h$$

$$S_2 = g \cap \{(1; 0) \cdot K, K \in \mathbb{R}\}$$

Beim Schnitt der Nebenbedingungsgrenzen mit den Vorzeichenbedingungen und beim Schnitt der Nebenbedingungsgrenzen untereinander entstehen zwei Schnittpunkte S_1 und S_2. Der Schnitt der Vorzeichenbedingungen liefert den Punkt $0 = (0; 0)$.
Das oben graue Gebiet, bzw. der graue Bereich oder Ausschnitt der $x - y$-Ebene, wird durch das Simplex $\mathfrak{S} = (0; S_2; S_1, D; E)$ begrenzt.
Die Lösungskandidaten des LPs $\max\{3x - 2y\}$ liegen im Inneren von $\mathfrak{S}$. Kandidaten der optimalen Lösungen sind in den Eckpunkten des Simplexes $\mathfrak{S}$ zu finden.
Wir müssen nun testen, ob wir das richtige Simplex gefunden haben, nämlich dann, wenn alle Eckpunkte des Simplexes alle Bedingungen erfüllen. Dazu brauchen wir die Geradengleichungen von $g(x)$, $h(x)$, $i(x)$ sowie die Koordinaten von S_1 und S_2.

Bestimmung der Geradengleichungen (mit Verfahren der linearen Algebra und analytischer Geometrie)

Punkte A und B und Gerade g
Es war

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \{A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + t(B - A), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Wir fassen die Punktmenge der Geraden als Lösungsmenge eines Linearen-Gleichungssystems (kurz: LGS) mit zwei Gleichungen (kurz: GL) und einer Unbekannten auf:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot t \\ y &= -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot t \end{aligned}$$

Ziel unserer Umformungen ist es, die Werte für y in Abhängigkeit von den Werten von x zu bringen, und dabei gleichzeitig die Variable t „loszuwerden“.

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}x \\ y &= -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot t \end{aligned}$$

setze $t = \frac{1}{2}x$ in y ein:

$$y = -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

Damit gilt genau für alle Punkte von g die Geradengleichung $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
Nebenbemerkung: Punkte von g sind Lösungen der Gleichung $\frac{3}{4}x - y - \frac{1}{2} = 0$.

Punkte C und D und Gerade h

Es war

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$h = \{C + u(D - C), u \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} h &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C + u(D - C), u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\left(\begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0,2 \\ 2 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Auch hier fassen wir die Punktmenge der Geraden als Lösungsmenge eines LGS mit zwei GL und einer Unbekannten auf. Nach den folgenden Umformungs- und Einsetzungsschritten können wir die y-Werte in Abhängigkeit von x ausdrücken und haben die Unbekannte u eliminiert

$$\begin{aligned} x &= 2 + u \cdot 0,2 \quad \Leftrightarrow u = \frac{x-2}{0,2} \\ y &= 0 + u \cdot 2 \\ &\overset{**}{=} 0 + \frac{x-2}{0,2} \cdot 2 \\ &= \frac{x-2}{\frac{2}{10}} \cdot 2 = \frac{10(x-2)}{2} \cdot 2 = 10x - 20 \end{aligned}$$

**Einsetzen von u in y

Damit gilt für alle Punkte von h die Geradengleichung $h(x) = 10x - 20$, gleichwertig lösen sie die Gleichung $10x - y - 20 = 0$.

Punkte D und E und Gerade i
Es war

$$C = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$i = \{E + v(D - W), v \in \mathbb{R}\}$$

damit ist

$$\begin{aligned} i &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E + v(D - E), v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \left(\begin{pmatrix} 2,2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right), v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2,2 \\ -1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Bearbeiten wir nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 0 + v \cdot 2,2 \quad \Leftrightarrow v = \frac{x}{2,2} \\ y &= 3 + v \cdot (-1) \\ &\stackrel{**}{=} 3 + \frac{x}{2,2} \cdot (-1) \\ &= 3 - \frac{x}{\frac{22}{10}} = 3 - \frac{10}{22}x = -\frac{5}{11}x + 3 \end{aligned}$$

**Einsetzen von v in y

und wir erhalten $i(x) = -\frac{5}{11}x+3$ als Geradengleichung, was äquivalent zu $-\frac{5}{11}x-y+3 = 0$ ist.

Bestimmung der Koordinaten von S_2

Wir setzen die Parameterform der x-Achse in die x-y- Gleichungsform von g ein, und wir lösen dann nach K auf. Mit K können wir S_2 angeben.

$$S_2 = g \cap \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot K, K \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{Parameterform der } x\text{-Achse}}$$

$$\begin{aligned} g: \qquad \frac{3}{4}x - y - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{3}{4} \cdot (1 \cdot K) - (0) - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{3}{4} \cdot K - \frac{1}{2} &= 0 \\ K &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Koordinaten von S_1

Wir setzen die vektorielle Parameterform von g in die x-y-Gleichungsform von h ein und lösen nach der einen Unbekannten auf. Dies wiederum setzen wir in g als Parameterwert ein und erhalten die gesuchten Koordinaten von S_1.

$$S_1 = g \cap h$$

$$\begin{aligned}
g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A + t(B - A), t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \\
h &: \quad 10x - y - 20 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \cdot (0 + t \cdot 2) - \left(-\frac{1}{2} + t \cdot \left(1\frac{1}{2} \right) \right) - 20 &= 0 \qquad \leftarrow \text{nach } t \text{ auflösen} \\
20t + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}t - 20 &= 0 \\
\left(20 - 1\frac{1}{2} \right) t + \frac{1}{2} - 20 &= 0 \\
18\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} &= 20 \\
18\frac{1}{2}t &= 19\frac{1}{2} \\
t = \frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}} = \frac{\frac{39}{2}}{\frac{37}{2}} = \frac{39}{37} &= 1\frac{2}{37}
\end{aligned}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1\frac{2}{37} \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1\frac{2}{37} \cdot 2 \\ -\frac{1}{2} + 1\frac{2}{37} \cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{4}{37} \\ 1\frac{3}{37} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,108\ldots \\ 1,081\ldots \end{pmatrix}$$

Der Rest ...
ist nicht mehr schwer.

Nachdem wir nun alle Geraden und Punkte, die ein Simplex beschreiben, bestimmt haben, müssen wir testen, ob dieses Simplex auch alle Nebenbedingungen einhält. Dazu setzen wir nacheinander die Koordinaten der Eckpunkte des Simplexes in die Nebenbedingungen ein, und prüfen, ob diese gelten.

Anschließend werden wir, da das Simplex alle Nebenbedingungen erfüllen wird, die Eckpunkte in die Zielfunktion einsetzen, um herauszufinden, welcher der Punkte einen optimalen Wert liefert.

Test, ob das Simplex $\mathfrak{S} = (0; S_2; S_1; D; E)$ alle Bedingungen erfüllt

$$0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix}2\frac{4}{37}\\1\frac{3}{37}\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}2,2\\2\end{pmatrix}\ E = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

Bedingung	$0 = (0; 0)$	$S_2 = (\frac{2}{3}; 0)$
$x \geq 0$	$0 \geq 0$	$\frac{2}{3} \geq 0$
$y \geq 0$	$0 \geq 0$	$0 \geq 0$
$y \geq g(x)$	$0 \geq g(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	$0 \geq g(\frac{2}{3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
$y \geq h(x)$	$0 \geq h(0) = 10 \cdot 0 - 20 = -20$	$0 \geq h(\frac{2}{3}) = 10 \cdot \frac{2}{3} - 20 = 6\frac{2}{3} - 20 = -13\frac{1}{3}$
$y \leq i(x)$	$0 \leq i(0) = -\frac{5}{11} \cdot 0 + 3 = 3$	$0 \leq i(\frac{2}{3}) = -\frac{5}{11} \cdot \frac{2}{3} + 3 = -\frac{10}{33} + 3 = 2\frac{23}{33}$

Bedingung	$S_1 = (2\frac{4}{37}; 1\frac{3}{37})$
$x \geq 0$	$2\frac{4}{37} \geq 0$
$y \geq 0$	$1\frac{3}{37} \geq 0$
$y \geq g(x)$	$1\frac{3}{37} \geq g(\frac{2}{3}) = \frac{3}{4} \cdot 2\frac{4}{37} - \frac{1}{2} = 1\frac{43}{74} - \frac{1}{2} = 1\frac{3}{37}$
$y \geq h(x)$	$1\frac{3}{37} \geq h(2\frac{4}{37}) = 10 \cdot 2\frac{4}{37} - 20 = 21\frac{3}{37} - 20 = 1\frac{3}{37}$
$y \leq i(x)$	$1\frac{3}{37} \leq i(1\frac{3}{37}) = -\frac{5}{11} \cdot 2\frac{4}{37} + 3 = -\frac{390}{407} + 3 = 2\frac{17}{407}$

Bedingung	$D = (2,2; 2)$	$E = (0,3)$
$x \geq 0$	$2,2 \geq 0$	$0 \geq 0$
$y \geq 0$	$2 \geq 0$	$3 \geq 0$
$y \geq g(x)$	$2 \geq g(2,2) = \frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{33}{20} - \frac{1}{2} = \frac{33-10}{20} = 1\frac{3}{20}$	$3 \geq g(0) = -\frac{1}{2} = 0$
$y \geq h(x)$	$2 \geq h(2,2) = 10 \cdot 2\frac{1}{5} - 20 = 22 - 20 = 2$	$3 \geq h(0) = -20$
$y \leq i(x)$	$2 \leq i(2,2) = -\frac{5}{11} \cdot 2\frac{1}{5} + 3 = -1 + 3 = 2$	$3 \leq i(0) = 3$

$\Rightarrow$ Simplex erfüllt alle Bedingungen.

Bestimmung der optimalen Lösungen

Punkt	$z(x, y) = 3x - 2y$
$0 = (0; 0)$	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$
$S_2 = (\frac{2}{3}; 0)$	$3 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot 0 = 2$
$S_1 = (2\frac{4}{37}; 1\frac{3}{37})$	$3 \cdot (2\frac{4}{37}) - 2 \cdot (1\frac{3}{37}) = 6\frac{12}{37} - 2\frac{6}{37} = 4\frac{6}{37}$
$D = (2,2; 2)$	$3 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2 = 6,6 - 4 = 2,6$
$E = (0; 3)$	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$

Man erkennt, dass S_1 in $z(x, y)$ eingesetzt den größten Wert liefert. Also ist $x = 2\frac{4}{37}$, $y = 1\frac{3}{37}$ die optimale, d.h. maximale, Lösung mit einem Zielfunktionswert von $4\frac{6}{37}$.

b) Anwendung des Simplex-Tableau-Verfahrens

Im folgenden halten wir uns an den Algorithmus von Seite 5.

$$z = z(x, y) = 3x - 2y$$

$$\text{LP} : \max\{z\}; \qquad x \geq 0; y \geq 0;$$

$$\left.\begin{matrix} N_1 : y \geq g(x) \\ N_2 : y \geq h(x) \\ N_3 : y \leq i(x) \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{mit Aufgabenteil a} \\ \text{ergibt sich}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} N_1 : y \geq \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ N_2 : y \geq 10x - 20 \\ N_3 : y \leq -\frac{5}{11}x + 3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{umstellen} \\ \text{zu}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} N_1 : \frac{3}{4}x - y \leq \frac{1}{2} \\ N_2 : 10x - y \leq 20 \\ N_3 : \frac{5}{11}x + y \leq 3 \end{matrix}\right.$$

Formulierung des Maximierungsproblems in gewohnter Art:

$$\max\{z(x)\} = \max\{3x_1 - 2x_2\},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ mit der Einschränkung durch die *Vorzeichenbedingungen* $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ unter Berücksichtigung der *Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} N_1 &: \frac{3}{4}x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2} \\ N_2 &: 10x_1 - x_2 \leq 20 \\ N_3 &: \frac{5}{11}x_1 + x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Hinweis: *Gäbe es eine Variable x_j, die die Nichtnegativitätsbedingung **nicht** erfüllt, d.h. $x_j < 0$ wäre zulässig, müsste man überall (d.h. in z und in den N_i) das x_j durch $(x'_j - x''_j)$ ersetzen, wobei nun $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ erfüllt wäre.*

Test: Formulierung in kanonischer Form Ja, die Formulierung ist in kanonischer Form, denn alle Nebenbedingungen sind Ungleichungen der Form

$$\sum a_i x_i \leq b \qquad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: *Die Lösung von nicht kanonischer Form ist außerhalb des Prüfungsstoffes.*

Test: Standard-Maximierungs-Problem Ein Standard-Maximierungsproblem liegt vor, wenn der Punkt 0 alle Bedingungen erfüllt, also eine Ecke des Simplex ist: Nur dann funktioniert das Verfahren aus der Vorlesung, sonst nämlich nicht.
Hinweis: *Der „2-Phasen-Simple-Algorithmus“, der helfen würde, wenn der Startpunkt keine gültige oder zulässige Basislösung liefert, liegt außerhalb des Prüfungs- und Vorlesungsstoffes.*

$$N_1 : \frac{3}{4} \cdot 0 - 0 \leq \frac{1}{2} \qquad N_2 : 10 \cdot 0 \leq 20 \qquad N_3 : \frac{5}{11} \cdot 0 + 0 \leq 3$$

die Vorzeichen sind auch erfüllt
$\Rightarrow$ Ein Standard-Maximierungsproblem in kanonischer Form liegt vor.

Bestimmung der Anzahl der notwendigen Schlupfvariablen:
3 Ungleichungen $\Rightarrow$ 3 Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3
Hinweis: *Pro Ungleichung belegen wir genau* ***eine*** *Schlupfvariable, die bei den anderen Ungleichnungen den Wert* 0 *erhält, mit einem Wert (bei kanonischer Form mit dem Wert* 1*). Bei nicht kanonischer Form:*

$$\begin{aligned} s = 1 \text{ für } \sum a_i x_i \leq b \\ s = -1 \text{ für } \sum a_i x_i \geq b \\ s = 0 \text{ für } \sum a_i x_i = b \end{aligned}$$

Aufstellung des Simplex-Algorithmus-Tableaus:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Hinweis: *Der Grund für die Invertierung der Koeffizientenvorzeichen in der Zielfunktionszeile ist, man optimiert* $z = z(x) = \sum c_i x_i$*, indem man die Gleichung* $z - (\sum c_i x_i) = 0$ *löst.*

Optimalitätstest Sind alle Koeffizienten in der ZFZ größer oder gleich Null? Nein, also müssen wir rechnen: Insbesondere die x_i müssen in der ZFZ auf Null gebracht werden. Die s_i müssen größer oder gleich Null sein.

Finde Pivotspalte: Pivotspalte wird diejenige Spalte mit kleinstem ZFZ-Eintrag (hier x_1).

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Lösbarkeitstest Falls alle Einträge der Pivotspalte kleiner oder gleich Null sind, ist das Problem unbeschränkt.

