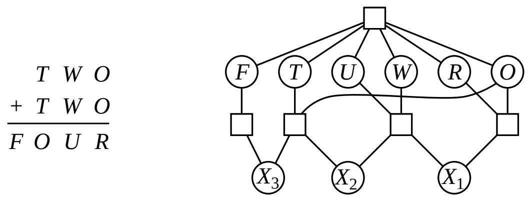


(a) (b)

Wissensbasierte Systeme II

Peter Becker
FH Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik
peter.becker@fh-bonn-rhein-sieg.de

Vorlesung Wintersemester 2004/05

2. Spiele

- Kombinatorische Spiele als Suchproblem
- Wie berechnet man eine gute Entscheidung?
- Effizienzverbesserung durch Beschneidung des Suchraums
- Spiele mit Zufallselement

Arten von Spielen

Unterhaltung und Spannung im Spiel entsteht im wesentlichen durch den ungewissen Ausgang des Spiels. Diese Ungewissheit basiert auf den folgenden Ursachen:

- **Zufall**

  Tritt in Spielen z.B. durch Würfeln oder Mischen von Spielkarten auf.

  Dominiert der Einfluss des Zufalls gegenüber denen der Spieler, spricht man von *Glücksspielen*.

  Bei reinen Glücksspielen ist die Entscheidung über die Teilnahme und die Höhe des Einsatzes bereits das Wichtigste.

- **Kombinatorik**

  Spieler haben festgelegte Handlungsmöglichkeiten, die durch die Spielregeln definiert werden.

  Ein Spielabschnitt, der genau eine solche Handlungsmöglichkeit eines Spielers umfasst, heißt *Zug*.

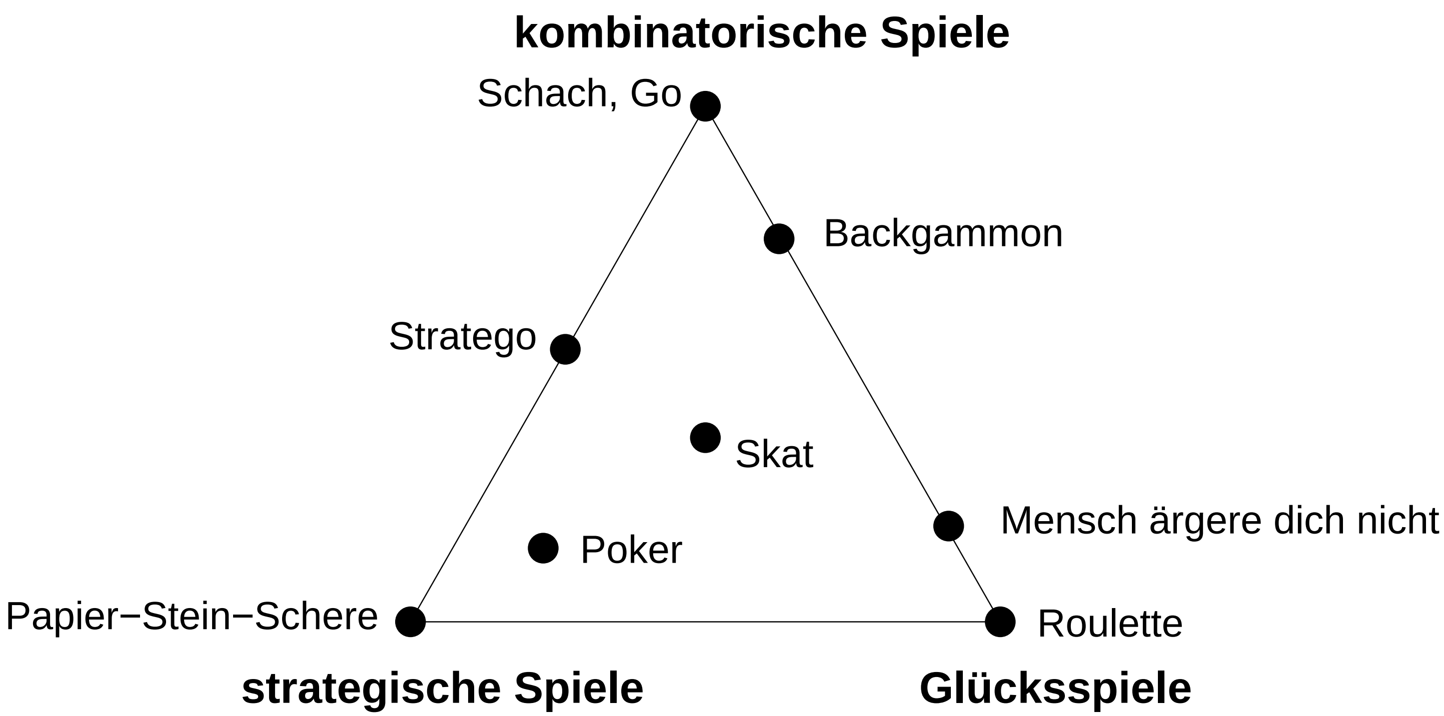
  Spiele, bei denen die Ungewissheit ganz auf den vielfältigen (praktisch unüberschaubaren) Zugmöglichkeiten beruht, heißen *kombinatorische Spiele*.

- **Mangelnde Information**

  Die Spieler besitzen unterschiedliche Informationen über den erreichten Spielstand (z.B. kennt man nur die eigenen Karten und nicht die der Mitspieler) und kennen nicht die Absichten der Gegner.

Spiele, bei denen die Ungewissheit vorwiegend auf solch imperfekter Information beruht, heißen *strategische Spiele*.

In reiner Form sind strategische Spiele selten.



Spiele als Suchprobleme

Für die folgenden Überlegungen betrachten wir zunächst rein kombinatorische Spiele.

