3. Logikbasierte Wissensrepräsentation und Inferenz

Am Beispiel der Aussagenlogik erklären wir schrittweise wichtige Elemente eines logischen Systems.

- Zunächst benötigt ein logisches System ein Vokabular,
- d.h. eine Menge von Namen für Aussagen über die reale Welt.
- Eine derartige Menge von Namen nennen wir *Signatur*. Solch eine Signatur wird üblicherweise durch Σ gekennzeichnet.

Aussagenlogische Signatur

Definition 3.1. Eine *aussagenlogische Signatur* Σ ist eine Menge von Bezeichnern, den *Aussagenvariablen*.

Beispiel 3.1. Die Menge

$$\Sigma_{AL} := \{\mathtt{hatFieber}, \mathtt{istKrank}, \mathtt{istArbeitsunfähig}\}$$

ist eine aussagenlogische Signatur, die drei Aussagenvariablen zur Verfügung stellt.

Im folgenden benutzen wir häufig Großbuchstaben als Aussagenvariablen.

Formeln

- Formeln ermöglichen es, Beziehungen zwischen Aussagen zu beschreiben.
- Formeln sind gemäß einer gewissen Syntax aufgebaut (sie sind *wohlgeformt*). Diese Syntax legt eine Wissensrepräsentationssprache fest.
- Die Formalsyntax ist üblicherweise rekursiv aufgebaut.
- Die *atomaren Formeln* ergeben sich aus der Signatur.
- Mit logischen Verknüpfungsoperatoren (den *Junktoren*) werden aus Formeln rekursiv komplexere Formeln aufgebaut.

Aussagenlogische Formeln

Definition 3.2. Für eine aussagenlogische Signatur Σ ist die Menge $\mathtt{Formel}(\Sigma)$ der *aussagenlogischen Formeln* wie folgt definiert:

- Die Elemente der Menge Σ sind aussagenlogische Formeln, die sogenannten *atomaren Formeln*.
- Falls F und G aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden Konstrukte aussagenlogische Formeln:

$(\neg F)$	Negation
$(F \land G)$	Konjunktion
$(F \lor G)$	Disjunktion
$(F \longrightarrow G)$	Implikation
$(F \leftrightarrow G)$	Äquivalenz

Bemerkung 3.1. Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir i.d.R. auf die Klammerung und benutzen statt dessen die folgenden Bindungsprioritäten:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \; .$$

Durch die Menge $\texttt{Formel}(\Sigma)$ wird die Sprache zur Repräsentation von Wissen definiert.

Interpretation

- Die Syntax einer Logik legt ausschließlich deren äußere Form fest, sie sagt aber nichts über die Bedeutung der Formeln aus.
- Benötigt wird eine Verbindung zwischen den syntaktischen Elementen der Logik und den Objekten der zu repräsentierenden Welt.
- Diese Verbindung wird durch eine sogenannte Interpretation (genauer: Σ-Interpretation) hergestellt.
- Eine *Σ-Interpretation* einer Signatur ist die Zuordnung von den Elementen der Signatur Σ (Namen) zu den Elementen der zu repräsentierenden Welt.

Belegung

In der Aussagenlogik ist die Interpretation ganz einfach: Für jede Aussagenvariable wird ein wahrheitswert festgelegt.

Definition 3.3. Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur.

- Eine Abbildung $\mathrm{I} : \Sigma \longrightarrow \{\mathtt{wahr}, \mathtt{falsch}\}$ heißt *aussagenlogische Interpretation* oder *Belegung* für Σ.
- $\mathtt{Int}(\Sigma)$ bezeichnet die Menge der Belegungen für Σ.

Beispiel 3.2. Für die Signatur aus Beispiel 3.1 ist I definiert durch

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{I}(\mathtt{hatFieber}) & = & \mathtt{wahr} \\ \mathrm{I}(\mathtt{istKrank}) & = & \mathtt{wahr} \\ \mathrm{I}(\mathtt{istArbeitsunfähig}) & = & \mathtt{falsch} \end{array}$$

eine mögliche Belegung.