Finde Pivotzeile Der kleinste nicht negative Quotient aus Konstanten b und Koeffizienten von x_i in der Pivotspalte, ohne die der ZFZ, bestimmt die Pivotzeile.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Q
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ ← kleinster Quotient
s_2	10	-1		1		20	$\frac{20}{10} = 2$
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3	$\frac{3}{\frac{5}{11}} = 3\frac{11}{55} = \frac{33}{5} = 6,6$
z	-3	2	0	0	0	0	/

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\frac{3}{4}$	-1	1			$\frac{1}{2}$
s_2	10	-1		1		20
s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3
z	-3	2	0	0	0	0

Hinweis: *(Nicht kanonische Form) Wenn eine Zeile (außer z) keine Schlupfvariable enthält, d.h. die entsprechende Nebenbedingung ist eine Gleichung, dann wähle Zeile ohne Schlupfvariable als Pivotzeile und eine beliebige Spalte, in der diese Zeile ein Element ungleich Null enthält, als Pivotspalte. Führe einen Pivotschritt aus. Alle Zeilen (ohne z) mit $b < 0$ müssen nun mit -1 multipliziert werden.*

Das Pivotelement ist also $(x_1; s_1)$ mit dem Wert $\frac{3}{4}$.

Pivotschritt Bringe durch Äquivalenzumformungen das Pivotelement auf den Wert 1 und alle anderen Einträge der Pivotspalte auf 0:

- Dividiere die Pivotzeile durch Pivotelement
- Subtrahiere oder addiere jede andere Zeile von oder zu einem geeigneten Vielfachen der Pivotzeile

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Op
I	s_1	$\boxed{\frac{3}{4}}$	-1	1			$\frac{1}{2}$	$\cdot\frac{4}{3}$
II	s_2	10	-1		1		20	$-10 \cdot \frac{4}{3} \cdot \mathrm{I}$
III	s_3	$\frac{5}{11}$	1			1	3	$-\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{3} \cdot \mathrm{I}$
IV	z	-3	2	0	0	0	0	$+3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \mathrm{I}$

rechnen

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	$\boxed{1}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$
s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$
z	0	-2	4	0	0	2

Basistausch Ersetze die Zeilenbeschriftung der noch aktuellen Pivotzeile durch die Spaltenbeschriftung der noch aktuellen Pivotspalte: Werteinträge bleiben fest. Hier s_1 gegen x_1.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\boxed{x_1}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$
s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$
z	0	-2	4	0	0	2

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	Q	Op
	x_1	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2} = -0,5$	$+\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{37}\cdot \text{II}\right)$
c)	s_2	0	$\frac{37}{3}$	$-\frac{40}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{\frac{40}{3}}{\frac{37}{3}} \approx 1,081$	$\cdot\frac{3}{37}$
	s_3	0	$\frac{53}{33}$	$-\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{89}{33}$	$\frac{\frac{89}{33}}{\frac{53}{33}} = \frac{89}{53} \approx 1,679$	$-\left(\frac{53}{33} cdot \frac{3}{37}\cdot \text{II}\right)$
	z	0	-2	4	0	0	2		$+\left(2\cdot\frac{3}{37}\cdot \text{II}\right)$
			a)					b)	d)

a) Zielfunktionszeile ist noch nicht optimal: Daher neue Pivotspalte mit kleinstem z-Eintrag

b) Quotienten zur Bestimmung der Pivotzeile

c) Pivotelement ist gefunden

d) Operation zur Durchführung des Pivotschrittes

Nach dem Pivotschritt und sich anschließendem Basistausch erhält man

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	1	0	$-\frac{4}{37}$	$\frac{4}{37}$	0	$\frac{78}{37} = 2 + \frac{4}{37} \approx 2,1081$
x_2	0	1	$-\frac{40}{37}$	$\frac{3}{37}$	0	$\frac{40}{37} = 1 + \frac{3}{37} \approx 1,081$
s_3	0	0	$\frac{460}{407}$	$-\frac{53}{407}$	1	$\frac{34103}{1221} = 27 + \frac{1136}{1221} \approx 27,93$
z	0	0	$\frac{68}{37}$	$\frac{6}{37}$	0	$\frac{154}{37} = 4 + \frac{6}{37} \approx 4,162$

Die Zielfunktionszeile ist optimal, da alle $x_i = 0$ und alle $s_i \geq 0$ in der z-Zeile sind. Wir können nun ablesen, dass $x_1 = 2\frac{4}{37}$ und $x_2 = 1\frac{3}{37}$ die optimale Lösung liefert und dass $z(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$ den Zielfunktionswert $z = 4\frac{6}{37}$ besitzt.

Anmerkung: Vergleichen wir die Lösungen des graphischen / geometrischen Verfahrens mit den des Simplex-Tableau-Verfahren, erkennen wir, dass beide Verfahren dieselbe Lösung liefern.

1.3 Weitergehende Simplex-Verfahren

Hinweis. In diesem Abschnitt werden weitergehenden Simplex-Verfahren vorgestellt, die außerhalb des Prüfungsstoffes sind, da sie in der eigentlichen Veranstaltung nicht behandelt wurden.

1.3.1 2-Phasen-Simplex

vgl [Ley1997]

1.3.2 Vorbereitung zur Fuzzy Linearen Programmierung

Bisher haben wir unter scharfen Bedingungen optimiert. Häufig steht man jedoch vor dem Problem, dass Nebenbedingungen eben nicht mehr scharf oder konkret genug benannt werden können. Die sogenannten *Fuzzy-Mengen* und die *Fuzzy-Logik* bieten mathematische Werkzeuge mit denen man *unscharfe* (engl. fuzzy) Aussagen, Bedingungen oder unscharfe Mengenzugehörigkeiten formal ausdrücken und auswerten kann.
Das von Zadeh[3] Mitte der 60er Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelte Unschärfe-Konzept (Fuzzy-Set-Theory) beinhaltet eine mehrwertige Logik, die *Fuzzy-Logik*, welche auf unscharfen Mengen, den *Fuzzy-Mengen*, operiert.
Das Zadehsche Konzept der *Fuzzy-Mengen* ist eine Erweiterung des klassischen Mengen-Konzept, welches von Cantor[4] und Dedekind[5] formuliert, später von Zermelo[6] und Fraenkel[7] widerspruchsfrei axiomatisiert wurde.
Das Zadehsche Konzept der *Fuzzy-Logik* ist eine Verallgemeinerung der klassischen Logik, d.h. Aussagenlogik und Prädikatenlogik, formuliert von Boole[8] und Frege[9].
Bevor wir uns in einem Exkurs die „unscharfen“ Fuzzy-Konzepte ansehen, erinnern wir uns zunächst an die Grundlagen der scharfen Logik- und Mengen-Konzepte. Nach dem Exkurs über die Fuzzy-Konzepte (siehe Seite 23) formulieren wir anschließend (siehe Seite 41) Fragestellungen der *Fuzzy Linearen Programmierung* und zeigen den Lösungsweg auf.
Die Aussagenlogik sowie die Prädikatenlogik und die klassischen Mengen sind Ihnen in der Veranstaltung *mathematische Grundlagen* bzw. in der Veranstaltung *mathematische und physikalische Grundlagen* im ersten Semester begegnet.

[3] Lotfali Askar-Zadeh (* 1921) ist Mathematiker, Informariker und Elektroingenieur. Er ist emeriterter Professor für Computer Science der University of California.

[4] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 19. Februar jul./ 3. März 1845 greg. in Sankt Petersburg; †6. Januar 1918 in Halle an der Saale) war ein deutscher Mathematiker.

[5] Julius Wilhelm Richard Dedekind (* 6. Oktober 1831 in Braunschweig; † 12. Februar 1916 ebenda) war ein deutscher Mathematiker.

[6] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (* 27. Juli 1871 in Berlin; †21. Mai 1953 in Freiburg im Breisgau) war ein deutscher Mathematiker.

[7] Adolf Abraham Halevi Fraenkel (* 17. Februar 1891 in München; †15. Oktober 1965 in Jerusalem), war ein deutsch-israelischer Mathematiker.

[8] George Boole (* 2. November 1815 in Lincoln, England; † 8. Dezember 1864 in Ballintemple, in der Grafschaft Cork, Irland) war ein englischer Mathematiker (Autodidakt), Logiker und Philosoph.

[9] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (* 8. November 1848 in Wismar; † 26. Juli 1925 in Bad Kleinen) war ein deutscher Logiker, Mathematiker und Philosoph.

Abgrenzung des Unschärfe-Begriffs der Fuzzy-Set-Theory von der in der Wahrscheinlichkeitsrechung Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können Aussagen getroffen werden, über das Eintreten von Ereignissen. Wenn ein Ereignis eingetreten ist, dass ist dieses jedoch unschärfefrei. Von einem eingetretenen Ereignis lassen sich alle Eigenschaften konkret ohne Unsicherheit / ohne Unschärfe feststellen, z.B. mit geeigneter Messung.

Bei der Fuzzy-Set-Theory liegt die Unschärfe nicht im Eintreten eines Ereignisses, sondern viel eher im Datenbestand selber.

Diesen Umstand soll der Vergleich zweier Urnenmodelle verbildlichen.

Beispiel 1.1 (Urnenmodell (Wahrscheinlichkeit))**.** Gegeben eine Urne gefüllt mit schwarzen und weißen Kugeln. Beim *blinden* Ziehen einer Kugel ist es unsicher, ob eine schwarze oder eben weiße Kugel gezogen wird. Nach der Ziehung ist es eindeutig feststellbar, ob die Kugel schwarz ist, bzw. das genaue Gegenteil zutrifft, dann nämlich wenn sie weiß ist.

Beispiel 1.2 (Urnenmodell (Fuzzy-Set))**.** Gegeben eine Urne gefüllt mit Kugeln, die weiß oder schwarz sind, sowie Kugeln, deren homogene Färbung aus dem Grauwert-Spektrum zwischen schwarz und weiß stammt. Nach einer *blinden* Ziehung ist es nun im Allgemeinen nicht eindeutig feststellbar, zu welcher Menge die Kugel zuordenbar ist. Hell-graue Kugeln kommen wohl *eher* in die Menge der weißen Kugeln, und dunkel-graue Kugeln kommen wohl dort *eher nicht* hinein. Jede graue Kugel passt *zu einem gewissen aber unterschiedlichen Grad* in beide Mengen.

Erinnerung: BOOLEsche Logik, formale Aussagenlogik

In der Aussagenlogik geht es um das Bestimmen von Wahrheitswerten einer Aussage oder einer Kombination von Aussagen.

Definition 1.6. (Wahrheitssymbol, aussagenlogische Formel, Aussagensatz):
Jedes (aussagenlogische) Symbol, das für eine Aussage[10] steht, ist ein *Aussagensatz*.
Die Wahrheitssymbole sowie jede Aussage selbst sind *Aussagesätze*.
Aussagen lassen sich mit Verknüpfungssymbolen zu einer neuen Aussage verschmelzen.
Jede Aussage lässt sich als Formel notieren.

Wahrheitssymbole	Bedeutung
$true$, 1	richtig, wahr
$false$, 0	falsch, unwahr

[10] Aussagen können der realen Welt entstammen oder von abstrakten Dingen handeln.

Verknüpfungssymbole	Bedeutung
$\neg$	Negation
$\wedge$	Konjunktion
$\vee$	Disjunktion
$\rightarrow$	Implikation
$\leftrightarrow$	Äquivalenz [11]

seltener benutzt sind:	
$if - then$	Bedingung mit Folgerung
$if - then - else$	Bedingung mit Folgerung und Alternative

Häufig werden auch $\Rightarrow$ für Implikation, $\Leftrightarrow$ für Äquivalenz benutzt. Diese Zeichen werden hier in diesem Kapitel als „metasprachliche Elemente" benutzt, um Aussagen über logische Formeln machen zu können, ohne den Wert der betrachteten Formel zu manipulieren. Es bedeuten $\Rightarrow$ *metasprachliche Implikation* und $\Leftrightarrow$ *metasprachliche Äquivalenz*.

Definition 1.7. (Interpretation einer Formel): Die Zuweisung von Wahrheitswerten ($true$ oder $false$ bzw 1 oder 0) zu den aussagenlogischen Symbolen in einer Formel heißt *Interpretation* einer Formel.

Satz 1.1 (vom ausgeschlossenen Dritten / tertium non datur)**.** *Der Wahrheitswert – oder kurz: Wert – einer Formel ist $true$ oder $false$, nie beides gleichzeitig.*

Satz 1.2 (über die Extensionalität)**.** *Der Wahrheitswert jeder zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt.*

Definition 1.8. (Gültige Formel, Tautologie): Eine Formel F ist *gültig* (engl. valid), falls der Wert von F unter jeder Interpretation $true$ ist. F wird dann *Tautologie* genannt.

Rechnen mit logischen Formeln Die Grundlage für werterhaltende äquivalente Manipulation einer logischen Formel F und zur Bestimmung des Wertes von F unter einer vorgenommenen Interpretation sind die durch die algebraische Struktur, die BOOLEsche Algebra genannt wird, vorgegebenen Operationen:

Kommutativgesetze	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetze	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
Idempotenzgesetze	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Neutralitätsgesetze	$a \wedge 1 = a$	$a \vee 0 = a$
Extremalgesetze	$a \wedge 0 = 0$	$a \vee 1 = 1$
Doppelnegationsgesetz (Involution[12])	$\neg(\neg a) = a$	
De Morgansche Gesetze	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Komplementärgesetze	$a \wedge \neg a = 0$	$a \vee \neg a = 1$
Dualitätsgesetze	$\neg 0 = 1$	$\neg 1 = 0$
Absorptionsgesetze	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$

[11] Das Zeichen für die mathematische Äquivalenzrelation wäre $\equiv$.

[12] Allgemein ist eine Involution eine selbstinverse Abbildung. Das lateinische Wort *involutus* bedeutet *schwer verständlich* hingegen bedeutet das lateinische Wort *involutio* zu Deutsch *Gewinde*.

Erinnerung: Prädikatenlogik (erster Ordnung)

Konstanten und Variablen beschreiben Objekte, Funktionssymbole und Prädikatssymbole beschreiben Funktionen und Relationen auf diesen Objekten (vgl. [Har2004]).
TODO AFTER 5. März 2013...

Erinnerung: Prädikatenlogik (zweiter Ordnung)

Sie erweitert die Prädikatenlogik erster Stufe um die Möglichkeit, über alle Relationen zu quantifizieren. Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe ist daher echt ausdrucksstärker als die der ersten Stufe. Leider hat sie den Verlust wichtiger Sätze zu beklagen, wie etwa den

- GÖDELschen Vollständigkeitssatz
- Kompaktheitssatz, auch Endlichkeitssatz genannt.

TODO AFTER 5. März 2013...

Erinnerung: klassische Mengen

Klassische Mengen werden auch *crispe* Mengen genannt, denn es ist scharf (engl. *crisp*) entscheidbar, ob ein Element zu einer Menge gehört oder eben nicht. Zu dieser Entscheidung kann formal eine *charakteristische Funktion* (s.u.) benutzt werden.