Wir gehen von den folgenden Voraussetzungen aus:

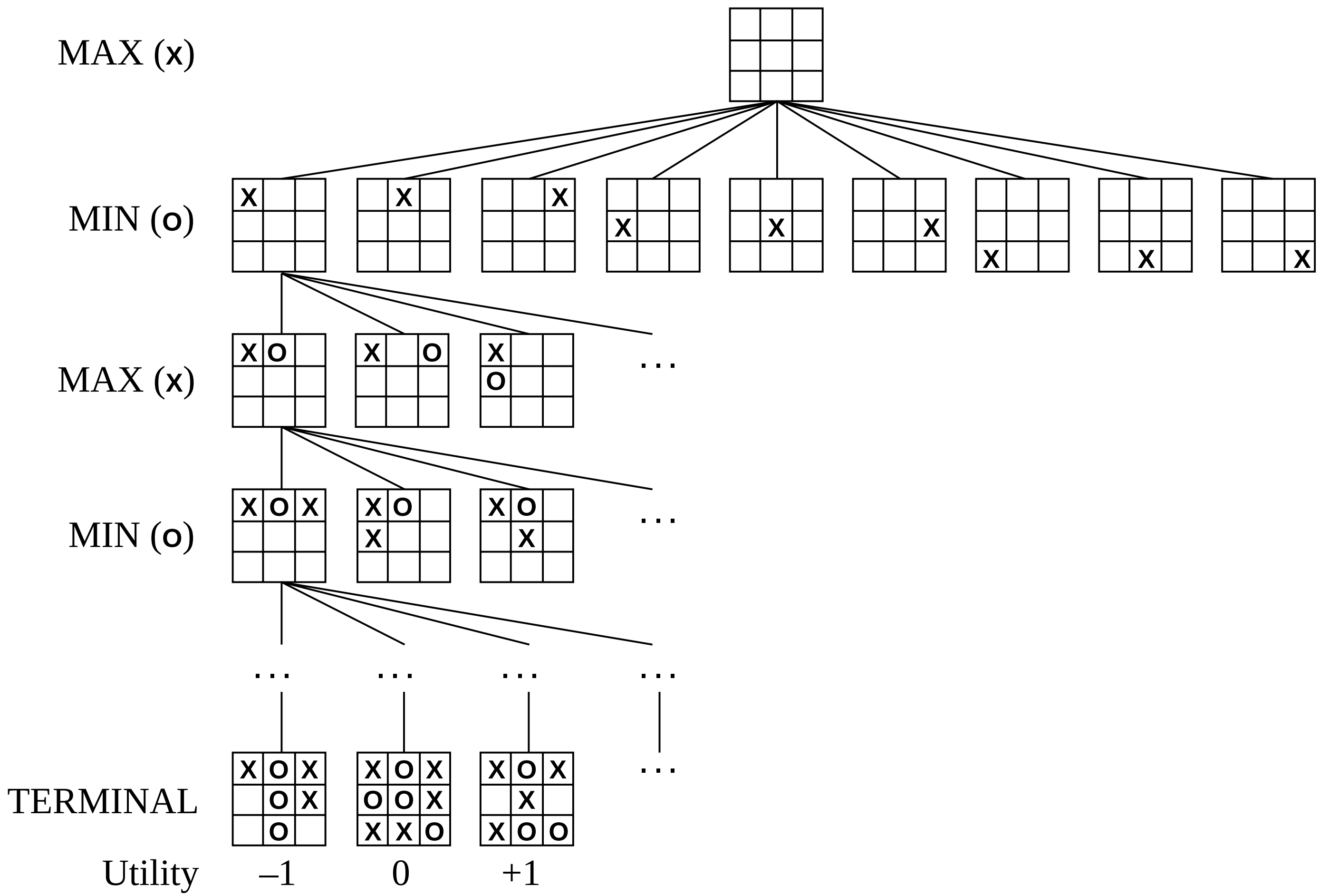
- Es gibt genau zwei Spieler. Diese heißen *Max* und *Min*.
- Jeder Spieler besitzt die vollständige Information über die Zugmöglichkeiten des Gegners.
- Die Spieler ziehen abwechselnd.
- Gesucht ist eine Strategie, die dafür sorgt, daß Max gewinnt.

Beschreibung eines Spiels

Suchproblem, mit den folgenden Komponenten:

- **Startzustand:** Ist z.B. gegeben durch die Positionen der Figuren auf dem Spielbrett und die Angabe, welcher Spieler am Zug ist.
- **Operatoren:** Entsprechen den Spielregeln und definieren die erlaubten Züge.
- **Test auf Endzustand:** Prädikat, das bestimmt, ob das Spielende erreicht wurde.
- **Nutzenfunktion:** Eine Funktion, die die Endzustände und damit den Ausgang des Spiels numerisch bewertet.

Beispiel 2.1. Suchbaum für Tic Tac Toe:



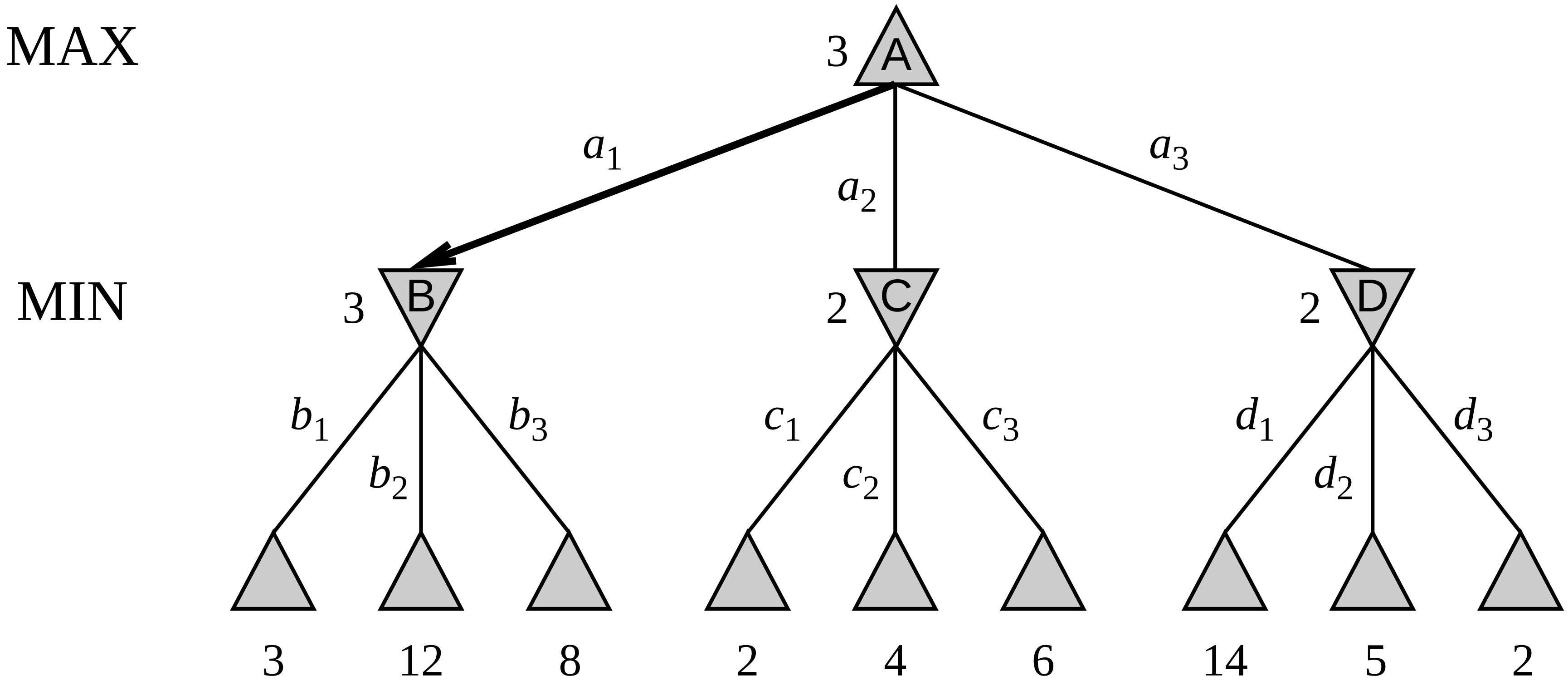
Der Minimax-Algorithmus

Wie muß Max das Spiel eröffnen, um zu gewinnen?

1. Man generiere den vollständigen Suchbaum für das Spiel.
2. Auf jeden Endzustand wende man die Nutzenfunktion an.
3. Bottom-Up weise man den Knoten im Suchbaum Werte wie folgt zu:
   - Repräsentiert der Knoten einen Zug von Max, so erhält er als Wert das Maximum der Söhne.
   - Repräsentiert der Knoten einen Zug von Min, so erhält er als Wert das Minimum der Söhne.
4. Max wählt einen Zug passend zum Wert des Wurzelknotens.

Die mit dem Minimax-Algorithmus ermittelte Entscheidung heißt *Minimax-Entscheidung (minimax decision)*.

Beispiel 2.2. Berechnung der Knotenwerte bei Minimax:



Beispiel 2.3. Wir betrachten das Spiel Nim:

- Das Spiel beginnt mit einem Haufen von n Spielmarken.
- Die Spieler ziehen abwechselnd.
- Bei jedem Zug muß ein Spieler ein Häufchen Spielmarken in nicht-leere unterschiedlich große Häufchen teilen.
- Der erste Spieler, der nicht mehr ziehen kann, verliert.

Suchbaum und Minimax: Tafel ✎.

Minimax mit fester Tiefe

- In der Regel ist eine erschöpfende Suche bis zu den Endknoten nicht möglich.
- Stattdessen wird der Zustandsraum bis zu einer vordefinierten Anzahl n von Ebenen durchsucht.
- Hierbei ist der Ressourcenverbrauch zu berücksichtigen (Zeit und Platz).
- Problem: Die expandierten Zustände sind in der Regel keine Endzustände.

- Daher wendet man eine heuristische Bewertungsfunktion auf die expandierten Zustände an.

- Der Wert am Wurzelknoten zeigt nicht mehr an, ob das Spiel gewonnen wird.

- Stattdessen handelt es sich um den Wert des am höchsten bewerteten Zustandes, der in n Zügen vom Startknoten aus mit Sicherheit erreichbar ist.

- Diese Strategie heißt *Vorausschau über n Züge*.

Heuristische Bewertungsfunktionen

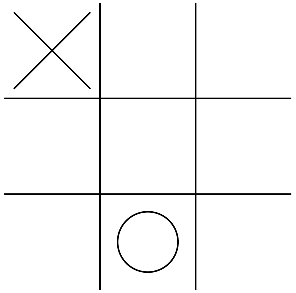
- Die Bewertungsfunktion muss die Günstigkeit eines Zustandes (Spielstellung) für einen Gewinn ausdrücken.

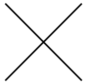
- Sie enthält implizit Wissen über das Spiel.

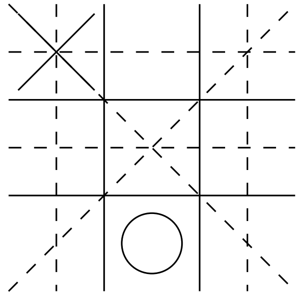
Beispiel 2.4. Heuristische Bewertungsfunktion für Tic-Tac-Toe: Die Heuristik lautet

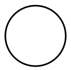
$$E(n) = M(n) - O(n)$$

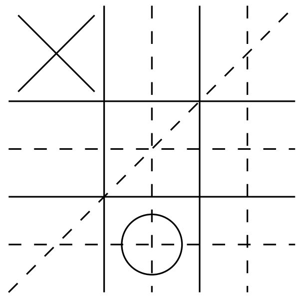
$M(n)$	:	Anzahl der eigenen Gewinnmöglichkeiten
$O(n)$	:	Anzahl der Gewinnmöglichkeiten des Gegners
$E(n)$	:	Bewertung des Zustandes