Erfüllungsrelation

- Die Interpretation liefert uns nur einen Wahrheitswert für die atomaren Formeln.
- Wir benötigen eine Ausdehnung der Semantik auf alle Formeln $F \in \mathtt{Formel}(\Sigma)$.
- Dieses stellt uns eine Erfüllungsrelation $\models$ bereit.
- Durch solch eine Erfüllungsrelation ist definiert, ob eine Formel F in einer Σ-Interpretation I wahr ist oder nicht, d.h.
- sie ordnet einer Interpretation und einer Formel einen Wahrheitswert zu.
- Eine Erfüllungsrelation definiert hierzu im wesentlichen die Semantik der Junktoren.

Definition 3.4. Es seien $F, G \in \texttt{Formel}(\Sigma)$ (nichtatomare) aussagenlogische Formeln. Durch die folgenden Wahrheitstafel wird eine Σ-Interpretation I von Σ auf die Menge $\texttt{Formel}(\Sigma)$ ausgedehnt:

$I(F)$	$I(\neg F)$
f	w
w	f

$I(F)$	$I(G)$	$I(F \vee G)$	$I(F \wedge G)$	$I(F \rightarrow G)$
f	f	f	f	w
f	w	w	f	w
w	f	w	f	f
w	w	w	w	w

Für $I \in \texttt{Int}(\Sigma)$ und $F \in \texttt{Formel}(\Sigma)$ gelte:

$$I \models F \text{ gdw. } I(F) = \texttt{w}$$

Modell

Definition 3.5. Es seien $I \in \mathtt{Int}(\Sigma)$ und $F \in \mathtt{Formel}(\Sigma)$. Gilt $I \models F$, so sagen wir

- "I erfüllt F" und
- bezeichnen I als *Σ-Modell* für F.

$\mathtt{Mod}_\Sigma(F) \subseteq \mathtt{Int}(\Sigma)$ bezeichnet die *Menge aller Σ-Modelle* für F.

Für eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathtt{Formel}(\Sigma)$ von Formeln gelte $I \models \mathcal{F}$ gdw. $I \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

I ist dann ein *Modell* für die Formelmenge $\mathcal{F}$.

Beispiel 3.3. Die Interpretation I aus Beispiel 3.2 ist ein Modell für die Formel

$$\texttt{hatFieber} \rightarrow \texttt{istKrank}$$

Dagegen ist I kein Modell für die Formel

$$\texttt{istKrank} \rightarrow \texttt{istArbeitsunfähig}$$

Beweis mit Wahrheitstafeln ✎.

Erfüllbarkeit

Besonders interessant sind Formeln, die für alle Interpretationen wahr bzw. falsch sind.

> "Kräht der Hahn auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist."

Definition 3.6. Eine Formel F heißt

- *erfüllbar* gdw. es ein Modell für die Formel gibt.
- *unerfüllbar (Kontradiktion)* gdw. es kein Modell für die Formel gibt.
- *allgemeingültig (Tautologie)* gdw. jede Interpretation ein Modell für die Formel ist.
- *falsifizierbar* gdw. es eine Interpretation gibt, die kein Modell für die Formel ist.

Die Begriffe werden in analoger Weise für Formelmengen $\mathcal{F} \subset \texttt{Formel}(\Sigma)$ verwendet.

Beispiel 3.4. Wichtige Tautologien sind:

- Modus Ponens

$$(F \land (F \to G)) \to G$$

- Modus Tollens

$$((F \to G) \land \neg G) \to \neg F$$

- Und-Elimination

$$(F \land G) \to F$$

- Oder-Introduktion

$$F \to (F \lor G)$$

- Resolutionsregel

$$((F \to G) \land (\neg F \to H)) \to (G \lor H)$$

Semantische Folgerung

- In einem wissensbasierten System wollen wir Fakten aus anderen Fakten und Regeln herleiten.
- Wir können eine Wissensbasis als eine Menge $\mathcal{F} \subset \texttt{Formel}(\Sigma)$ betrachten.
- Eine solche Menge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ entspricht der Konjunktion $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$.
- Unser übliches Verständnis von Folgerung läßt sich so ausdrücken:

  Ist eine Formel G immer dann wahr, wenn alle Formeln aus $\mathcal{F}$ wahr sind, dann folgt G aus $\mathcal{F}$.
- Damit können wir die Erfüllungsrelation $\models$ auf eine Beziehung zwischen Formeln und Formelmengen ausdehnen.