Element einer Menge Seien e ein „Etwas" und $\boldsymbol{M}$ eine Menge, dann bedeutet

$e \in \boldsymbol{M}$ e ist Element der Menge $\boldsymbol{M}$

$e \notin \boldsymbol{M}$ e ist kein Element der Menge $\boldsymbol{M}$

Sind die klassischen (d.h. crispen) Mengen $\boldsymbol{M}_i$ über dem Grundbereich $\boldsymbol{X}$ definiert, so ist jedes $\boldsymbol{M}_i$ eine Teilmenge von $\boldsymbol{X}$.
Beispielsweise kann eine (crispe) Menge $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{X}$ beschrieben werden als

Aufzählung $\boldsymbol{M} = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Charakterisierung $\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{X} \mid |x| \leq 42\}$

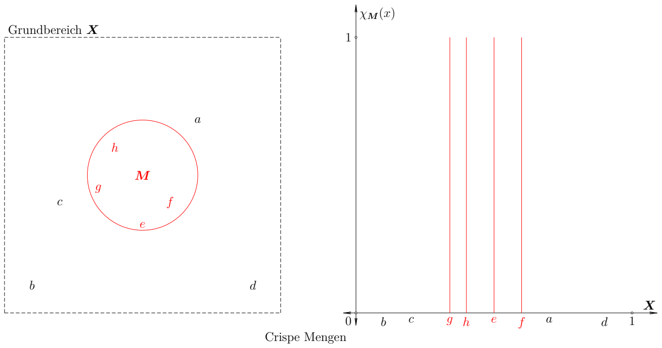
Die *charakteristische Funktion* von $\boldsymbol{M}$, mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{X}$ und $x \in \boldsymbol{X}$, wird definiert durch

$$\chi_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{X} \to \{0; 1\} \quad , \quad x \mapsto \chi_{\boldsymbol{M}}(x)$$

wobei

$$\chi_{\boldsymbol{M}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \boldsymbol{M} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Wie man sieht, ist die charakteristische Funktion für klassische Mengen nicht besonders interessant.



Für die Definition von *Fuzzy-Mengen* jedoch werden charakteristische Funktionen wichtig werden (siehe Seite 23).

Einfache, d.h. grundlegende, Mengenoperationen

Definition 1.9. (Komplement: ^{C}): Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{X}$ zwei Mengen mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$, dann ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}^C = \{x \mid x \notin \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{X}\}$$

das Komplement der Menge $\boldsymbol{A}$. Für die zugehörige charakteristische Funktion gilt:

$$\chi_{\boldsymbol{A}^C}(x) = 1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x)$$

Definition 1.10. (Schnitt: $\cap$): Seinen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Mengen, dann ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}\}$$

die Schnittmenge von $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{B}$. Für die zugehörige charakteristische Funktion gilt:

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(x) &= \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\}\\ &= \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \cdot \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\end{aligned}$$

Definition 1.11. (Vereinigung: $\cup$): Seinen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Mengen, dann ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}\}$$

die Vereinigungsmenge von $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{B}$. Für die zugehörige charakteristische Funktion gilt:

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}(x) &= \max\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\}\\ &= 1 - ((1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x)) \cdot (1 - \chi_{\boldsymbol{B}}(x)))\end{aligned}$$

Definition 1.12. (Subtraktion: \\): Seinen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Mengen, dann ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}\}$$

das Ergebnis der Subtraktion der $\boldsymbol{B}$ von $\boldsymbol{A}$. Für die zugehörige charakteristische Funktion gilt:

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{B}}(x) &= \max\{0, \chi_{\boldsymbol{A}}(x) - \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\}\\ &= \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \cdot (1 - \chi_{\boldsymbol{B}}(x))\end{aligned}$$

Ähnlich der Situation bei der Boolschen Aussagenlogik gelten für crispe Mengen gleichzeitig das Gesetz der Idempotenz ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$), der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^C = \boldsymbol{X}$) sowie der Satz vom Widerspruch ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^C = \emptyset$).

Erweiterte Mengenoperationen

In der Veranstaltung Datenbanksysteme des zweiten Semesters haben Sie neben der Sprache `SQL` auch die Notation der *Relationalen Algebra* kennen gelernt. Das sind im wesentlichen Operationen auf Tupeln, also Operationen auf mehrdimensionalen Mengenelementen.

Definition 1.13. (Kreuzprodukt: $\times$, Tupelbildung): Seinen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Mengen; und es seien die Elemente $x \in \boldsymbol{A}$, $y \in \boldsymbol{B}$, dann ist

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) \mid \forall x, \forall y \text{ mit } x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}\}$$

das *Tupel* (x, y) das Ergebnis des *Kreuzprodukts*.
Das *n-dimensionale Tupel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist Mengenelement des Ergebnisses eines Kreuzproduktes von n (**nicht** notwendigerweise verschiedenen) Mengen;
z.B. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist Mengenelement der Ergebnismenge von

$$\overset{n}{\underset{1}{\times}}(\mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \mathbb{R}^n$$

Definition 1.14. (Selektion: σ): Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{M}$ ein Tupel, dann ist

$$\sigma_{\text{Bedingung}_i(x_j)}(\boldsymbol{M}) = \{x \mid (1 \leq j \leq n) \wedge \forall i \in \mathbb{N} \text{ Bedingung}_i(x_j) = \mathit{true}\}$$

die Menge derjenigen Tupel x, deren fest definierte j-te Komponente die angegebene i-te Bedingung erfüllt.

Definition 1.15. (Projektion: π): Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{M}$ ein Tupel, dann ist

$$\pi_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}}(\boldsymbol{M}) = \{\tilde{x} \mid \tilde{x} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \wedge (k \in \{i_1, \ldots, i_m\}) \wedge (1 \leq k \leq m \leq n)\}$$

die Menge der Tupel, deren Komponenten auf die angegebenen m Komponenten reduziert wurden. Die Reduzierung von n auf m Komponenten ist eine Dimensionsverringerung.

Definition 1.16. (Verbund: $\bowtie$): Es seien $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{S}$ zwei (Tupel-)Mengen, dann ist

$$\boldsymbol{R} \bowtie_{\text{Ausdruck}} \boldsymbol{S} = \sigma_{\text{Ausdruck}}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S}) = \{(r,s)|r \in R \wedge s \in S \wedge \text{Ausdruck} = \mathit{true}\}$$

der *Verbund* (engl. *join*) der beiden (Tupel-)Mengen. $|r| + |s| \in \mathbb{N}$, das ist die Addition der Komponentenanzahlen, liefert die Dimensionalität der Ergebnistupel.

Definition 1.17. (Division: $\div$): Seinen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{S}$ zwei (Tupel-)Mengen. Es seien die Komponenten der Tupeln aus $\boldsymbol{R}$ mit einem eindeutigen Namen versehen, ebenso seien die Komponenten der Tupeln aus $\boldsymbol{S}$ in sich betrachtet eindeutig benannt. Es sei β die Menge der Komponentnamen zu $\boldsymbol{R}$ und γ sei die Menge der Komponentnamen zu $\boldsymbol{S}$. Weiterhin soll $\boldsymbol{R'} = \beta \setminus \gamma$ die Menge der Komponentnamen von $\boldsymbol{R}$ sein, die nicht in der Menge der Komponentnamen von $\boldsymbol{S}$ vorkommen.
Dann liefert

$$\boldsymbol{R} \div \boldsymbol{S} := \pi_{\boldsymbol{R'}}(\boldsymbol{R}) - \pi_{\boldsymbol{R'}}((\pi_{\boldsymbol{R'}}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{S}) - \boldsymbol{R})$$

die Mengendivision von $\boldsymbol{R}$ durch $\boldsymbol{S}$.
Wenn gilt

$$\boldsymbol{R} \div \boldsymbol{S} = \{x \mid x \in (\boldsymbol{R} \div \boldsymbol{S})\} \times \boldsymbol{S} = \{x' \mid x' \in \boldsymbol{R}\}$$

dann sind *Kreuzprodukt* und *Mengendivision* inverse Operationen. Dies ist nur unter bestimmten Bedingungen möglich:
Nämlich wenn $\boldsymbol{R} \div \boldsymbol{S}$ also diejenigen Tupel mit Komponentnamen aus $\boldsymbol{R'}$ enthält, die – erweitert um die Komponentnamen von $\boldsymbol{S}$ – unter Befüllung der zugehörigen Komponenten mit allen Wertmöglichkeiten von $\boldsymbol{S}$, schon in gleicherweise in $\boldsymbol{R}$ vorkommen.

Exkurs: Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Arithmetik

Woher kommen Fuzzy-Mengen?

- linguistische Vorgaben: sehr klein, klein, normal, groß, sehr groß [GRAPHIK HIER]

- zufällige Mengen (z.B. einer Meinungsumfrage) [GRAPHIK HIER]

„Fuzzy" charakteristische Funktion Die *unspannende* charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{M}}$ für crispe Mengen ist schon bekannt (siehe Seite 19).
Die charakteristische Funktion von crispen Mengen ist eine Abbildung in den binären Wertebereich $\{0; 1\}$, d.h. für ein konkretes x gilt entweder $\chi_{\boldsymbol{M}}(x) = 0$ oder $\chi_{\boldsymbol{M}}(x) = 1$.
Hingegen ist die charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{A}}$ von Fuzzy-Mengen $\boldsymbol{A}$ eine Abbildung in das abgeschlossene reellwertige Intervall $[0; 1]$.
Auch das ist auf den ersten Blick nicht besonders aufregend: Denn was soll schon an der Aussage $0 \leq \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \leq 1$ so spannendes sein? Die charakteristische Funktion wird beim Lösen von Fuzzy-LP-Aufgaben eine zentrale Bedeutung bekommen.[13]

Definition 1.18. (Fuzzy-Menge): Eine *Fuzzy-Menge* $\boldsymbol{A}$ ist gegeben durch die charakteristische Funktion

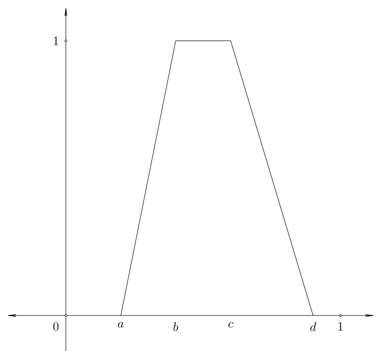
$$\chi_{\boldsymbol{A}} \to [0; 1] \text{ also } 0 \leq \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \leq 1$$

Anschaulich gesprochen gibt $\chi_{\boldsymbol{A}}(x)$ den Zugehörigkeitsanteil eines Elementes x aus dem Grundbereich $\boldsymbol{X}$ zur Fuzzy-Menge $\boldsymbol{A}$ an.
Ist $\boldsymbol{A}$ eine Fuzzy-Menge über dem Grundbereich $\boldsymbol{X}$, so schreiben wir:

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

Betrachten wir uns ein paar Beispiele für charakteristische Funktionen:

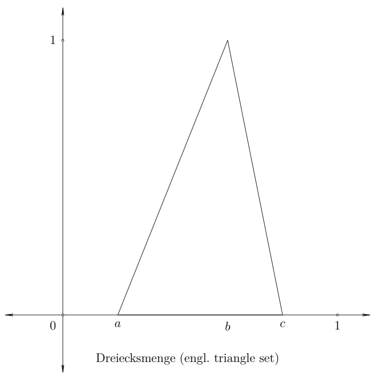
Trapezmenge $\boldsymbol{A} = (a, b, c, d)$: $\chi_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}$



Trapezmenge (engl. trapezoid set)

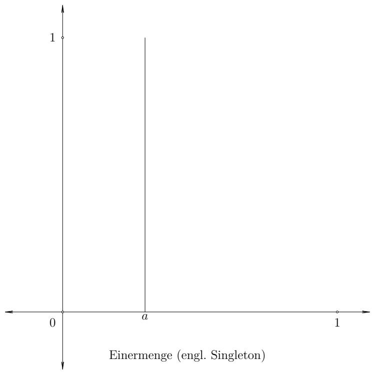
[13] Die Spannung steigt!

Dreiecksmenge $\boldsymbol{A} = (a, b, c)$**:** $\chi_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases}$



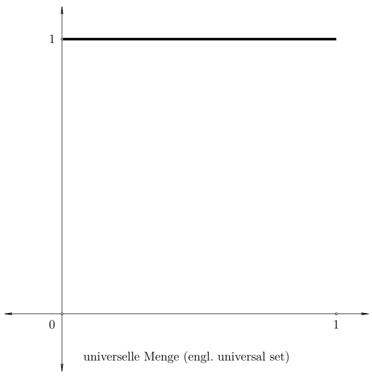
Dreiecksmenge (engl. triangle set)

Singelton $\boldsymbol{A} = (a)$**:** $\chi_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



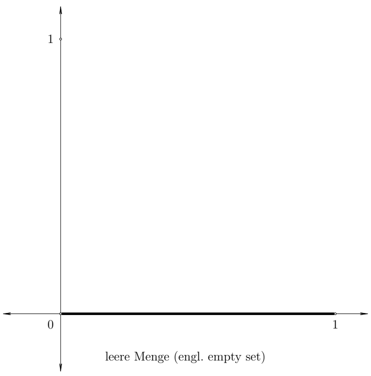
Einermenge (engl. Singleton)

universelle Menge: $\chi_{\boldsymbol{X}}(x) = 1$
($\boldsymbol{X}$ ist der komplette Grundbereich.)



universelle Menge (engl. universal set)

leere Menge: $\chi_{\emptyset}(x) = 0$

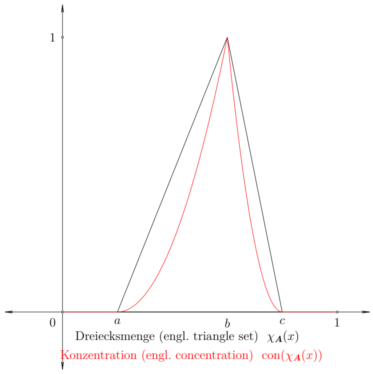


leere Menge (engl. empty set)

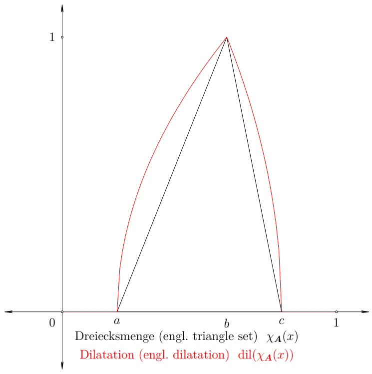
Ebenso können modifizierte GAUSS-Funktionen, verschobene HEAVISIDE-Funktionen, abschnittsweise-lineare Funktionen und andere Funktionen zur Charakterisierung von Fuzzy-Mengen genommen werden.

Bei der mathematischen Umsetzung von beschreibender Sprache kommen zum Einsatz:

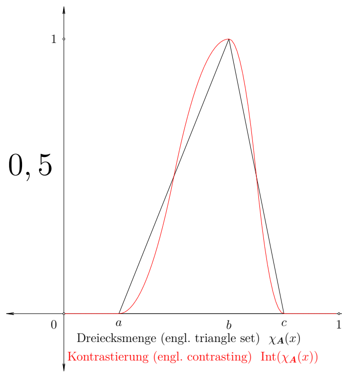
Konzentration (sehr): $\operatorname{con}(\chi_{\boldsymbol{A}}(x)) = \chi^2_{\boldsymbol{A}}(x)$



Dilatation (etwas): $\operatorname{dil}(\chi_{\boldsymbol{A}}(x)) = \sqrt[2]{\chi_{\boldsymbol{A}}(x)}$



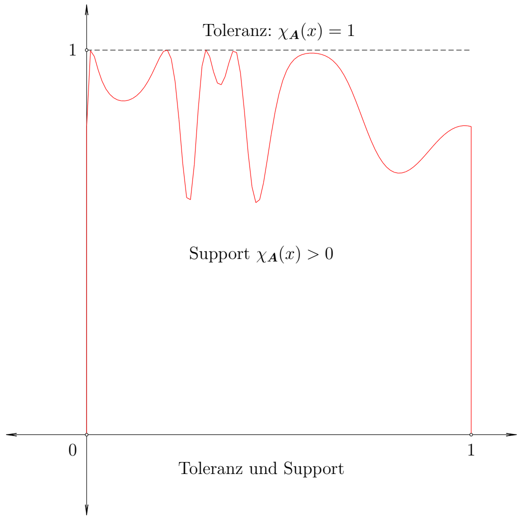
Kontrastierung (wirklich): $\operatorname{Int}(\chi_{\boldsymbol{A}}(x)) = \begin{cases} 2\chi_{\boldsymbol{A}}(x) & \text{für } \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \leq 0,5 \\ 1 - 2\left(1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x)\right)^2 & \text{sonst} \end{cases}$



Die oberen Graphiken zeigen die Anwendung dieser Beschreibungen auf Dreiecksmengen.