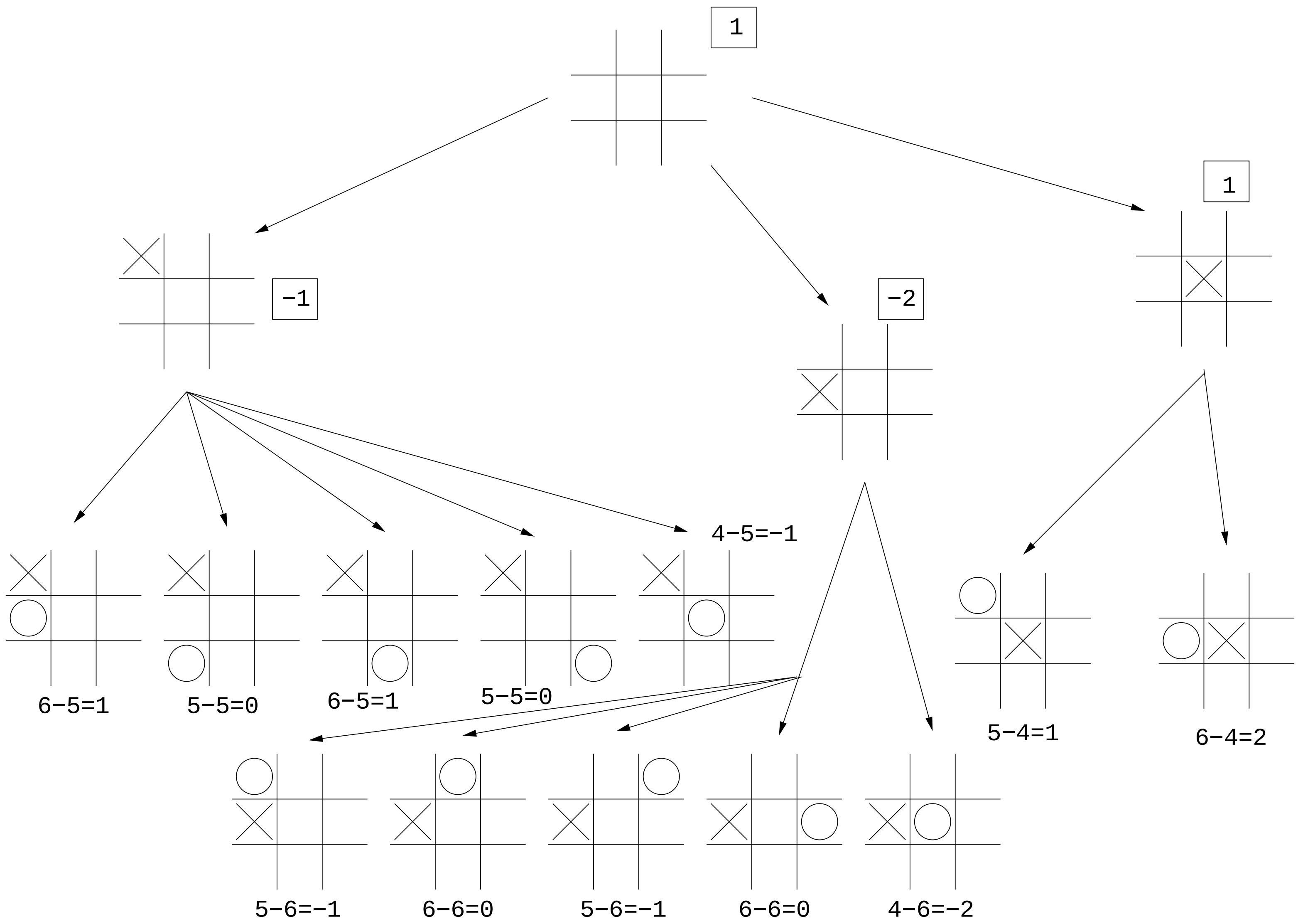
 hat 6 mögliche Gewinnwege



 hat 5 mögliche Gewinnwege



$$E(n) = 6 - 5 = 1$$


1
−1
−2
1
4−5=−1
6−5=1
5−5=0
6−5=1
5−5=0
5−4=1
6−4=2
5−6=−1
6−6=0
5−6=−1
6−6=0
4−6=−2

Eine Bewertungsfunktion kann auch aus n einzelnen Merkmalen bestehen, die durch eine gewichtete Summe aggregiert werden:

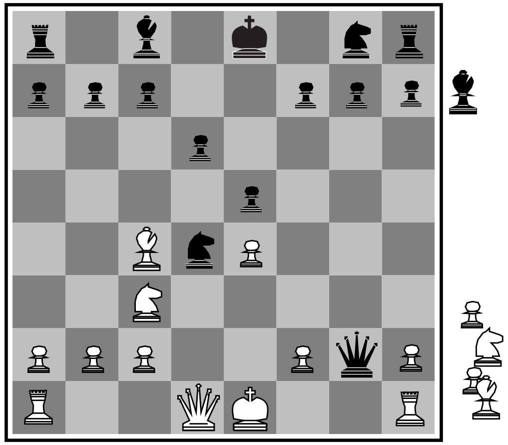
$$E(s) = w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \ldots + w_n f_n(s)$$

z.B. bei Schach: $w_1 = 9$ und

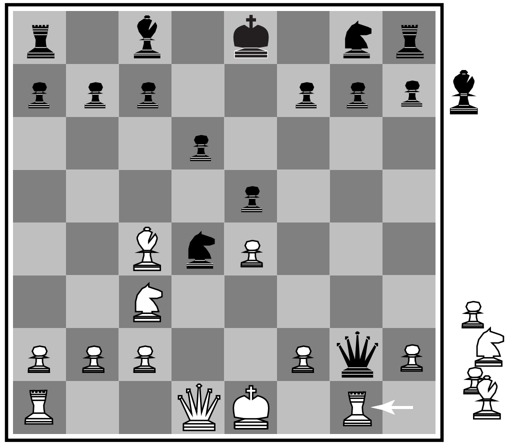
$$f_1(s) = \text{ Anzahl eigene Damen } - \text{ Anzahl Damen des Gegners}$$

$w_2 = 1$ und

$$f_2(s) = \text{ Anzahl eigene Bauern } - \text{ Anzahl Bauern des Gegners}$$



(a) White to move



(b) White to move

Alpha-Beta-Suche

- Zweige, die irrelevant für die Berechnung der Minimax-Bewertung sind, werden nicht weiter untersucht.
- Hierfür ist eine Tiefensuche notwendig, da man zunächst die Bewertungen der Zustände in der maximalen Suchtiefe benötigt.
- Hiermit legt man vorläufige Bewertungen fest:
  - *Alpha-Werte* sind Werte an MAX-Knoten. Sie können niemals kleiner werden.
  - *Beta-Werte* sind Werte an MIN-Knoten. Sie können niemals größer werden.

Die folgenden Regeln steuern die vorzeitige Beendigung der Suche in einem Teilbaum:

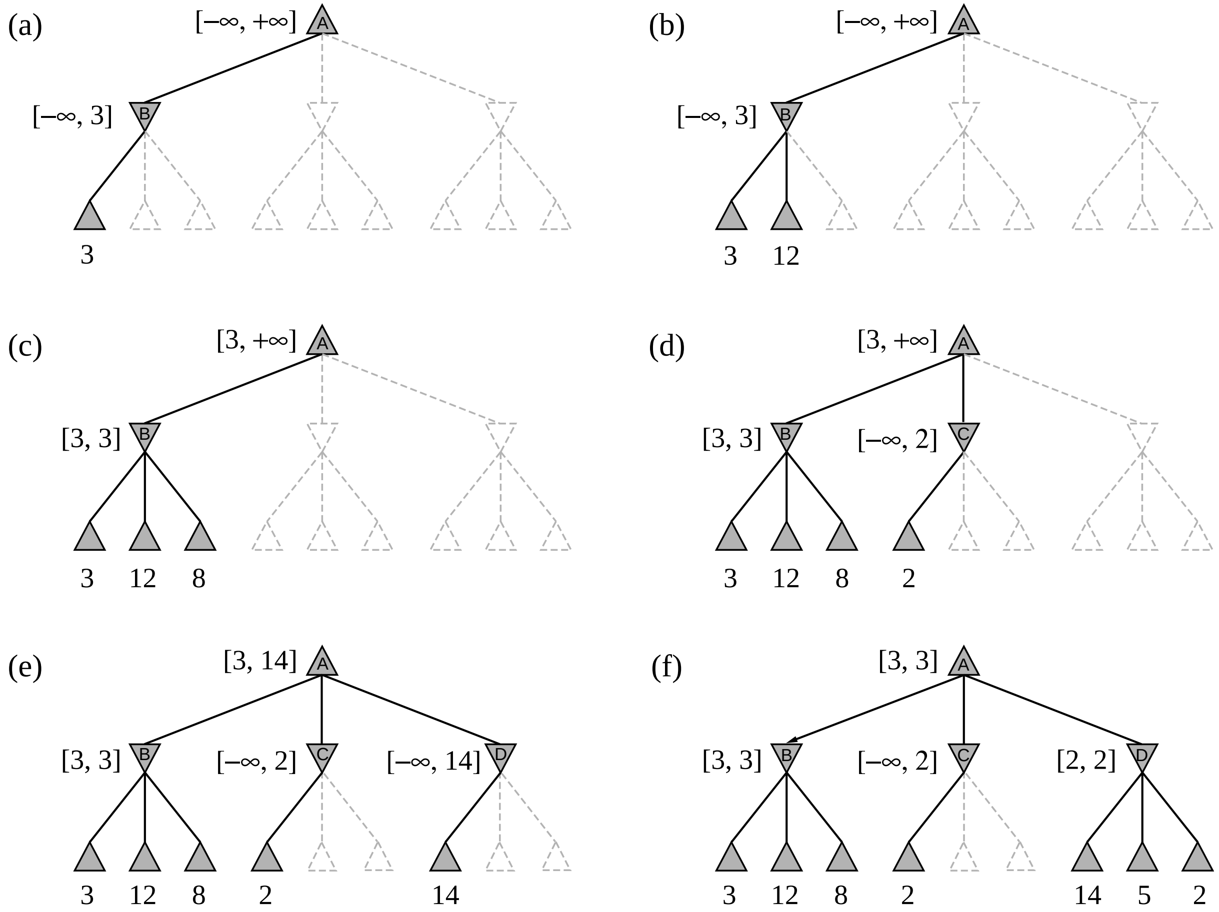
- Es sei s ein Min-Knoten. Die Suche kann unterhalb von s vorzeitig beendet werden wenn:

$$\exists \text{ Max-Vorgänger } s' \text{ von } s : \beta(s) \leq \alpha(s')$$

- Es sei s ein Max-Knoten. Die Suche kann unterhalb von s vorzeitig beendet werden wenn:

$$\exists \text{ Min-Vorgänger } s' \text{ von } s : \alpha(s) \geq \beta(s')$$

Anwendung des Alpha-Beta-Verfahrens:



Der Bestimmtheitssatz

Satz 2.1. *Gegeben sei ein Spiel, das die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Das Spiel wird von zwei Personen gespielt.*
2. *Der Gewinn des einen Spielers ist gleich dem Verlust des anderen Spielers.*
3. *Das Spiel endet nach einer begrenzten Zahl von Zügen, und jeder Spieler hat stets nur endlich viele Zugmöglichkeiten.*
4. *Alle Informationen über den Spielstand sind beiden Spielern bekannt (perfekte Information).*

5. *Es gibt keine zufälligen Einflüsse.*

Dann sind alle Zustände des Spiels bestimmt, d.h. sie erfüllen genau eine der folgenden Eigenschaften:

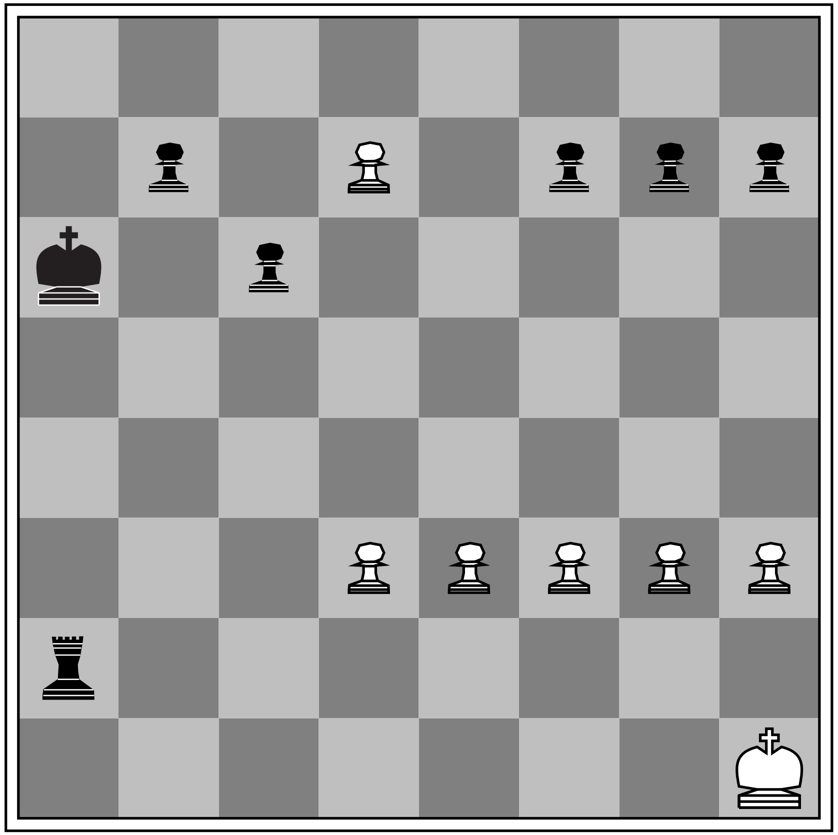
- *Der Spieler, der am Zug ist (Weiß), kann einen Sieg erzwingen.*
- *Der Spieler, der nicht am Zug ist (Schwarz), kann einen Sieg erzwingen.*
- *Beide Spieler können unabhängig von der Spielweise des anderen ein Unentschieden erreichen.*

Bemerkung 2.1. Beim Schach ist es nicht bekannt, zu welcher Kategorie die Anfangsstellung gehört.

Der Horizonteffekt

- So ausgefeilt wie ein Suchalgorithmus auch immer sein mag: In gewissen Situationen kann er zu kurzsichtig sein.

- Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Gegner einen ungünstigen Spielzustand in wenigen Zügen jenseits der Suchtiefe (des Horizonts) in einen guten Spielzustand bringen kann.



Black to move

Materialvorteil für Schwarz, aber Weiß erhält eine Dame.