Definition 3.7. Es seien $F, G \in \mathtt{Formel}(\Sigma)$ aussagenlogische Formeln.

- G heißt *semantische Folgerung* von F gdw. jedes Modell für F auch ein Modell für G ist.
- In diesem Fall schreiben wir $F \models G$.
- Wir sagen auch "G folgt logisch aus F" bzw. "aus F folgt semantisch G".
- Für eine Formelmenge $\mathcal{F}$ gelte $\mathcal{F} \models G$ gdw. jedes Modell für $\mathcal{F}$ auch ein Modell für G ist.
- Für Formelmengen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ gelte $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ gdw. $\mathcal{F} \models G$ für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt.

Beispiel 3.5. Gegeben sei die Formelmenge $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{lcl} \texttt{hatFieber} & \rightarrow & \texttt{istKrank}, \\ \texttt{istKrank} & \rightarrow & \texttt{istArbeitsunfähig}, \\ \texttt{hatFieber} & & \end{array} \right\}$$

Kann aus $\mathcal{F}$ die Aussage `istArbeitsunfähig` gefolgert werden, d.h. gilt $\mathcal{F} \models$ `istArbeitsunfähig`?

Ja! Beweis mit Wahrheitstafeln ✎.

Beispiel 3.6. Wir wollen uns ein Haustier anschaffen und machen folgende Überlegungen:

1. Es sollte nur ein Hund (H), eine Katze (K) oder ein Hamster (M) sein.
2. Besitzer wertvoller Möbel (W) sollten keine Katze anschaffen, da diese die Möbel zerkratzen würde.
3. Ein Hund erfordert ein freistehendes Haus (F), damit sich kein Nachbar durch das Bellen gestört fühlt.

Wir vermuten: Für einen Besitzer wertvoller Möbel ohne freistehendes Haus kommt nur ein Hamster in Frage.

Die Aussagen lauten als Aussagenlogische Formeln:

1. $H \vee K \vee M$
2. $W \rightarrow \neg K$
3. $H \rightarrow F$

Hyp. $W \wedge \neg F \rightarrow M \wedge \neg H \wedge \neg K$

Nr.	$I(H)$	$I(K)$	$I(M)$	$I(W)$	$I(F)$	$1. \wedge 2. \wedge 3.$	Hyp.
1.	f	f	f	f	f	f	w
2.	f	f	f	f	w	f	w
3.	f	f	f	w	f	f	f
4.	f	f	f	w	w	f	w
5.	f	f	w	f	f	w	w
6.	f	f	w	f	w	w	w

Nr.	$I(H)$	$I(K)$	$I(M)$	$I(W)$	$I(F)$	$1. \land 2. \land 3.$	Hyp.
7.	f	f	w	w	f	w	w
8.	f	f	w	w	w	w	w
9.	f	w	f	f	f	w	w
10.	f	w	f	f	w	f	w
11.	f	w	f	w	f	f	f
12.	f	w	f	w	w	f	w
13.	f	w	w	f	f	w	w
14.	f	w	w	f	w	w	w
15.	f	w	w	w	f	f	f
16.	f	w	w	w	w	f	w
17.	w	f	f	f	f	f	w
18.	w	f	f	f	w	f	w
19.	w	f	f	w	f	f	f

Nr.	I(H)	I(K)	I(M)	I(W)	I(F)	$1. \land 2. \land 3.$	Hyp.
20.	*w*	f	f	*w*	*w*	*w*	*w*
21.	*w*	f	*w*	f	f	f	*w*
22.	*w*	f	*w*	f	*w*	f	*w*
23.	*w*	f	*w*	*w*	f	f	f
24.	*w*	f	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
25.	*w*	*w*	f	f	f	f	*w*
26.	*w*	*w*	f	f	*w*	*w*	*w*
27.	*w*	*w*	f	*w*	f	f	f
28.	*w*	*w*	f	*w*	*w*	f	*w*
29.	*w*	*w*	*w*	f	f	f	*w*
30.	*w*	*w*	*w*	f	*w*	f	*w*
31.	*w*	*w*	*w*	*w*	f	f	f
32.	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	f	*w*