Unbetrachtet sind noch verblieben:

- Toleranz einer Fuzzymenge $\boldsymbol{A}$: tolerance($\boldsymbol{A}$) $= \{x \mid \chi_{\boldsymbol{A}}(x) = 1\}$
- Support einer Fuzzymenge $\boldsymbol{A}$: support($\boldsymbol{A}$) $= \{x \mid \chi_{\boldsymbol{A}}(x) > 0\}$



Mengen-Operationen für Fuzzy-Mengen

Wie bei den crispen Mengen (siehe Seite 20) lassen sich Komplement, Schnitt und Vereinigung definieren:

Definition 1.19. (Komplement: ^{C}): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ eine Fuzzy-Menge und $\boldsymbol{X}$ ihr Grundbereich, dann ist das Komplement definiert durch dessen charakteristische Funktion:

$$\chi_{\boldsymbol{A}^C}(x) = 1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x)$$

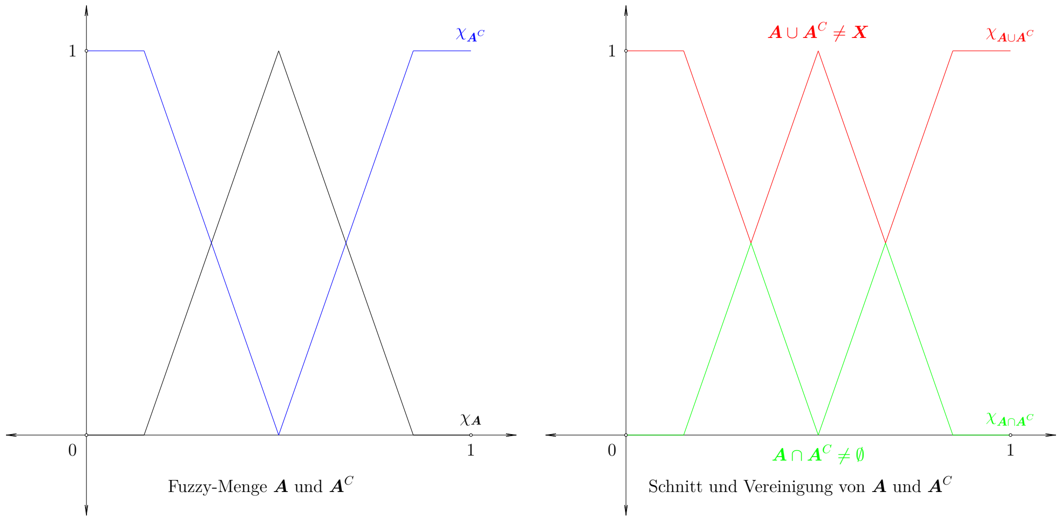
Definition 1.20. (Schnitt: $\cap$): Seinen $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ zwei Fuzzy-Mengen, dann ist ihr Schnitt definiert durch dessen charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(x) &= \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\} \\ &= \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \cdot \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\end{aligned}$$

Definition 1.21. (Vereinigung: $\cup$): Seinen $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ zwei Fuzzy-Mengen, dann ist ihre Vereinigung definiert durch die zugehörige charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}(x) &= \max\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(x)\} \\ &= 1 - ((1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x)) \cdot (1 - \chi_{\boldsymbol{B}}(x)))\end{aligned}$$

Es gelten nicht alle drei Gesetze/Sätze der crispen Mengen (siehe Seite 21) Idempotenz, der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, sowie der Satz vom Widerspruch für Fuzzy-Mengen. Dies ist aber sinnvoll und plausibel.



Verallgemeinerung vom Schnitt

Definition 1.22. (t-Norm: $\top$): Eine Abbildung

$$\top : [0,1]^2 \to [0,1]$$

heißt *t-Norm* falls gilt:

- neutrales Element $\top(a,1) = a$
- Monotonie $(c \leq b) \to (\top(a,c) \leq \top(a,b))$
- Kommutativität $\top(a,b) = \top(b,a)$
- Assoziativität $\top(a,\top(b,c)) = \top(\top(a,b),c)$

Beispiele für t-Normen:

- Minimum-Norm: $\top_{\min}(a,b) = \min\{a,b\}$
- Produkt-Norm: $\top_{\text{prod}}(a,b) = a \cdot b$
- LUKASIEWICZ[14]-Norm: $\top_{\text{Luka}}(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$

[14] JAN ŁUKASIEWICZ (* 21. Dezember 1878 in Lemberg; †13. Februar 1956 in Dublin) war ein polnischer Philosoph, Mathematiker und Logiker. Er war Professor an den Universitäten Lemberg und Warschau. Er führte die *polnische Notation*, die heute als *Präfixnotation* bezeichnet wird, ein. 1920 formalisierte er die dreiwertige Logik Ł3 und schuf so den ersten mehrwertigen und damit nichtklassischen logischen Kalkül.

- Extreme Norm: $\top_{-1}(a,b) = \begin{cases} a & b=1 \\ b & a=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- YAGER[15]-Familie: $\top_{Y_\omega}(a,b) = 1 - \min\{1, ((1-a)^\omega + (1-b)^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\}$ mit $\mathbb{R} \ni \omega > 0$

  Für $\omega = 1$ gilt: $\top_{Y_{\omega=1}}(a,b) = \top_{\text{Luka}}(a,b)$

  Für $\omega \to 0$ gilt: $\top_{Y_{\omega\to 0}}(a,b) = \top_{-1}(a,b)$

  Für $\omega \to \infty$ gilt: $\top_{Y_{\omega\to\infty}}(a,b) = \top_{\min}(a,b)$

  Die YAGER-Familie „interpoliert“ also zwischen den wichtigen t-Normen.

Verallgemeinerung des Komplements

Definition 1.23. (Negation: c): Eine Funktion

$$c : [0,1] \to [0,1]$$

heißt *Negation* falls

- sie monoton fällt,
- sie $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$ erfüllt,
- sie involutiv ist, d.h. $c(c(a)) = a$ gilt.

Die YAGER-Negation-Familie ist für $0 < \omega \in \mathbb{R}$ und $x \in \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F(X)}$ definiert als :

$$c(x) = (1 - x^\omega)^{\frac{1}{\omega}}$$

Verallgemeinerung der Vereinigung

Definition 1.24. (t-Conorm: $\perp$): Eine Abbildung

$$\perp : [0,1]^2 \to [0,1]$$

heißt *t-Conorm* falls gilt:

- neutrales Element $\perp(a,0) = a$
- Monotonie $(c \leq b) \to (\perp(c,a) \leq \perp(b,a))$
- Kommutativität $\perp(a,b) = \perp(b,a)$
- Assoziativität $\perp(a, \perp(b,c)) = \perp(\perp(a,b),c)$

Nun können wir mit Fuzzy-Mengen ähnlich wie mit klassischen Mengen operieren. Zum Lösen von Aufgaben des Fuzzy-LP benötigen wir zusätzlich eine Möglichkeit arithmetische Operationen für Fuzzy-Mengen ähnlich der Addition und Multiplikation von Zahlen auszudrücken.

[15] RONALD R. YAGER ist Professor für Informationssysteme an dem Iona College und Direktor des dortigen Instituts für Machine Intelligence. Ungefähr 1980 entdeckte er die Formel. Im Jahr 2004 wurde er mit dem IEEE Computational Intelligence Society Fuzzy Systems Pioneer Award geehrt.

Arithmetik mit Fuzzy-Mengen als Fuzzy-Zahlen

Definition 1.25. (Produkt: $\times$): Seien $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$ zwei Fuzzy-Mengen, und $a \in \boldsymbol{A}$ sowie $b \in \boldsymbol{B}$ dann ist das *Produkt*

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$$

definiert über seine charakteristische Funktion

$$\chi_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}(a,b) = \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(a), \chi_{\boldsymbol{B}}(b)\}$$

Definition 1.26. (Projektion: $\pi_{\boldsymbol{X}}$): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$ eine Fuzzy-Menge und $a \in \boldsymbol{X}$ sowie $b \in \boldsymbol{Y}$, dann ist die *Projektion auf* $\boldsymbol{X}$

$$\pi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$$

definiert über ihre charakteristische Funktion

$$\chi_{\pi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A})}(a) = \sup_{b} \chi_{\boldsymbol{A}}(a,b)$$

Definition 1.27. (Projektion: $\pi_{\boldsymbol{Y}}$): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$ eine Fuzzy-Menge und $a \in \boldsymbol{X}$ sowie $b \in \boldsymbol{Y}$, dann ist die *Projektion auf* $\boldsymbol{Y}$

$$\pi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$$

definiert über ihre charakteristische Funktion

$$\chi_{\pi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{A})}(b) = \sup_{a} \chi_{\boldsymbol{A}}(a,b)$$

Definition 1.28. (max-min-Komposition): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z})$, dann ist die *max-min-Komposition*

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$$

definiert über ihre charakteristische Funktion

$$\chi_{\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}}(x,z) = \sup_{y \in \boldsymbol{Y}} \min\{\chi_{\boldsymbol{a}}(x,y), \chi_{\boldsymbol{B}}(y,z)\}$$

Definition 1.29. (Fuzzy-Zahl, normale Fuzzy-Menge, konvexe Fuzzy-Menge): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ eine Fuzzy-Menge. $\boldsymbol{A}$ heißt *Fuzzy-Zahl* genau dann, wenn

1. für alle $x_1, x_2 \in \boldsymbol{X}$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt: $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x_1), \chi_{\boldsymbol{A}}(x_2)\}$ (genau dann ist $\boldsymbol{A}$ eine *konvexe Fuzzy-Menge*)

2. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ und es *genau einen* Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ *existiert* für den die charakteristische Funktion den Wert 1 liefert: $\exists! x_0 \in \mathbb{R} : \chi_{\boldsymbol{A}}(x_0) = 1$ (genau dann ist $\boldsymbol{A}$ eine *normale Fuzzy-Menge*),

3. die charakteristische Funktion stückweise stetig ist.

Definition 1.30. (negative und positive Fuzzy-Zahlen): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl. $\boldsymbol{A}$ heißt

$$\begin{aligned} \text{positiv wenn} \chi_{\boldsymbol{A}}(x) &= 0 \forall x \leq 0 \\ \text{negativ wenn} \chi_{\boldsymbol{A}}(x) &= 0 \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Definition 1.31. (Fuzzy-Null): Eine Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{A}$ heißt *Fuzzy-Null* genau dann, wenn

$$\exists r \in \mathbb{R} \text{ mit der Eigenschaft:} (\chi_{\boldsymbol{A}}(r) \neq 0) \wedge (\chi_{\boldsymbol{A}}(-r) \neq 0)$$

Es gibt unendlich viele verschiedene Fuzzy-Mengen, die jeweils Fuzzy-Null heißen.

Grundrechenarten

Um die Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division eines skalaren Wertes oder einer Fuzzy-Menge mit einer anderen Fuzzy-Menge oder einem anderen skalaren Wert zu definieren, greifen wir auf die *Intervallarithmetik* zurück. Die moderne Intervallarithmetik basiert auf den Arbeiten von RAMON E. MOORE[16].
Wir unterteilen eine Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ in Intervalle über dem Grundbereich $\boldsymbol{X}$ mit „trennenden“ Operatoren, welche die Funktionswerte von $\chi_{\boldsymbol{A}}$ aufteilen:

Definition 1.32. (α-Schnitt): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ eine Fuzzy-Menge über $\boldsymbol{X}$ und $\alpha \geq 0$, dann ist der α-Schnitt die Menge

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_{\alpha} = \{x \mid x \in \boldsymbol{X} \wedge \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Es gilt $\chi_{\boldsymbol{A}}(x) = \sup_{\alpha}\{x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_{\alpha}\}$.

Definition 1.33. (strikter α-Schnitt): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ eine Fuzzy-Menge über $\boldsymbol{X}$ und $\alpha \geq 0$, dann ist der strikte α-Schnitt gegeben als

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_{\bar{\alpha}} = \{x \mid x \in \boldsymbol{X} \wedge \chi_{\boldsymbol{A}}(x) > \alpha\} \text{ (also ohne Rand)}$$

Es gilt $\chi_{\boldsymbol{A}}(x) = \sup_{\alpha}\{x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_{\bar{\alpha}}\}$.

[16] RAMON EDGAR MOORE (* 27. Dezember 1929 in Sacramento, Kalifornien) ist ein US-amerikanischer Mathematiker. Er arbeitete im Forschungszentrum der Firma Lockheed. Er war von 1965 bis 1981 Professor an der University of Wisconsin-Madison und von 1986 bis 2000 an der Ohio State University. MOORE war Gastprofessor an Universitäten in England, Deutschland und Schweden.

Erinnerung: Intervallarithmetik

Definition 1.34. (Intervall Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, einstellige Operation): In [MY1959] beschreibt Moore deutlich wie mit Intervallen zu rechnen ist:
Seien I_1 und I_2 zwei abgeschlossene Intervalle über $\mathbb{R}$ und a, b, c, d jeweils aus $\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} I_1 &= [a, b] \text{ wobei } a \leq b \\ I_2 &= [c, d] \text{ wobei } c \leq d \end{aligned}$$

dann sind die Grundrechenarten

Addition:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= [\min\{a+c, a+d, b+c, b+d\}, \max\{a+c, a+d, b+c, b+d\}] \\ &= [a+c, b+d] \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= [\min\{a-c, a-d, b-c, b-d\}, \max\{a-c, a-d, b-c, b-d\}] \\ &= [a-d, b-c] \end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot I_2 &= [\min\{a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d\}, \max\{a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d\}] \\ &= \begin{cases} [a \cdot c, b \cdot d] & \text{für } a \geq 0 \wedge c \geq 0 \\ [b \cdot c, b \cdot d] & \text{für } a \geq 0 \wedge c < 0 < d \\ [b \cdot c, a \cdot d] & \text{für } a \geq 0 \wedge d \leq 0 \\ [a \cdot b, b \cdot d] & \text{für } a < 0 < b \wedge c \geq 0 \\ [\min\{b \cdot c, a \cdot d\}, \min\{a \cdot c, b \cdot d\}] & \text{für } a < 0 < b \wedge c < 0 < d \\ [b \cdot c, a \cdot c] & \text{für } a < 0 < b \wedge d \geq 0 \\ [a \cdot d, b \cdot c] & \text{für } b \leq 0 \wedge c \geq 0 \\ [a \cdot d, a \cdot c] & \text{für } b \leq 0 \wedge c < 0 < d \\ [b \cdot d, a \cdot c] & \text{für } b \leq 0 \wedge d \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned} I_1/I_2 &= [a, b]/[c, d] = [a, b] \cdot \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right] \text{ falls } 0 \notin [c, d]^{17} \\ &= \left[\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}\right] \end{aligned}$$

[17] Falls $0 \in [c, d]$, dann wird bei der Division bei Null aufgetrennt
$I_1/I_2 = [a, b]/[c, d] = [a, b]/[c, -\varepsilon] \cup [a, b]/[+\varepsilon, d]$ mit $\varepsilon > 0$
wobei ε *nur leicht verschieden* von Null sein darf.