- Anderes Beispiel: Bei begrenzter Suchtiefe könnte auf der letzten Ebene selbst das dümmste Schlagen eines gedeckten Bauern durch eine Dame als günstig erscheinen, da es einen Materialvorteil bringt.

- Zur Abschwächung des Horizontproblems benutzt man im Computerschach die sogenannte *Ruhesuche*.

- Eine ruhige Position liegt vor, wenn der Gegner mit dem nächsten Zug nur eine geringe Änderung des Schätzwertes erzielen kann.

- Die Ruhesuche wurde von Shannon definiert und ist auch heute noch ein wesentlicher Bestandteil jedes Schachprogramms.

Man kann nun versuchen, den Horizonteffekt wie folgt abzuschwächen:

1. Man beginnt mit einer Minimax-Suche der Tiefe n.
2. Für die Entscheidung relevante Blätter im Spielbaum werden durch eine zusätzliche Suche weitergehend analysiert (Ruhesuche).
3. Zu dem so entstandenen Spielbaum wird nach dem Minimax-Prinzip der optimale Zug ausgewählt.

☞ Einen generellen Lösungsansatz zur Eliminierung des Horizonteffekts gibt es bisher nicht.

Kombinatorische Spiele mit Zufallselementen

- Die Realität ist nicht so streng determiniert wie rein kombinatorische Spiele.
- In vielen Situationen spielt der Zufall (Risko) eine nicht zu vernachlässigende Rolle.
- Spiele integrieren diesen Zufallsanteil typischerweise durch Würfeln.
- Kann man das Minimax-Prinzip für Spiele mit Zufallselement adaptieren?

Was ändert sich durch den Zufallsanteil?

(1) Bei Wahl einer Strategie kann ein Spieler nicht mehr von einem garantierten Gewinn (Nutzen) ausgehen.

(2) Neben den möglichen Zügen der Spieler muß im Spielbaum für die Bewertung einer Strategie die Zufallskomponente mit berücksichtigt werden.

Zu (1):

- Man bewertet eine Strategie (Entscheidung) mit dem durchschnittlichen Gewinn (Nutzen), der mit dieser Strategie verbunden ist.
- Hierzu benutzt man das Konzept des Erwartungswertes aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Erwartungsnutzen).

- Ein Zufallsereignis X kann zu den Gewinnen $x_1, \dots, x_n$ führen.

- Mit $P(X = x_i)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der der Gewinn x_i auftritt.

- Dann lautet der *Erwartungswert* $E(X)$ des Zufallsereignisses X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Würfelereignis	1	2	3	≥ 4
Gewinn	-3	-1	1	2

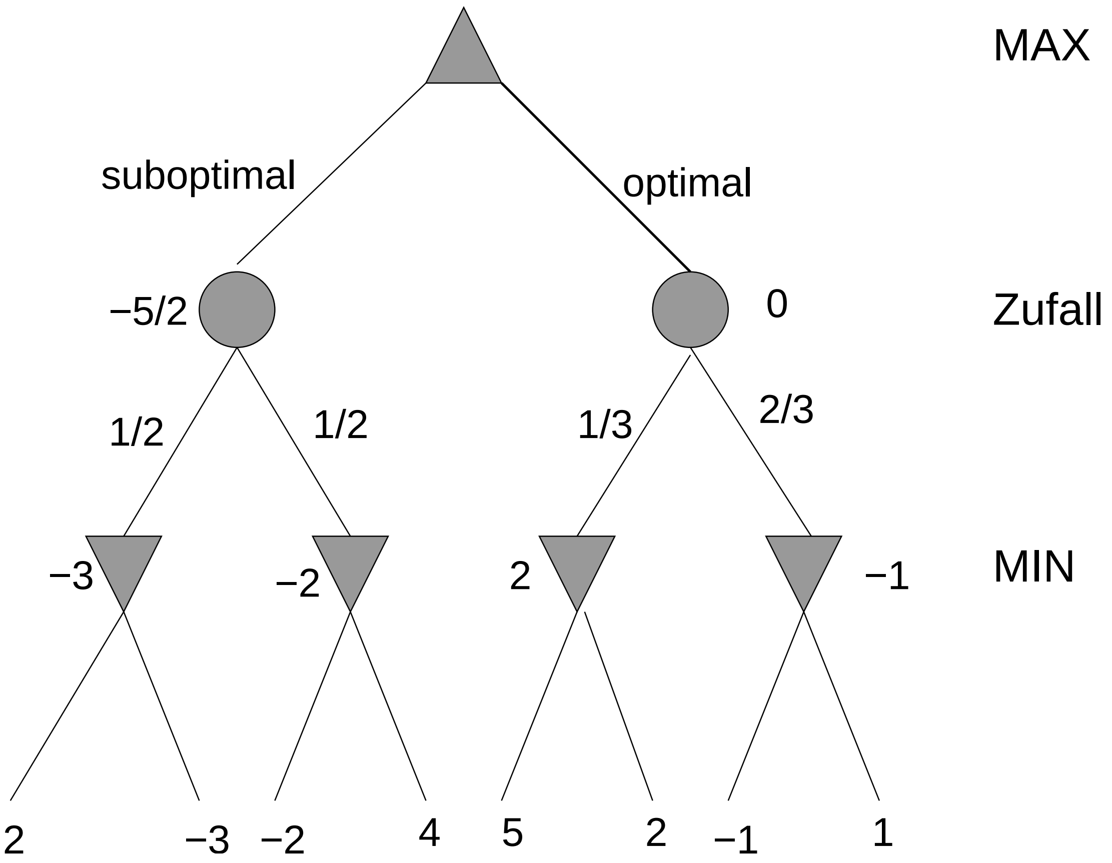
Erwartungswert:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot (-3 - 1 + 1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