Fazit:

- Es gibt zehn Modelle für die Formelmenge $\{1., 2., 3.\}$. Dies sind die Interpretationen mit den Nummern 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 20, 24, 26.
- Jedes dieser Modelle ist auch ein Modell für die Hypothese.
- Somit folgt die Hypothese semantisch aus $\{1., 2., 3.\}$.

Satz 3.1. *Es seien* F, G *aussagenlogische Formeln. Dann gilt:*

- F *ist Tautologie gdw.* $\neg F$ *ist unerfüllbar.*
- $F \models G$ *gdw.* $F \rightarrow G$ *ist Tautologie.*
- $F \models G$ *gdw.* $F \wedge \neg G$ *ist unerfüllbar.*

Bemerkung 3.2. Die Äquivalenzen können auf Formelmengen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ ausgedehnt werden.

Kalkül

- Schon das kleine Beispiel 3.6 verdeutlichte, daß Inferenz auf Basis der Definition der semantischen Folgerung ineffizient ist.
- Allgemein müssen für eine Formelmenge $\mathcal{F}$ mit k verschiedenen Aussagevariablen 2^k Belegungen getestet werden.
- Daher benutzt man für die maschinelle Inferenz Techniken, die allein auf der Syntax der Formeln beruhen.
- Statt alle möglichen Belegungen zu testen, sucht man nach einer Folge von syntaktischen Umformungen, die die Hypothese zu beweisen.

- Ein *Kalkül* besteht aus einer Menge von logischen *Axiomen* und *Inferenzregeln*.
- Die Axiome sind entweder eine Menge von elementaren Tautologien (*positiver Kalkül*) oder
- eine Menge von elementaren Widersprüchen (*negativer Kalkül*).

- Die Inferenzregeln sind Vorschriften, nach denen aus Formeln andere Formeln abgeleitet werden können.
- Sie werden in der folgenden Form notiert:

$$\frac{F_1, \ldots, F_n}{F}$$

  Dies besagt, daß aus den Formeln (der syntaktischen Form) $F_1, \ldots, F_n$ (Bedingungen) eine Formel der Form F (Schlussfolgerung) abgeleitet werden kann.
- So können aus den Tautologien von Beispiel 3.4 Inferenzregeln gebildet werden. Aus dem Modus Ponens ergibt sich die Inferenzregel:

$$\frac{F, F \to G}{G}$$

- Ist eine Formel F aus den Formeln $F_1, \ldots, F_n$ durch eine Folge von Anwendungen der Inferenzregeln ableitbar, so schreibt man

$$F_1, \ldots, F_n \vdash F$$

Beispiel 3.7. Gegeben sei die Formelmenge $\mathcal{F}$ aus Beispiel 3.5. Mit der Inferenzregel Modus Ponens leiten wir ab:

$$\frac{\mathtt{hatFieber}, \mathtt{hatFieber} \rightarrow \mathtt{istKrank}}{\mathtt{istKrank}}$$

Nochmals angewandt ergibt sich:

$$\frac{\mathtt{istKrank}, \mathtt{istKrank} \rightarrow \mathtt{istArbeitsunfaehig}}{\mathtt{istArbeitsunfaehig}}$$

Also gilt: $\mathcal{F} \vdash \mathtt{istArbeitsunfähig}$.