Sei $\varphi \in \{\sqrt{\ }, \exp, \ln, \log, \text{abs}, \sin, \cos, \ldots\}$ eine stetige, einstellige Operation in $\mathbb{R}$, dann ist für das Intervall $I = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$ eine passende Operation der Art definiert:

$$\varphi([a_1, a_2]) = \{\varphi(x) \mid a_1 \leq x \leq a_2\}$$

Ist φ monoton, so gilt:

$$\varphi([a_1, a_2]) = [\min \varphi(x), \max \varphi(x)] \text{ für } a_1 \leq x \leq a_2$$

Hinweis. Für

offene Intervalle $]a, b[$

halboffene Intervalle $]a, b]$ bzw. $[a, b[$

können obige Regeln ebenso angewendet werden, indem man offenen Intervallgrenzen durch eine jeweils geringfügig größere bzw. kleinere Grenzzahlen ersetzt:

offene Grenze	geschlossene Grenze
$]a, b[$	$[a^+, b^-]$
$]a, b]$	$[a^+, b]$
$[a, b[$	$[a, b^-]$

Dabei bedeutet, vgl. [Hyv1989], x^+ eine *geringfügig größere Zahl* als x, und x^- eine *geringfügig kleinere Zahl* als x. Bei der computerunterstützten Intervallarithmetik steht x^+ und x^- für die nächsten darstellbaren Zahlen bezogen auf die Präzision der aktuellen Implementierung .

Hinweis. Skalare Werte $x \in \mathbb{R}$ werden bei der Intervallarithmetik mit dem zugehörigen geschlossenen Intervall $[x, x]$ identifiziert. So ist leicht die Verknüpfung von Intervallen mit Skalaren und umgekehrt umzusetzen.

Anwendung der Intervallarithmetik bei der Verknüpfung von skalaren Werten mit Fuzzy-Mengen

Wie etwas weiter oben erwähnt (siehe Seite 30) werden wir die Grundrechenarten mit *Fuzzy-Zahlen* mithilfe der Intervallarithmetik ausdrücken.

Hinweis. Die (strikten) α-Schnitte von Fuzzy-Mengen, z.B. von Fuzzy-Zahlen, sind *crispe* Mengen. Es ist binär mit BOOLEscher Logik entscheidbar, ob ein Element x des Grundbereiches in den Schnitt gehört oder eben nicht hineingehört.

Wenn $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$ gilt, dann ist der α-Schnitt einer Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{A}$ das geschlossene Intervall:

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha = \{x \mid x \in \boldsymbol{X} \wedge \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_\alpha, b_\alpha]$$

mit $a_\alpha = \min \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$ und $b_\alpha = \max \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$
Diesen Umstand machen wir uns nun bei der Definition der Rechenoperationen, die skalare Werte mit Fuzzy-Mengen verknüpfen, zu Nutze.

Definition 1.35. (Addition: Fuzzy-Zahl mit Skalar): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt bei der *Addition* von $\boldsymbol{A}$ mit r

$$+ : \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$+ : \mathbb{R} \times \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

via

$$\boldsymbol{A} + r \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$r + \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

derart, dass

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha + r = [a_\alpha, b_\alpha] + [r, r] = [a_\alpha + r, b_\alpha + r] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$r + [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha = [r, r] + [a_\alpha, b_\alpha] = [r + a_\alpha, r + b_\alpha] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$\Longrightarrow \text{(Addition ist kommutativ.)}$$

mit $a_\alpha = \min \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$, $b_\alpha = \max \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$.
Für die charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}(x)$ der entstehenden Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{B}$ gilt:

$$\chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = x - r) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(x - r)$$

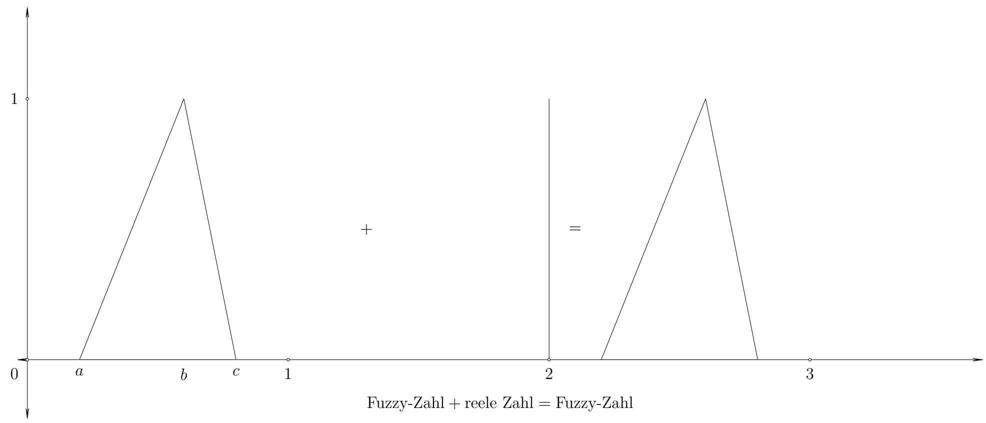
Hinweis.

Ist $\alpha = 1$ so ist $a_\alpha = b_\alpha$.

Wäre $\alpha = 0$ würde $\{a_\alpha, \dots b_\alpha\}$ den kompletten Grundbereich $\mathbb{R}$ ergeben, was für unsere Zwecke wenig hilfreich ist.

Alternativ könnte man in der Definition statt den α-Schnitt $[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha$ auch den strikten α-Schnitt $[\chi_{\boldsymbol{A}}]_{\bar{\alpha}}$ verwenden.

Anschaulich gesprochen resultiert aus der Addition einer Fuzzy-Menge $\boldsymbol{A}$ mit einer reelen Zahl r eine neue Fuzzy-Menge $\boldsymbol{B}$, deren charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}(x)$ durch Verschiebung (translation) von $\chi_{\boldsymbol{A}}(x)$ um r *Einheiten* entlang der X-Achse, also entlang des Grundbereiches, in *positiver Richtung* entsteht. (Verschiebung des Funktionsgraphen von $\chi_{\boldsymbol{A}}$ nach rechts.)



Fuzzy-Zahl + reele Zahl = Fuzzy-Zahl

Definition 1.36. (Multiplikation: Fuzzy-Zahl , Skalar):
Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt bei der *Addition* von $\boldsymbol{A}$ mit r

$$\cdot : \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

via

$$\boldsymbol{A} \cdot r \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$r \cdot \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

derart, dass

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha \cdot r = [a_\alpha, b_\alpha] \cdot [r, r] = [a_\alpha \cdot r, b_\alpha \cdot r] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$r \cdot [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha = [r, r] \cdot [a_\alpha, b_\alpha] = [r \cdot a_\alpha, r \cdot b_\alpha] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$\Longrightarrow \text{(Multiplikation ist kommutativ.)}$$

mit $a_\alpha = \min\{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$, $b_\alpha = \max\{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$.
Für die charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}(x)$ der entstehenden Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{B}$ gilt:

Fall 1)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot k = k \cdot \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \cdot -k = -k \cdot -\boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \left\{\alpha \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \text{ mit } \left(y = \tfrac{x}{k}\right) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\right\} = \chi_{\boldsymbol{A}}\left(\tfrac{x}{k}\right)$$

Fall 2)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot -k = -k \cdot \boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \left\{\alpha \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \text{ mit } \left(y = -\tfrac{x}{k}\right) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\right\} = \chi_{\boldsymbol{A}}\left(-\tfrac{x}{k}\right)$$

Fall 3)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot 0 = 0 \cdot \boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis.
Die Multiplikation einer Fuzzy-Menge mit einem positiven Skalar bedeutet eine Streckung/Dehnung des Funktionsgraphen. Im Gegensatz dazu liefert die Multiplikation einer Fuzzy-Menge mit einem negativen Skalar bedeutet eine Streckung/Dehnung des Funktionsgraphen mit Spiegelung an der y-Achse.

Definition 1.37. (Subtraktion: Fuzzy-Zahl , Skalar): Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt bei der *Subtraktion* von $\boldsymbol{A}$ mit r

$$-: \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$-: \mathbb{R} \times \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

via

$$\boldsymbol{A} - r \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$r - \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

derart, dass

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha - r = [a_\alpha, b_\alpha] - [r, r] = [a_\alpha - r, b_\alpha - r] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$r - [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha = [r, r] - [a_\alpha, b_\alpha] = [r - b_\alpha, r - a_\alpha] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$\Longrightarrow \text{(Subtraktion ist nicht kommutativ.)}$$

mit $a_\alpha = \min\{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$, $b_\alpha = \max\{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$.
Für die charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}(x)$ der entstehenden Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{B}$ gilt:

Fall 1)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - k = \boldsymbol{A} + (-k)$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = x + k) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(x + k)$$

Fall 2)

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A} - k = -1 \cdot (\boldsymbol{A} + k) = -1 \cdot (k + \boldsymbol{A}) = -k - \boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = -x + k) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(-x + k)$$

Fall 3)

$$\boldsymbol{B} = k - \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} + k$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = -x - k) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(-x - k)$$

Hinweis.
Die Subtraktion einer reellen Zahl r von einer Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{A}$ (oder umgekehrt) konstruiert eine neue Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{B}$, deren charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}$ um r *Einheiten* entlang der X-Achse, also entlang des Grundbereiches, in *negativer Richtung* entsteht. (Verschiebung des Funktionsgraphen von $\chi_{\boldsymbol{A}}$ nach links.)

Definition 1.38. (Division: Fuzzy-Zahl , Skalar):
Sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl und $r \in \mathbb{R} \setminus 0$, dann gilt bei der *Division* von $\boldsymbol{A}$ mit r

$$\div : \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$\div : \mathbb{R} \times \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

via

$$\boldsymbol{A} \div r \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$r \div \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$

derart, dass

$$[\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha \div r = [a_\alpha, b_\alpha] \div [r, r] = [\tfrac{a_\alpha}{r}, \tfrac{b_\alpha}{r}] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$r \div [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha = [r, r] \div [a_\alpha, b_\alpha] = [\tfrac{r}{a_\alpha}, \tfrac{r}{b_\alpha}] = [\chi_{\boldsymbol{B}}]_\alpha$$
$$\Longrightarrow \text{(Division ist nicht kommutativ.)}$$

mit $a_\alpha = \min \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$, $b_\alpha = \max \{x \mid x \in [\chi_{\boldsymbol{A}}]_\alpha\}$.
Für die charakteristische Funktion $\chi_{\boldsymbol{B}}(x)$ der entstehenden Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{B}$ gilt:

Fall 1)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \div k = -\boldsymbol{A} \div -k$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = x \cdot k) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(x \cdot k)$$

Fall 2)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \div -k = -\boldsymbol{A} \div k$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \{\alpha \mid y \in \mathbb{R} \text{ mit } (y = -x \cdot k) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\} = \chi_{\boldsymbol{A}}(-x \cdot k)$$

Fall 3)

$$\boldsymbol{B} = k \div \boldsymbol{A} = -k \div -\boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \left\{\alpha \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \text{ mit } \left(y = \tfrac{k}{x}\right) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\right\} = \chi_{\boldsymbol{A}}\left(\tfrac{k}{x}\right)$$

Fall 4)

$$\boldsymbol{B} = -k \div \boldsymbol{A} = k \div -\boldsymbol{A}$$
$$\Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \max_\alpha \bigcup_{\alpha=0}^{1} \left\{\alpha \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \text{ mit } \left(y = -\tfrac{k}{x}\right) \wedge (y \in [\chi_{\boldsymbol{A}}(y)]_\alpha)\right\} = \chi_{\boldsymbol{A}}\left(-\tfrac{k}{x}\right)$$

Hinweis.
Die Division bewirkt eine Stauchung der Fuzzy-Menge.

Bemerkung. Die oben angeführten Definitionen der Rechenoperationen für Fuzzy-Zahlen mit Skalaren gelten ebenso für die arithmetischen Verknüpfungen von allgemeinen Fuzzy-Mengen mit Skalaren.

Bemerkung (Rechnen mit Fuzzy-Dreiecksmengen)**.** Ist die Fuzzy-Menge eine Fuzzy-Zahl, die durch eine Dreiecksmenge beschrieben wird; dann ist die Notation der Berechnungen sehr ähnlich der Notation der Rechnungen der Intervall-Arithmetik. Schauen wir uns folgende Beispiele an:

- Addition:

  $(a, b, c) + k = (a + k, b + k, c + k) = (k + a, k + b, k + c) = k + (a, b, c)$

- Multiplikation:

  $(a, b, c) \cdot k = (a \cdot k, b \cdot k, c \cdot k) = (k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c) = k \cdot (a, b, c)$

  $$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot -k &= (-c \cdot k, -b \cdot k, -a \cdot k) = -k \cdot (a, b, c) \\ &= (-c \cdot k, -b \cdot k, -a \cdot k) = (-c, -b, -a) \cdot k = -(a, b, c) \cdot k \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} -(a, b, c) \cdot -k &= (-c, -b, -a) \cdot -k = -k \cdot (-c, -b, -a) = -1(k \cdot (-c, -b, -a)) \\ &= -1(-c \cdot k, -b \cdot k, -a \cdot k) = (a \cdot k, b \cdot k, c \cdot k) = k \cdot (a, b, c) \end{aligned}$$

  $(a, b, c) \cdot 0 = (a \cdot 0, b \cdot 0, c \cdot 0) = (0^-, 0, 0^+) = $ „0“

- Subtraktion:

  $(a, b, c) - k = (a, b, c) + (-k) = (a - k, b - k, c - k)$

  $$\begin{aligned} -(a, b, c) - k &= -1((a, b, c) + k) = -1(a + k, b + k, c + k) = (-c - k, -b - k, -a - k) \\ &= -1(a + k, b + k, c + k) = -1((a, b, c) + k) = -k - (a, b, c) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} k - (a, b, c) &= -(a, b, c) + k = -1((a, b, c) - k) \\ &= -1(a - k, b - k, c - k) = (-c + k, -b + k, -a + k) \end{aligned}$$

- Division:

  $(a, b, c) \div k = (\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}) = -(a, b, c) \div -k$

  $(a, b, c) \div (-k) = (-\frac{c}{k}, -\frac{b}{k}, -\frac{a}{k}) = -(a, b, c) \div k$

  $k \div (a, b, c) = (\frac{k}{c}, \frac{k}{b}, \frac{k}{a}) = -k \div -(a, b, c)$

  $-k \div (a, b, c) = (-\frac{k}{a}, -\frac{k}{b}, -\frac{k}{c}) = k \div -(a, b, c)$

- Kombinierte Operationen:

  $\boldsymbol{B} = t + s\boldsymbol{A} = t + s(a, b, c) = (t + as, t + bs, t + cs) \Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\boldsymbol{A}}(\frac{x-t}{s})$

  $\boldsymbol{B} = t - s\boldsymbol{A} = t - s(a, b, c) = (t - cs, t - bs, t - as) \Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\boldsymbol{A}}(-\frac{x-t}{s})$

  $\boldsymbol{B} = -t - s\boldsymbol{A} = -t - s(a, b, c) = (-t - cs, -t - bs, -t - as) \Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\boldsymbol{A}}(-\frac{x+t}{s})$

  $\boldsymbol{B} = -t + s\boldsymbol{A} = -t + s(a, b, c) = (-t + as, -t + bs, -t + cs) \Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\boldsymbol{A}}(\frac{x+t}{s})$

  $\boldsymbol{B} = k \div (s\boldsymbol{A}) = k \div (s(a, b, c)) = (\frac{k}{cs}, \frac{k}{bs}, \frac{k}{as}) \Rightarrow \chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\boldsymbol{A}}(\frac{k}{xs})$

Fuzzy-Arithmetik: Extensionsprinzip

Da wir später (siehe Seite 44) unscharfe Bedingungen an unser lineares Optimierungsproblem stellen wollen, müssen wir nun noch klären, wie Fuzzy-Mengen mit Fuzzy-Mengen arithmetisch verknüpft werden können. Bisher können wir nur die arithmetischen Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen mit skalaren Werten formulieren. Insbesondere haben wir eine einfache Notation für die Arithmetik mit Fuzzy-Zahlen, die Dreiecksmengen sind, kennen gelernt.
Die Definition der *Extension einer Funktion* (s.u.) ist ein elementarer Bestandteil der ZADEHschen *fuzzy set theory.* BÖHME[18] zitiert in [Böh1993, S.141] ZADEH mit dem Wortlaut:

> "Let us now briefly present the extension principle which is one of the most important and powerful tools in the theory of fuzzy sets. The extension principle adresses the folowing fundermental problem: if there is some relationship between nonfuzzy entities, then what is its equivalent between fuzzy entities? The extension principle makes it therefore possible to extend some known models or algorithms involving nonfuzzy variables to the case of fuzzy variables."