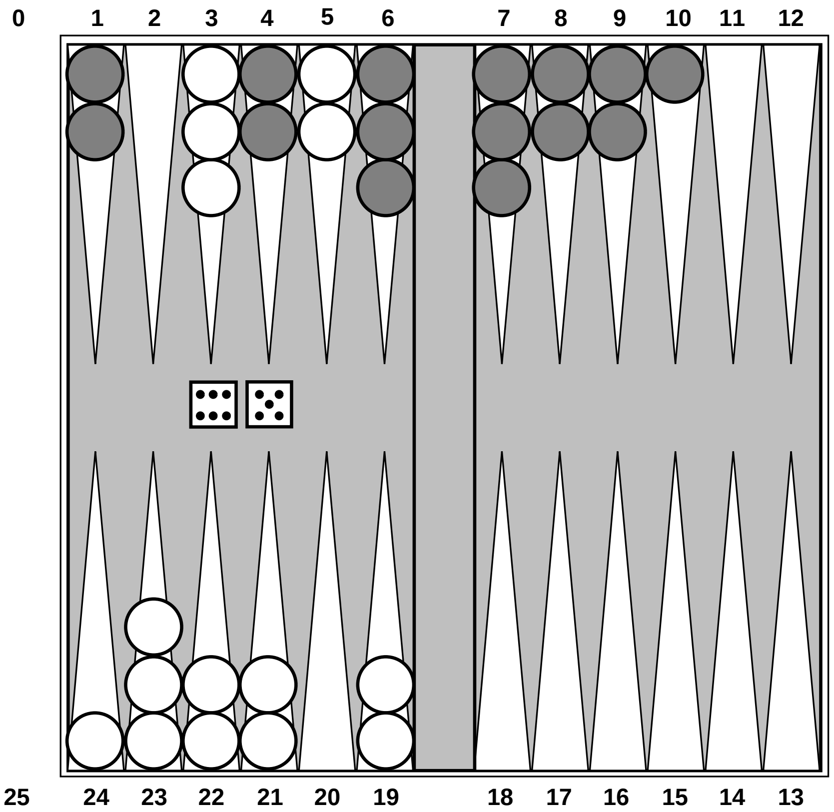
Zu (2):

- Die Zufallsereignisse werden im Suchbaum als Knoten repräsentiert (*Zufallsknoten*).
- Kanten, die von einem Zufallsknoten ausgehen, sind mit der Wahrscheinlichkeit für den Nachfolgezustand markiert.
- An Max-Knoten findet eine Maximierung über die Söhne statt.
- An Min-Knoten findet eine Minimierung über die Söhne statt.
- An Zufallsknoten findet eine Berechnung des zugehörigen Erwartungswertes statt.
  - Die x_i entsprechen den Bewertungen der Söhne.

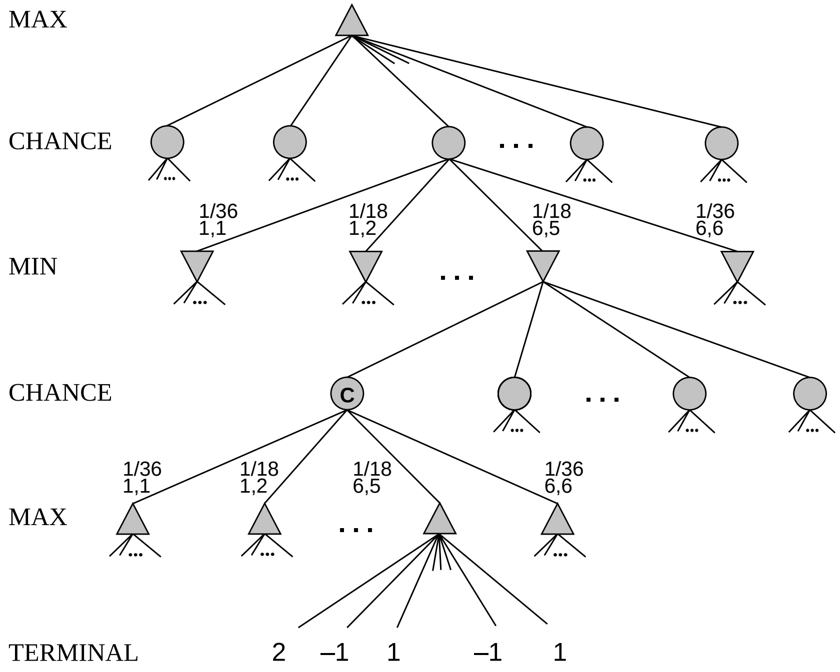
– Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ sind die Markierungen der Kanten.



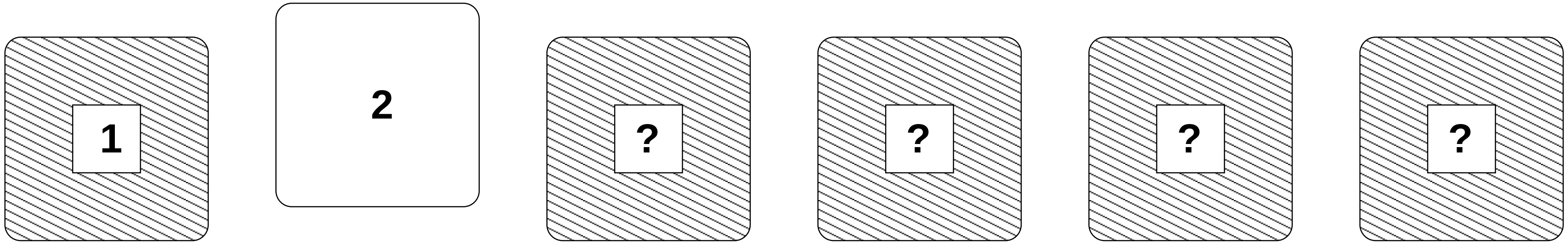
Eine Position beim Spiel Backgammon:



Schema eines Spielbaums für eine Backgammon-Position:



Beispiel 2.5. Beim Memory-Spiel stehen noch drei Paare aus. Eine Position von “1” ist bekannt. Spieler Weiß hat mit seinem ersten Halbzug eine “2” aufgedeckt.



Soll Weiß im zweiten Halbzug die bekannte “1” oder ein “?” aufdecken?

Entscheidung “?”:

- Mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ deckt Weiß das Gegenstück zur “2” auf und erhält einen Punkt. Anschließend zieht Weiß nochmals und kennt dabei genau eine der vier verbliebenen Karten.

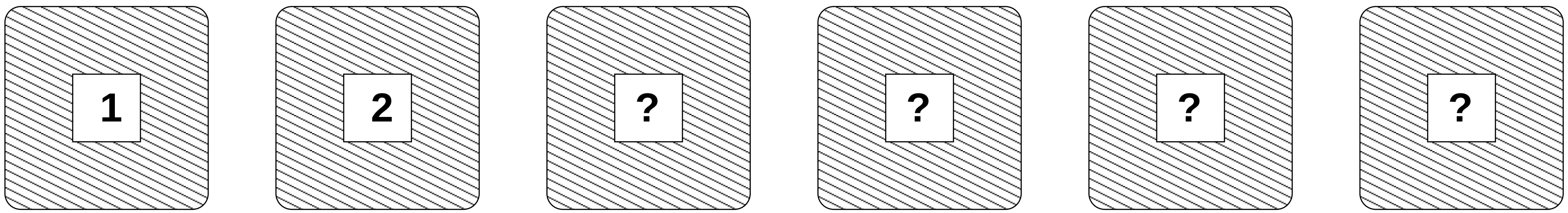
- Ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ deckt Weiß das Gegenstück zur

"1" auf. Hierdurch macht Schwarz einen sicheren Punkt. Anschließend ist Schwarz in der gleichen Situation wie Weiß beim ersten Fall.

- Mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ deckt Weiß eine "3" auf. Schwarz macht dann drei sichere Punkte.

- Im Erwartungswert heben sich die ersten beiden Fälle auf. Der erwartete Gewinn dieser Startegie ist somit $1/2 \cdot (-3) = -3/2$.

Entscheidung "1": Dann ist Schwarz bei diesem Informationsstand am Zug:



- Wir gehen davon aus, daß Schwarz eine unbekannte Karte aufdeckt.

- Mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$ deckt Schwarz eine “1” auf und macht einen sicheren Punkt. Mit dem Anschlusszug sichert sich Schwarz mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ die beiden restlichen Paare. Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ deckt Schwarz erst eine “3” und dann eine “2” auf. In diesem Fall gehen die beiden verbleibenden Paare an Weiß.

- Analog zum ersten Fall ist das Aufdecken einer “2” durch Schwarz.

- Mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ deckt Schwarz eine “3” auf. Das Aufdecken einer bekannten Karte im zweiten Halbzug macht keinen Sinn.
  - Mit der Gesamtwahrscheinlichkeit $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$ findet Schwarz eine “3” und erhält damit drei Punkte.

  – Mit der Gesamtwahrscheinlichkeit $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$ findet Schwarz keine “3”. Weiß macht dann drei Punkte.

- Gewinnerwartung für Weiß:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot(-1+2)\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot(-1+2)\right)-\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 3=-\frac{1}{3}$$

- Dies bedeutet auch, daß es für Schwarz keinen Sinn macht, eine bekannte Karte aufzudecken.

Fazit: Weiß wählt die Entscheidung mit dem höheren Erwartungswert und deckt die schon bekannte “1” auf.

Interpretation: Weiß vermeidet es dadurch, Schwarz zusätzliche Informationen zukommen zu lassen.

Bewertungen von Positionen

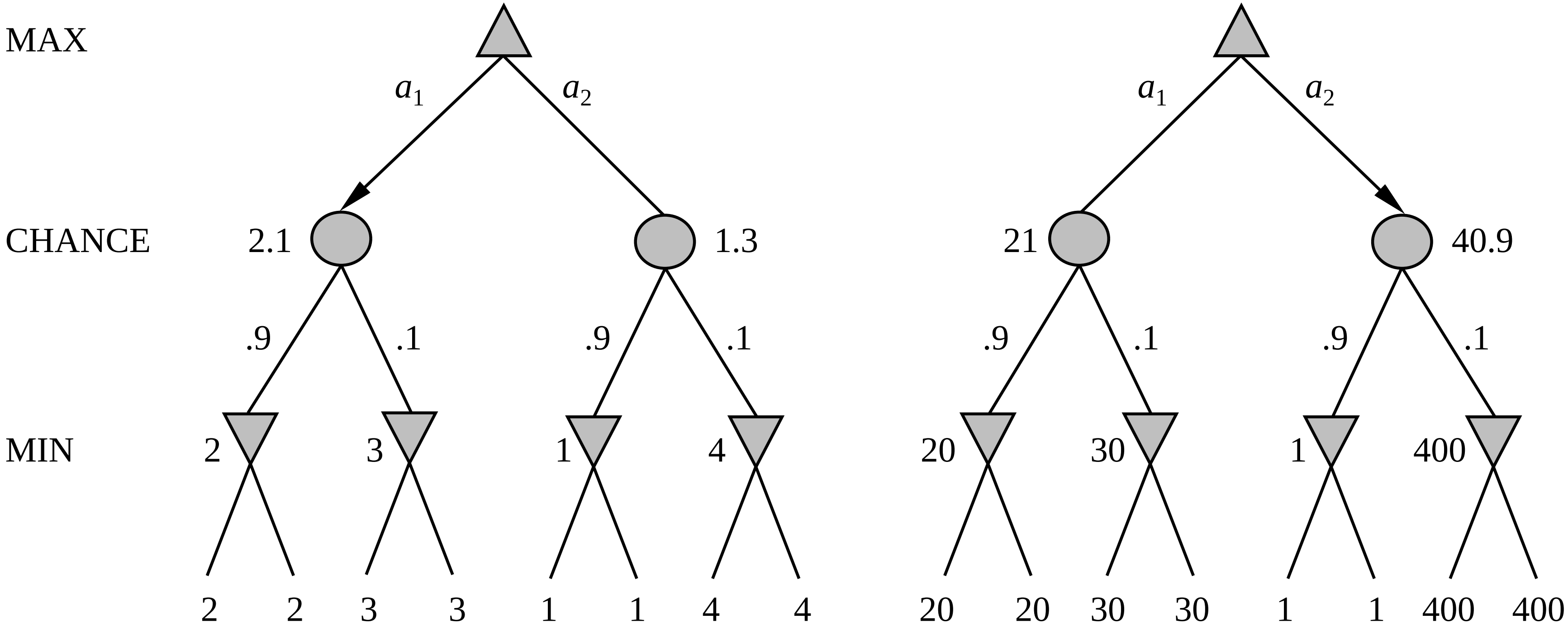
- Gegeben sei eine Nutzenfunktion $\mathfrak{U}$ für die Endzustände eines Spiels.

- Im rein kombinatorischen Fall führt jede ordnungserhaltende Transformation von $\mathfrak{U}$ bei Anwendung des Minimax-Verfahrens zu der gleichen Strategie wie $\mathfrak{U}$ selbst.

☞ Konsequenz: Die tatsächlichen Werte bei einer heuristischen Bewertungsfunktion sind ohne Bedeutung.

☞ Wesentlich ist, daß die Bewertungsfunktion möglichst einer ordnungserhaltenden Transformation von $\mathfrak{U}$ entspricht.

Im probabilistischen Fall geht diese Freiheit verloren:



☞ Die Bewertungsfunktion muß eine lineare Transformation der Gewinn-Wahrscheinlichkeiten sein.

Zusammenfassung

- Minimax-Prinzip zur Berechnung einer optimalen Entscheidung
- Heuristische Bewertungsfunktionen bei beschränkter Suchtiefe
- Alpha-Beta-Suche zur Beschneidung des Suchraums
- Erwartungswert und Zufallsknoten für Spiele mit Zufallselementen.