Schon in der Schulmathematik haben wir mit reellen Zahlen rechnen gelernt. Es gibt also Beziehungen zwischen reellen Zahlen, die wir als Relationen oder Funktionen ausdrücken können. Wir wollen und nun gemeinsam überlegen, wie mithilfe des Extensionsprinzip eine ähnliche Beziehung zwischen Fuzzy-Zahlen formuliert werden kann.

Definition 1.39. (Extension einer Funktion): Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ und $y \in Y$ sowie $f : \boldsymbol{X}^n \to \boldsymbol{Y}$ mit $x \mapsto y = f(x)$ gegeben, dann sei für $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n) \in \boldsymbol{F(X)}^n$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F(Y)}$ die *Extension von f* definiert als

$$\hat{f} : \boldsymbol{F(X)}^n \to \boldsymbol{F(Y)}$$
$$\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B} = \hat{f}(\boldsymbol{A})$$

via der charakteristischen Funktion

$$\chi_{\boldsymbol{B}}(y) = \chi_{\boldsymbol{\hat{f}(A)}}(y) = \sup_{x_i \in X | y = f(x)} \top \{\chi_{\boldsymbol{A}_i}(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

dabei sei definiert: $\sup \emptyset = 0$

[18] GERT BÖHME(* 1942; †1995) war Professor für Informatik/Mathematik an der Hochschule Furtwangen. Er hat sich in der Hochschuldidaktik verdient gemacht.

Eine einfache t-Norm, die man sinnvollerweise bei der Anwendung des Extensionsprinzips nutzen kann, ist die Minimums-Norm; also $\top = \min$.

Anwendung des Extensionsprinzips auf zweistellige Funktionen

Seien $x \in X$ und $y \in Y$ und $f : X \times Y \to Z$ mit $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ gegeben. Weiterhin seien die zwei Fuzzy-Mengen $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F(X)}$ und $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F(Y)}$ gegeben. Die Fuzzy-Menge $\hat{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{F(Z)}$ wird bestimmt durch ihre charakteristische Funktion:

$$\chi_{\boldsymbol{C}}(z) = \sup_{x,y}(\min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(y) \mid f(x,y) = z\})$$

Definition 1.40. (Addition von Fuzzy-Mengen):

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}(z) &= \sup_{z=x+y} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup_{x} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Definition 1.41. (Subtraktion von Fuzzy-Mengen):

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}(z) &= \sup_{z=x-y} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup_{x} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(x - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Definition 1.42. (Multiplikation von Fuzzy-Mengen):

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}(z) &= \sup_{z=x\cdot y} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup_{x} \min\left\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}\left(\tfrac{z}{x}\right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Definition 1.43. (Division von Fuzzy-Mengen):

$$\begin{aligned}\chi_{\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{B}}(z) &= \sup_{z=x\div y} \min\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}(y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup_{x} \min\left\{\chi_{\boldsymbol{A}}(x), \chi_{\boldsymbol{B}}\left(\tfrac{x}{z}\right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

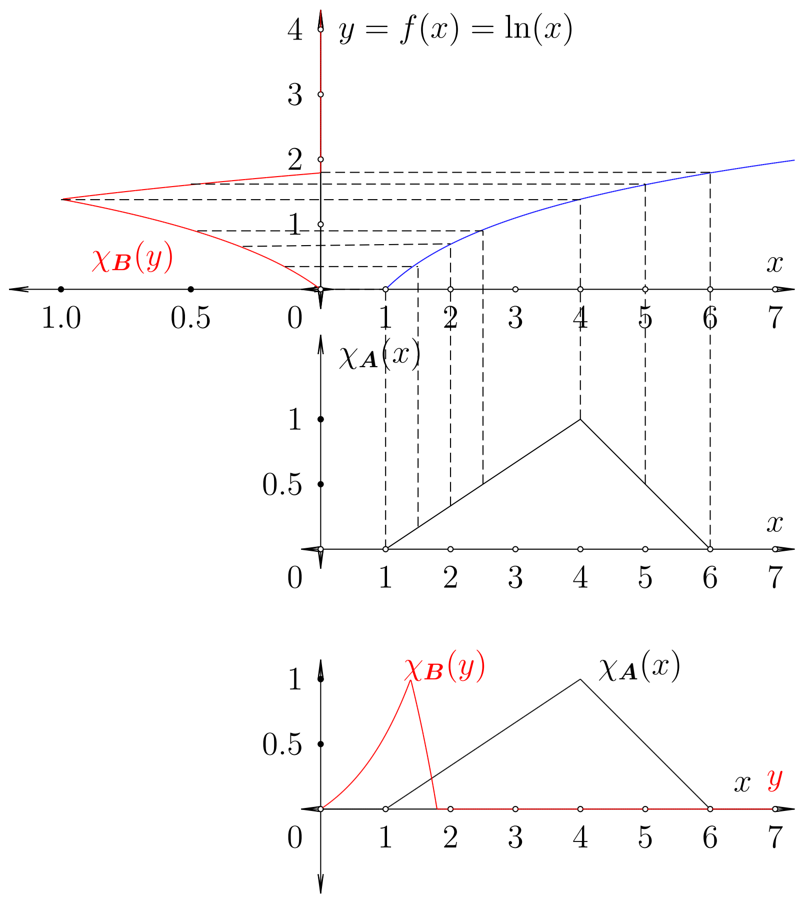
Anwendung des Extensionsprinzip auf eine einstellige Funktion
Es seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Des weiteren sei $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ eine Fuzzy-Zahl.

Die Fuzzy-Menge $\boldsymbol{B} = \hat{f}(\boldsymbol{A})$ wird durch die Extension von f vermöge der zugehörigen charakteristischen Funktion bestimmt:

$$\chi_{\boldsymbol{B}}(x) = \chi_{\hat{f}(\boldsymbol{A})}(x) = \sup_x \{\chi_{\boldsymbol{A}}(x) \mid y = f(x)\}$$

Beispiel 1.3. Was ist dann der Logarithmus der Fuzzy-Zahl $\boldsymbol{A}$?

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (1,4,6) \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \\
\boldsymbol{B} &\in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \\
\boldsymbol{B} &= \hat{f}(\boldsymbol{A}) = \ln(\boldsymbol{A}) \\
\chi_{\boldsymbol{B}}(y) &= \sup_x \{\chi_{\boldsymbol{A}}(x) \mid y = \ln(x)\}
\end{aligned}$$



1.3.3 Formulierung des Simplex-Verfahren der Fuzzy Linearen Programmierung

Bei der Formulierung der Fuzzy-LP-spezifichen Unsicherheiten wollen wir möglichste nahe an der Notation der klassischen Linearen Programmierung bleiben.

Im klassischen Fall kennen wir:

$$\begin{aligned} z = z(x, y) &= 5x + 7y \\ LP &: \max\{z\} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 240 \\ 4x + 2y &\leq 400 \\ x + 3y &\leq 210 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Ein Formulierungsversuch mit Fuzzy-Zahlen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (4; 5; 6) \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \\ \boldsymbol{B} &= (6,3; 7; 7,7) \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R}) \\ z = z(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &= (4; 5; 6)x + (6,3; 7; 7,7)y \\ LP &: \max\{z\} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} (1,3; 2; 2,7)x + (2,5; 3; 3,5)y &\leq 240 \\ (2,5; 4; 5,5)x + (1,7; 2; 2,3)y &\leq 400 \\ (0,5; 1; 1,5)x + (2,7; 3; 3,3)y &\leq 210 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Das sieht noch relativ vertraut nach der klassischen Variante aus, bis auf den Umstand, dass wir nun Fuzzy-Zahlen, genauer Fuzzy-Dreieckszahlen, als Koeffizienten vor den Unbekannten x und y geschrieben haben.
So einfach diese Notation ist, so problematisch ist sie. Da wir uns bei der Berechnung mit Fuzzy-Zahlen über den Weg der α-Schnitte auf die Intervallarithmetik zurückziehen können, bedeutet obige Formulierung im Wesentlichen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= [4; 6] \subset \mathbb{R} \\ \boldsymbol{B} &= [6,3; 7,7] \subset \mathbb{R} \\ z = z(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &= [4; 6]x + [6,3; 7,7]y \\ LP &: \max\{z\} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}[1,3;2,7]x + [2,5;3,5]y &\leq 240\\ [2,5;5,5]x + [1,7;2,3]y &\leq 400\\ [0,5;1,5]x + [2,7;3,3]y &\leq 210\\ x &\geq 0\\ y &\geq 0\end{aligned}$$

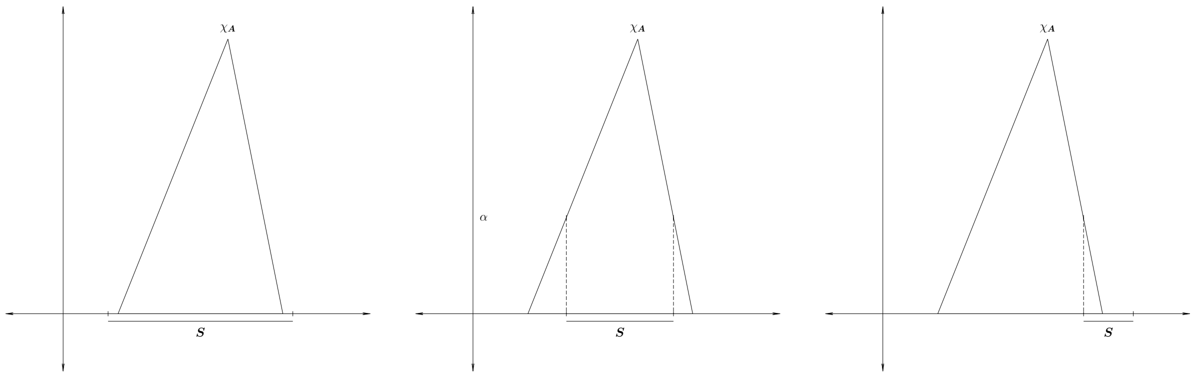
Und das ist bei genauer Betrachtung überhaupt nicht mehr „fuzzy“, denn jede der Ungleichungen muss erfüllt sein. Ob „Intervall“-LPs überhaupt lösbar sind, wollen wir hier nicht weiter betrachten. Stattdessen verlangen wir nach einer Möglichkeit, die Notwendigkeit zur Erfüllung von Bedingungen zu formalisieren und zu formulieren. Erst wenn wir die graduelle Erfüllbarkeit erlauben, ähnlich der graduellen Zugehörigkeit zu Mengen – letzteres können wir über die charakteristische Funktion der Fuzzy-Menge –, kommen wir in die Welt der Fuzzy-LPs.

Idee:
Gebe eine gewisse Notwendigkeit vor, mit der das Maximum erreicht wird und die Nebenbedingungen gelten.

Definition 1.44. (Notwendigkeit einer Fuzzy-Menge: $Nec_{\boldsymbol{A}}$): Sei $\boldsymbol{X}$ der Grundbereich und $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{X}$ eine Teilmenge (engl. *subset*) sowie $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ eine Fuzzy-Menge, dann ist die *Notwendigkeit* (engl. *necessity*) von $\boldsymbol{S}$ unter $\boldsymbol{A}$ definiert als:

$$Nec_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}) = \inf \{1 - \chi_{\boldsymbol{A}}(x) \mid x \notin \boldsymbol{S}\}$$

Beispiel 1.4 (Notwendigkeiten)**.**



$Nec_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}) = 1$ $\quad$ $Nec_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}) = 1 - \alpha$ $\quad$ $Nec_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}) = 0$

Wir wollen die Notwendigkeiten zur Erfüllung oder graduelle Erfüllung der Bedingungen formulieren:

$$Nec((a;b;c)x + (a';b';c')y \leq k) \geq \alpha$$

Was bedeutet das? $(a;b;c)x + (a';b';c')y$ ist eine Fuzzy-Menge. Die zugelassenen Elemente sind alle $\leq k$. Das beschreibt also das halboffene Intervall $]-\infty;k]$.

$$Nec((a;b;c)x + (a';b';c')y \leq k) \geq \alpha = Nec_{(a;b;c)x+(a';b';c')y}(]-\infty;k])$$

Wobei $(a;b;c)x + (a';b';c')y$ das Bild der Fuzzymenge $(a;b;c) + (a';b';c')$ unter der Extension der Funktion

$$(u,v) \mapsto u \cdot x + v \cdot y$$

$Nec(\ldots) \geq \alpha$ fordert also „$\forall u, v$ die Eigenschaft $(\chi_{(a;b;c)}(u) > 1-\alpha) \wedge (\chi_{(a';b';c')}(v) > 1-\alpha)$“.

$$\Longrightarrow u \cdot x + v \cdot y \leq k$$

$Nec_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{S}) \geq \alpha$ bedeutet intuitiv: Falls $x \in \boldsymbol{A}$ erfüllt ist, aber x außerhalb von $\boldsymbol{S}$ liegt, dann kann der Grad der Erfüllung nur sehr klein sein; eben höchstens $1-\alpha$.

Als Lösung unseres Fuzzy-LPs suchen wir crispe Belegungen der Variablen x und y, so dass

- wir das Maximum der Zielfunktion z mit einer definierten Notwendigkeit α_0 erreichen.

- die Nebenbedingungen N_i ihrerseits mit Notwendigkeiten α_i erfüllen.

Eine Defuzzifikation zur Auflösung der Notwendigkeiten.
Um das Fuzzy-LP auf das Standard LP zurückzuführen, betrachten wir die Fuzzy-Koeffizienten von x und y im Ausdruck $(a;b;c)x + (a';b';c')y$, also $(a;b;c), (a';b';c')$ und bestimmten diejenigen crispen Intervalle, die diesen genügen. Aus Dreiecks-Fuzzy-Zahlen $(a;b;c)$ erhalten wir unter Berücksichtigung der jeweiligen Notwendigkeit α das abgeschlossene Intervall:

$$\boldsymbol{I} = [m, n]$$

mit

$$\begin{aligned} m &= ((1-\alpha) \cdot (b-a)) + a \\ n &= c - ((1-\alpha) \cdot (c-b)) \end{aligned}$$

Zur Defuzzifikation der Koeffizienten der Zielfunktion wählen wir jeweils $m = \min(\boldsymbol{I})$ des zugehörigen Intervalls.

Zur Defuzzifikation der Koeffizienten der Nebenbedingungen wählen wir jeweils $n = \max(\boldsymbol{I})$ des zugehörigen Intervalls.

Nach der Defuzzifikation erhalten wir ein Standard LP mit crispen Lösungen.

Lineares Programmieren mit Fuzzy-Mengen - Fuzzy-LP

Algorithmus : Fuzzy Simplex-Tableau Verfahren
Eingabe : Fuzzy-Maximierungs-Problem in kanonischer Form
Ausgabe : Lösung des passenden klassischen Optimierungsproblems

1 Vergebe Notwendigkeit α_0 an die Zielfunktionszeile.
2 Vergebe für alle Nebenbedingungen N_i eine Notwendigkeit α_i.
3 Löse die Notwendigkeiten auf `// d.h. führe eine Defuzzifikation durch.`
`// Dabei entsteht ein klassisches lineares Optimierungsproblem.`
4 `call(`*Algorithmus: klassisches LP*`)// d.i. Algorithmus 2 (siehe Seite 5)`
5 **return** Lösungen des klassisches LP

Schritt 1 & 2: Vergabe der Notwendigkeiten. Im folgenden Beispiel sind alle Notwendigkeiten $\alpha_i = 0.8$

$$\boldsymbol{A} = (4;5;6) \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$\boldsymbol{B} = (6,3;7;7,7) \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R})$$
$$z = z(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot x + \boldsymbol{B} \cdot y = (4;5;6) \cdot x + (6,3;7;7,7) \cdot y$$

F-LP: $\max u$ für

$$Nec(z(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \geq u) \geq 0,8$$

mit den Nebenbedingungen

$$Nec((1,3;2;2,7) \cdot x + (2,5;3;3,5) \cdot y \leq 240) \geq 0,8$$
$$Nec((2,5;4;5,5) \cdot x + (1,7;2;2,3) \cdot y \leq 400) \geq 0,8$$
$$Nec((0,5;1;1,5) \cdot x + (2,7;3;3,3) \cdot y \leq 210) \geq 0,8$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Schritt 3: Auflösen der Notwendigkeiten.

Zielfunktionszeile:

$$(a,b,c) \overset{\alpha}{\mapsto} ((1-\alpha)\cdot(b-a)) + a$$
$$(4;5;6) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} ((1-0,8)\cdot(5-4)) + 4 = 4,2$$
$$(6,3;7;7,7) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} ((1-0,8)\cdot(7-6,3)) + 6,3 = 6,44$$

Nebenbedingungen:

$$(a,b,c) \overset{\alpha}{\mapsto} c - ((1-\alpha)\cdot(c-b))$$

N_1:

$$(1,3;2;2,7) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 2,7 - ((1-0,8)\cdot(2,7-2)) = 2,56$$
$$(2,5;3;3,5) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 3,5 - ((1-0,8)\cdot(3,5-3)) = 3,4$$

N_2:

$$(2,5;4;5,5) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 5,5 - ((1-0,8)\cdot(5,5-4)) = 5,2$$
$$(1,7;2;2,3) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 2,3 - ((1-0,8)\cdot(2,3-2)) = 2,24$$

N_3:

$$(0,5;1;1,5) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 1,5 - ((1-0,8)\cdot(1,5-1)) = 1,4$$
$$(2,7;3;3,3) \overset{\alpha=0,8}{\mapsto} 3,3 - ((1-0,8)\cdot(3,3-3)) = 3,24$$

Schritt 4: Lösen des klassischen LP. Wir erhalten mit der obigen Defuzzifikation durch Auflösen der Notwendigkeiten die klassische lineare Optimierungsaufgabe:

Zielfunktionszeile:

$$\begin{aligned} &\max u \\ 4,2\cdot x + 6,44\cdot y &\geq u \\ \Longrightarrow \max\{z\} &= \max\{4,2\cdot x + 6,44\cdot y\} \end{aligned}$$

Nebenbedingungen:

$$N_1 : 2,56\cdot x + 3,4\cdot y \leq 240$$
$$N_2 : 5,2\cdot x + 2,24\cdot y \leq 400$$
$$N_3 : 1,4\cdot x + 3,24\cdot y \leq 210$$

Das tatsächliche Durchführen des klassischen Simplex-Algorithmus verbleibt vorerst für den Leser als Übung.

Weiterführendes ...

Wir haben uns mit dem Lösen von Fuzzy linearen Optimierungsaufgaben befasst, die auf Dreiecksmengen basieren. Es gibt Verfahren zum Lösen von Fuzzy-LP, die auf Trapezmengen, dass sind die Fuzzy-Äquivalente zu den klassischen Intervallen, basieren (vgl. [GV2006],[MANY2009]). Das betrachtete Verfahren besitzt Schwächen genau wie andere hier nicht betrachtete alternativ Verfahren auch. In [KK2013] [19] werden die Schwächen und Beschränkungen aufgezeigt und eine neue Möglichkeit vorgestellt, diese Beschränkungen zu umgehen. Das Autorenteam von [KK2013] schreibt in ihrer Einführung:

> "To overcome the limitations as well as to resolve the shortcomings, a new method is proposed for solving FLP problems, in which the coefficients of variables in objective function are represented by *LR flat fuzzy numbers*."

[19] Bei Abschluss dieses Kapitels im März 2013 war das hier referenzierte Paper noch keine zwei Monate veröffentlicht.

2 Graphen

Der Begriff „Graphentheorie“ umfasst mathematische Themen der kombinatorischen und diskreten Optimierung, der algebraischen und analytischen Methoden und Erkenntnissen einerseits sowie informatik-nahe Themen rund um den Begriff „Algorithmus “. Im Fokus der algorithmischen Graphentheorie stehen bekannte Algorithmen einschließlich ihrer Bewertung bezüglich ihrer Komplexitätseinordnung sowie deren Anwendung auf konkrete Problemstellungen. Ziel der algorithmischen Graphentheorie ist es einerseits Erkenntnisse der algebraischen und analytischen Graphentheorie auf neue Anwendungsgebiete zu übertragen und andererseits Verbesserungen/Optimierungen der bekannten Verfahren anzustreben. Beim Transformieren auf neue Anwendungsgebiete fallen manchmal auch neue Erkenntnisse für die algebraischen und analytischen Methoden ab.

2.1 Grundlagen ungerichteter und gerichteter Graphen

Ein Graph ist ein Ding mit Ecken und Kanten.

Definition 2.1. (Graph, Ecke, Kante):
Es sei $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller *Ecken*, welche auch *Knoten* oder Englisch *vertices* genannt werden.
Es sei $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller *Kanten*, welche auch *Bögen* oder Englisch *edges* genannt werden.
Und es gibt eine Zuordnungsrelation γ zwischen V und E für die gilt:

$$\begin{aligned} \gamma : E &\to V_1 \cup V_2, \text{ wobei } V_1, V_2 \subseteq V \\ \gamma(e) &\mapsto \{v_i, v_j\}, \text{ mit } e \in E, v_i \in V_1, v_j \in V_2, \text{ wobei } i, j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Diese Relation ist eine totale Abbildung und heißt *Inzidenzabbildung* – auch Englisch *incidence relation*.
Das Tripel $G = (V, E, \gamma)$[1] heißt *Graph*.

Definition 2.2. (adjazent): Es sei $e \in E$ eine Kante.
Zwei Knoten $a, b \in V$ heißen *adjazent* (engl. *adjacent*), genau dann wenn

$$\exists e \in E : \gamma(e) = \{a, b\}$$

Mit anderen Worten: Die Knoten a und b sind *benachbart*, genau dann wenn die Kante e sie verbindet.

[1]Häufig wird in deutschsprachigen Veröffentlichungen der Graph mit $G = (E, K, \gamma)$ beschrieben. Dabei geht die Mengenbezeichnung E auf **E**cke und K auf **K**ante zurück.

Definition 2.3. (inzident): Der Knoten $a \in V$ und die Kante $e \in E$ *inzident* (engl. *incident*), genau dann wenn

$$a \in \gamma(e)$$

Mit anderen Worten: Der Knoten a liegt auf – oder an – der Kante e, bzw. die Kante e stößt an Knoten a an.

Bemerkung (verkürzte Graph-Definition)**.** Da für jede Kante $e \in E$ und ihre inzidierenden Knoten $a, b \in V$ stets gilt:

$$\gamma(e) = \{a, b\}$$

können wir in der formalen Definition des Graphen $G = (V, E, \gamma)$ das γ als Menge über Elemente der Form $(e, \{a, b\})$, wobei $e \in E$ und $a, b \in V$ liegt, ansehen.
Weitergehend ist es möglich jede Kante statt mit ihrem Namen $e \in E$ durch die Menge der Knoten, die durch sie zueinander adjazent sind, zu beschreiben. Daher ist es möglich z.B. $\{a, b\} \in E$[2] zuschreiben, wenn es eine Kante gibt, die a mit b verbindet.
Mit anderen Worten: Die Menge der Kanten E läßt sich als Menge von Potenzmengen, die jeweils ein bis zwei Elementen aus V enthalten, auffassen. So kann man den Graphen definieren als
$G = (V, E)$ wobei die Kantenmenge E beschrieben ist als
$E \subseteq \left\{ e \;\middle|\; e \in \{ \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{a_i, b_j\}\} \in \mathcal{P}(V) \wedge a_i, b_j \in V \right\}$

Definition 2.4. (Schlinge): Sei $e \in E$ eine Kante und es gilt

$$\gamma(e) = \{a \mid a \in V \text{ ist ein Knoten}\}$$

dann heißt e eine *Schlinge* (engl. *loop*)

Definition 2.5. (Mehrfachkante, parallele Kante): Seien $e_i, e_j \in E$ (mit $i \neq j \wedge i, j \in \mathbb{N}_0$) zwei Kanten und es gilt

$$\gamma(e_i) = \{a, b \mid a, b \in V\} = \gamma(e_j)$$

dann heißen e_i und e_j *Mehrfachkanten* oder *parallele Kanten* (engl. *parallel edges*).

Definition 2.6. (Ordnung von G, Knotengrad, Maximalgrad von G, Minimalgrad von G): Ist G ein Graph mit E als Kantenmenge und V als Ecken-/Knotenmenge

- so heißt $\operatorname{ord}(G) = |V|$ die *Ordnung* von G.
- so heißt $\deg(a) = |\{e \mid a \in \gamma(e)\}| + |\{e \mid \{a\} = \gamma(e)\}|$ $(\forall a \in V, \forall e \in E)$ der *Knotengrad* oder *Eckengrad* von a; das ist also die Anzahl der mit dieser Ecke inzidierenden Kanten, wobei Schlingen doppelt gezählt werden.
- so heißt $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$ *Maximalgrad* von G.

[2] In verschiedenen Büchern wird eine (ungerichtete) Kante auch als $\{ab\} \in E$ notiert

- so heißt $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$ *Minimalgrad* von G.

Dabei sind $\mathrm{ord}(G), \deg(a), \Delta(G), \delta(G) \in \mathbb{N}_0$

Definition 2.7. (einfacher Graph, schlichter Graph, Multigraph, endlicher Graph, Nullgraph, vollständiger Graph, regulärer Graph):

$$\begin{aligned}
G \text{ heißt } \textit{einfacher} \text{ oder}\\
\textit{schlichter} \text{ Graph } &\leftrightarrow G \text{ hat keine Mehrfachkanten oder Schlingen.}\\
G \text{ heißt } \textit{Multigraph} &\leftrightarrow G \text{ besitzt Mehrfachkanten,}\\
&\quad \text{d.h. } E \text{ ist eine Multimenge.}\\
G \text{ heißt } \textit{endlich} &\leftrightarrow V, E \text{ sind endliche Mengen.}\\
G \text{ heißt } \textit{Nullgraph} &\leftrightarrow G \text{ hat keine Kanten, d.h. } E = \emptyset.\\
G \text{ heißt } \textit{vollständiger Graph} &\leftrightarrow G \text{ ist schlichter Graph mit maximaler Kantenzahl.}\\
G \text{ heißt } \textit{regulär} \text{ (vom Grad } r) &\leftrightarrow G \text{ ist schlichter Graph}\\
&\quad \text{und } \exists r \in \mathbb{N}_0 \text{ so, dass } \forall v \in V \text{ gilt } \deg(v) = r
\end{aligned}$$

Definition 2.8. (Die Klassen N_n und K_n):

- Die Klasse der Nullgraphen mit der Ordnung n bezeichnet man mit N_n.
- Die Klasse der vollständigen Graphen der Ordnung n bezeichnet man mit K_n[3].

Definition 2.9. (Komplementärgraph, Untergraph, Aufspannender Untergraph, Induzierter Untergraph): Sei $G = (V, E)$ ein Graph,

- so heißt $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{v, w\} \notin E \mid v, w \in V, v \neq w\}$ *Komplementärgraph.*
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V, F \subseteq E$ *Untergraph*, man schreibt $H \subseteq G$.
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W = V, F \subseteq E$ *aufspannender Untergraph.*
- so heißt $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V, F = \{\{v_i, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E, v_i, v_j \in W\}$ *induzierter Untergraph*

Definition 2.10. (gerichteter Graph, Digraph, gerichtete Kante, Pfeil): Seien $a, b \in V$, so heißt das geordnete Paar (a, b) *gerichtete Kante* oder *Pfeil* (engl. *arc*) **von** a **nach** b.
Die Menge der gerichteten Kanten werde mit $A \subseteq \left\{ \bigcup_{i,j} (a_i, b_j) \,\middle|\, a_i, b_j \in V \wedge i, j \in \mathbb{N}_0 \right\}$ bezeichnet.

Das Tupel $G = (V, A)$ heiße *gerichteter (orientierter) Graph* oder *Digraph* (engl. *directed graph*).

Definition 2.11. (Eingangsgrad, Ausgangsgrad): Es sei $G = (V, A)$ ein Digraph.

[3] Die Klasse K_n ist nach Kuratowski, einem polnischen Mathematiker, benannt.

- $\text{indeg}(v) = |\{(x,v) \mid (x,v) \in A\}|$ heißt der *Eingangsgrad* von v.
- $\text{outdeg}(x) = |\{(x,v) \mid (x,v) \in A\}|$ heißt der *Ausgangsgrad* von x.

Definition 2.12. (Kantenzug, Linie, Weg, Kreis, Bahn, Zyklus):

1. Ein *Kantenzug* ist eine Folge von Kanten, die nacheinander in einem Zug durchlaufen werden können. (Es könnten Kanten mehrfach durchlaufen werden.)
   $Z = (e_1, \ldots, e_r) = (\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\})$ ist ein Kantenzug;
   $\text{length}(Z) = r$ ist die *Länge* des Kantenzuges Z.
2. Ein *gerichteter Kantenzug* ist eine Folge von Knoten, die durch gerichtete Kanten verbunden sind, so dass für jeden Knoten der Folge $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ gilt: $\exists e_i \in E$ mit $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ für alle $1 \leq i \leq r$.
3. Z heißt *geschlossener Kantenzug*, wenn $v_{r+1} = v_0$ gilt. (Es könnten Kanten mehrfach durchlaufen werden.)
4. Z heißt *einfacher Kantenzug* – oder *Linie* –, wenn keine **Kante** mehrfach durchlaufen wird.
5. Z heißt *Weg*, wenn keine **Ecke** mehrfach durchlaufen wird.
6. Ein *Kreis* ist ein geschlossener Weg.
7. Eine *Bahn* ist ein gerichteter Weg.
8. Ein *Zyklus* ist ein gerichteter Kreis und eine geschlossene Bahn.

Definition 2.13. (EULERsche und HAMILTONsche Kreise):

- Eine EULER*sche Linie* ist ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen genau einmal enthält.
- Ein EULER*scher Kreis* ist eine geschlossene EULER*sche Linie*.
- Der Graph G heißt EULER*sch* genau dann, wenn er einen EULER*schen Kreis* enthält, das ist wenn jede Ecke in G geraden Grad besitzt.
- Der Graph G heißt HAMILTON*sch* genau dann, wenn er einen HAMILTONschen Kreis besitzt, d.h. einen geschlossenen Weg, der jede Ecke von G genau einmal durchläuft.

Definition 2.14. (Bipartiter Graph): Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn

1. $V = V_1 \cup V_2 \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2. Es verlaufen nur Kanten von der Eckenmenge V_1 in die Eckenmege V_2 (und umgekehrt, aber nicht innerhalb von V_1 oder V_2)

Definition 2.15. (vollständig bipartit): Ein Graph G heißt *vollständig bipartiter* Garph, wenn jede Ecke aus V_1 mit jeder Ecke aus V_2 verbunden ist. Man symbolisiert die vollständige Bipartition mit $G = K_{|V_1|,|V_2|}$.

Definition 2.16. (Kubischer Graph, trivalenter Graph): Ein 3-regulärer Graph $G = (V, E)$ mit $(\forall v \in V : \deg(v) = 3)$ heißt *kubischer* oder auch *trivalenter* Graph.

Definition 2.17. (k-Faktor, k-Faktorisierung, Faktorisierung):

1. Ein *k-Faktor* von G ist ein aufspannender Untergraph, der k-regulär ist.

2. Eine *k-Faktorisierung* von G ist eine Zerlegung von G in *kantendisjunkte* k-Faktoren.

   (Eine 1-Faktorisierung nennt man kurz *Faktorisierung*.)

Eine Anwendung ergibt sich z.B. beim Bundesligaspielplan, indem man den K_{18} 1-faktorisiert.

Praktische Sätze; hier ohne Beweise

Satz 2.1. *Für die Kantenanzahl $k = |E|$ eines* ***endlichen schlichten Graphen*** *der Ordnung n gilt: $0 \leq k \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ und für die Ordnung n gilt: $n \geq \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{8k+1})$.*

Satz 2.2. *Ein* ***endlicher schlichter Graph*** *mit mindestens 2 Ecken hat mindestens 2 Ecken gleichen Grades.*

Satz 2.3 (Euler). *Die Summe der Eckengrade ist gerade.* $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Lemma 2.1 (Handschlaglemma). *Die Anzahl der Ecken ungeraden Gerades eines Graphen mit endlich vielen Kanten ist gerade.*

Korollar 2.1. *Ein regulärer Graph ungeraden Grades hat eine gerade Eckenmenge.*

Korollar 2.2. *Die Ordnung eines endlichen kubischen Graphen ist gerade.*

Satz 2.4. *Bei* ***Digraphen*** *gilt stets: Die Summe der Ausgangsgrade = Summe der Eingangsgrade.*

Satz 2.5. *Jeder Kantenzug zwischen a und b enthält einen Weg zwischen a und b (den sog. a, b-Weg)*

Satz 2.6 (Dirac, 1952). *Ist* $\deg(v) \geq \frac{1}{2}|V|$ *für alle Ecken $v \in V$, dann ist G* Hamilton*sch.*

Satz 2.7 (Ore, 1960). *Ist* $\deg(v) + \deg(u) \geq |V|$ *für je zwei nichtbenachbarte Ecken u, v, dann ist G* Hamilton*sch.*

Lemma 2.2 (Existenz einer Eulerschen Linie). *G hat genau dann eine* Euler*schen Linie, wenn er* höchstens *2 Ecken ungeraden Grades hat. Diese beiden Ecken sind dann die Anfangs- und Endknoten der* Euler*schen Linie.*

2.2 Über Zusammenhang, Cliquen und Bäume

Definition 2.18. (verbindbar, zusammenhängend, Zusammenhangskomponente, Zusammenhangskomponentenanzahl):
Zwei Knoten $a, b \in V$ heißen *verbindbar* (engl. *connected*) genau dann wenn ein Weg von a nach b existiert.
G heißt *zusammenhängend* (engl. *connected*) genau dann wenn je zwei Knoten von G verbindbar sind.
Eine *Zusammenhangskomponente* (engl. *connected component*) von G ist durch eine Knotenmenge $U \subseteq V$ induzierter Untergraph $G(U)$, der zusammenhängend und bezüglich der Knotenzahl maximal ist.

$n = ZHK(G)$ heiße Zusammenhangskomponentenanzahl, genau dann wenn der Graph $n = ZHK(G)$ Zusammenhangskomponenten besitzt.

Definition 2.19. (n-facher Zusammenhang, Kantenzusammenhangszahl, (Knoten-)Zusammenhangszahl):

- G heißt n-fach (knoten-)zusammenhängend, wenn je 2 Ecken $a \neq b$ durch mindestens n unabhängige Wege verbunden sind, d.i. wenn die Wege keine gemeinsamen Knoten bis auf Anfang und Ende besitzen.
- G heißt n-fach kantenzusammenhängend, wenn je 2 Ecken $a \neq b$ durch mindestens n kantendisjunkte Wege verbunden sind.
- $\kappa(G)$ ist die (Knoten-)Zusammenhangszahl.
$$\kappa(G) = \max \{n \mid G \text{ ist } n\text{-fach (knoten-)zusammenhängend}\}$$
- $\lambda(G)$ ist die Kantenzusammenhangszahl.
$$\lambda(G) = \max \{n \mid G \text{ ist } n\text{-fach kantenzusammenhängend}\}$$

Definition 2.20. (Artikulation, Brücke):

- Ein Knoten $v \in V$ heißt *Artikulation* (engl. *cut vertex*), genau dann wenn für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten gilt:
$$ZHK(G \setminus v) \geq ZHK(G) + 1$$
„Der Graph zerfällt beim Entfernen von v in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. “
- Eine Kante $e \in E$ heißt *Brücke*, genau dann wenn für die Anzahl der Zusammenhangskomonenten gilt:
$$ZHK(G \setminus e) = ZHK(G) + 1$$
„Der Graph zerfällt beim Entfernen von e in zwei Zusammenhangskomponenten. “

Definition 2.21. (Clique, Cliquezahl):

Ein vollständiger Untergraph wird *Clique* genannt.

Die *Cliquezahl* $\omega(G)$ gibt die Anzahl der Ecken einer größten Clique in G an.

$$\omega(G) = \max \{|V'| \mid H = (V', E') \text{ ist Clique von } G\}$$

(Die Bestimmung von $\omega(G)$ ist *NP-vollständig.*)

Praktische Sätze; hier ohne Beweise

Satz 2.8 (Ungleichung für Zusammenhangszahlen)**.**

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Satz 2.9. *e Brücke $\Leftrightarrow$ e in keinem Kreis.*

Satz 2.10. *G zusammenhängend $\wedge e$ Brücke $\Rightarrow G \setminus e$ hat genau 2 Komponenten.*

Satz 2.11. *Für schlichte Graphen $G = (V, E)$ gilt:*

$$|V| - ZHK(G) \leq |E| \leq \binom{|V| - ZHK(G) + 1}{2}$$

Satz 2.12. *Jeder zusammenhängende Graph mit n Knoten hat mindestens $n - 1$ Kanten.*

Korollar 2.3. *Ist G schlicht mit $ord(G) = n$ und $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, so ist G zusammenhängend.*

Zertifikat eines Baumes
Baumisomorphie

2.2.1 Besondere Bäume als Datenstrukturen

- Binär-Baum
- AVL-Baum
- B-Baum
- B^*-Baum
- B^+-Baum
- $2 - 3$-Baum
- $2 - 3 - 4$-Baum
- Rot-Schwarz-Baum

2.2.2 Interessante Graphen

- Petersengraph
- Schichtengraph
- Hypercube
- Leitergraph
- Dreiecksgraphen: sphärische, euklidische und hyperbolische

2.3 Über planare Graphen und ihre Färbung: chromatische Zahl, chromatisches Polynom

2.4 Grundlegende Algorithmen der Graphentheorie

2.4.1 Graphtravesierung

1. Tiefensuche
2. Breitensuche
3. entlang einer topologischen Sortierung

2.4.2 Anzahl der Wege bestimmter Länge

2.4.3 Kürzeste Wege

1. Algorithmus von Dijkstra
2. A^*-Algorithmus (als Generalisierung des Dijkstra-Algorithmus)
3. Algorithmus von Floyd-Warshall
4. Algorithmus von Bellman

2.4.4 Minimaler Spannbaum

1. Algorithmus von Prim
2. Algorithmus von Kruskal

2.4.5 Maximaler Fluß in Netzwerken

1. Algorithmus von Ford-Fulkerson
2. Algorithmus von Edmonds-Karp

2.4.6 Eulerkreis mit Hierholzer-Algorithmus

2.4.7 TSP/HC-Heuristik

- Startlösung nach Christofides
- Nachverbesserung mit 2-opt & 3-opt Verfahren

Literaturverzeichnis

[Bec2008] Becker, Peter: *Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)*. Version: 2008. http://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/graphentheorie/script.pdf
Vorlesungsskript der Vorlesung vom WS 2007/08 bei Prof. Becker an der Fachhochschule Bonn-Rhein-Sieg

[Bec2009] Becker, Peter: *Graphentheorie / Operation Research (Mathematik III)*. Version: 2009. http://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/graphentheorie/
Vorlesungsfolien der Vorlesung vom WS 2008/09 bei Prof. Becker an der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

[Bed2013] Bede, Barnabas: *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Heidelberg / New York / Dordrecht / London : Springer, 2013 (Studies in Fuzziness and Soft Computing). http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-35221-8. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-35221-8. – ISBN (print) 978-3-642-35220-1 , (online) 978-3-642-35221-8 – ISSN (print) 1434-9922, (online) 1860-0808

[Böh1993] Böhme, Gert: *Fuzzy-Logik – Einführung in die algebraischen und logischen Grundlagen*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1993 (Springer-Lehrbuch). – ISBN: 3-540-56658-9 38

[Boh] Bohlen, Jan: *Graphentheorie (Operations Research III)*
Sehschlange mit Definitionen und Prüfungsfragen zur Veranstaltung Graphentheorie / Operations Research III von Prof. Klotz an der TU Clausthal

[GV2006] Ganesan, K. ; Veeramani, P.: Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. In: *Annals of Operations Research* 143 (2006), March, Nr. 1, S. 305–315 46

[Har2004] Hartmann, Robert: *Axiomatische Theorien in der Logik*. Version: 2004. http://www2.inf.hochschule-bonn-rhein-sieg.de/~rhartm2m/tuc/axiomat-theorien_hauptseminar/Axiomatische_Theorien_in_der_Logik.PDF
Ausarbeitung des gleichnamigen Vortrags im Themenkomplex *Information und Logik* des Hauptseminars *Theoretische Informatik* bei Prof. Kupka im SS2004 an der TU Clausthal 19

[Har2006] Harris, J. ; Tzafestas, S.G. (Hrsg.): *International Series on microprocessor-based and intelligent systems engineering*. Bd. 29: *Fuzzy Logic Applications in Engineering Science*. Dordrecht in Netherlands : Springer, 2006. – ISBN (e-book): 1-4020-4078-4

[Har2007] Hartmann, Robert: *Softcomputing*. 2007
Eigenhändige Mitschrift der Vorlesung vom WS2006/2007 bei Prof. Hammer an der TU Clausthal

[Hyv1989] Hyvönen, Eero: Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic. In: *IJCAI Proceedings of the Eleventh International Joint Conference on Artificial Intelligence* Bd. Volume 2, 1989, 1193–1198 32

[KBK+2012a] Kruse, Rudolf ; Borgelt, Christian ; Klawonn, Frank ; Moewes, Christian ; Russ, Georg ; Steinbrecher, Matthias: Das Extensionsprinzip. Version: 2012. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8299-8_15. In: *Computational Intelligence*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. – DOI 10.1007/978–3–8348–8299–8_15. – ISBN 978–3–8348–1275–9, 279-285

[KBK+2012b] Kruse, Rudolf ; Borgelt, Christian ; Klawonn, Frank ; Moewes, Christian ; Russ, Georg ; Steinbrecher, Matthias: Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Logik. Version: 2012. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8299-8_14. In: *Computational Intelligence*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. – DOI 10.1007/978–3–8348–8299–8_14. – ISBN 978–3–8348–1275–9, 253-277

[KBK+2012c] Kruse, Rudolf ; Borgelt, Christian ; Klawonn, Frank ; Moewes, Christian ; Russ, Georg ; Steinbrecher, Matthias: Grundlagen der Wahrscheinlichkeits- und Graphentheorie. Version: 2012. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8299-8_23. In: *Computational Intelligence*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. – DOI 10.1007/978–3–8348–8299–8_23. – ISBN 978–3–8348–1275–9, 355-385

[KK2013] Kaur, Jagdeep ; Kumar, Amit: A New Method to Find the Unique Fuzzy Optimal Value of Fuzzy Linear Programming Problems. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 156 (2013), Februar, Nr. 2, S. 529–534. http://dx.doi.org/10.1007/s10957-012-0132-4. – DOI 10.1007/s10957–012–0132–4 46

[Lam2004] Lampe, Ansgar: *Graphentheorie 2*. Version: 03.September 2004. http://www2.inf.h-brs.de/~rhartm2m/tuc/graphentheorie2.pdf
Vorlesungsmitschrift der Vorlesung vom SS2004 bei Prof. Klotz an der TU Clausthal

[Ley1997] Leydold, Josef: *2-Phasen-Simplex-Algorithmus*. online. http://statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node164.html. Version: 1997. – Zuletzt besucht am 20.02.2013 16

[MANY2009] Mahdavi-Amiri, Nezam ; Nasseri, Seyed H. ; Yazdani, Alahbakhsh: Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. In: *Iranian Journal of Operations Research* 1 (2009), Nr. 2, S. 68–84 46

[MY1959] Moore, R. E. ; Yang, C. T.: Interval analysis I / Lockheed Aircraft Corporation - Missiles and Space Division. Version: 1959. http://interval.louisiana.edu/Moores_early_papers/Moore_Yang.pdf. Sunnyvale, California : Lockheed Aircraft Corporation, 1959 (Space Div. Report LMSD285875). – Technical Report 31

[NN1997] Necas-Niessner, Frank: *Highlights der Informatik – Zusammenfassung von Definitionen und Sätzen*. 1997
Material zur Prüfungsvorbereitung über die Vorlesung Informatik 1 vom WS1996/97 bei Prof. Lex an der TU Clausthal

[NPM1999] Novák, Vilém ; Perfilieva, Irina ; Močkoř, Jiří: *The Kluwer International series in engineering and computer science*. Bd. secs 517: *Mathematical principles of fuzzy logic*. Boston/Dordrecht/London : Kluwer Academic Publishers, 1999. – ISBN: 0-7923-8595-0

Stichwortverzeichnis

T

V

W

Y

Z