Eigenschaften von Kalkülen

- Ein Kalkül ist *korrekt* gdw. alle syntaktischen Ableitungen auch semantische Folgerungen sind, d.h. für Formeln F und G gilt:

$$F \vdash G \text{ impliziert } F \models G$$

- Ein Kalkül ist *vollständig* gdw. alle semantischen Folgerungen auch syntaktisch abgeleitet werden können, d.h. für Formeln F und G gilt:

$$F \models G \text{ impliziert } F \vdash G$$

- Ein Kalkül ist *widerlegungsvollständig* gdw. aus allen semantischen Folgerungen eine unerfüllbare Formel $\Box$ abgeleitet werden kann, d.h. für Formeln F und G gilt:

$$F \models G \text{ impliziert } F \wedge \neg G \vdash \Box$$

Semantische Äquivalenz

Beispiel 3.8. Syntaktisch unterschiedliche Formel können identische Wahrheitswerte haben. Man betrachte die Formeln $\neg(F \vee G)$ und $\neg F \wedge \neg G$:

F	G	$\neg(F \vee G)$	$\neg F \wedge \neg G$
f	f	w	w
f	w	f	f
w	f	f	f
w	w	f	f

Definition 3.8. Zwei aussagenlogische Formeln $F, G \in \mathtt{Formel}(\Sigma)$ heißen *semantisch äquivalent* gdw. $I(G) = I(F)$ für jede Belegung $I \in \mathtt{Int}(\Sigma)$ gilt.

Wenn F und G semantisch äquivalent sind, schreiben wir hierfür $F \equiv G$.

Lemma 3.2. *Wichtige semantische Äquivalenzen sind:*

$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg F \vee G$	Implikation
$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$\neg F \wedge \neg G$	DeMorgan
$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$\neg F \vee \neg G$	
$\neg\neg F$	$\equiv$	F	Dop. Negation
$F \vee F$	$\equiv$	F	Idempotenz
$F \wedge F$	$\equiv$	F	
$F \wedge (F \vee G)$	$\equiv$	F	Absorption
$F \vee (F \wedge G)$	$\equiv$	F	
$F \vee G$	$\equiv$	$G \vee F$	Kommutativität
$F \wedge G$	$\equiv$	$G \wedge F$	
$F \wedge (G \wedge H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \wedge H$	Assoziativität
$F \vee (G \vee H)$	$\equiv$	$(F \vee G) \vee H$	
$F \wedge (G \vee H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	Distributivität
$F \vee (G \wedge H)$	$\equiv$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	

Normalformen

Für die maschinelle Inferenz ist die Darstellung einer Formel in einer standardisierten und möglichst einfachen Form wichtig.

Definition 3.9.

- Eine Formel F ist ein *Literal* gdw. F eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel ist.
- Eine Formel F ist in *konjunktiver Normalform (KNF)* gdw. F eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h.

$$F = ((L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n}))$$

- Eine Formel F ist in *disjunktiver Normalform DNF* gdw. F eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h.

$$F = ((L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \vee \ldots \vee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n}))$$

Beispiel 3.9. Die Formeln

$$(F \lor \neg G \lor H) \land J \text{ und } \neg F \land G$$

sind in KNF.

Die Formeln

$$(\neg F \land G) \lor (\neg H \land \neg J) \text{ und } F \lor \neg G$$

sind in DNF.

Transformation in Normalform

Umformungsregeln für KNF/DNF-Transformation:

Schritt 1	$F \rightarrow G$	$\mapsto$	$\neg F \vee G$
	$\neg\neg F$	$\mapsto$	F
Schritt 2	$\neg(F \wedge G)$	$\mapsto$	$\neg F \vee \neg G$
	$\neg(F \vee G)$	$\mapsto$	$\neg F \wedge \neg G$
Schritt 3 (KNF)	$F \vee (G \wedge H)$	$\mapsto$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
	$(F \wedge G) \vee H$	$\mapsto$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$
Schritt 3 (DNF)	$F \wedge (G \vee H)$	$\mapsto$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
	$(F \vee G) \wedge H$	$\mapsto$	$(F \wedge H) \vee (G \wedge H)$

Klauselform

Für die maschinelle Inferenz benutzt man eine Mengendarstellung der KNF, die sogenannte Klauselform.

Definition 3.10.

- Eine *Klausel* ist eine Menge von Literalen $\{L_1, \ldots, L_n\}$, die der Disjunktion $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ entspricht.
- Die Klausel $\{\}$ ist die *leere Klausel*. Sie wird in der Form $\square$ geschrieben und entspricht dem Wahrheitswert `falsch` $(f, 0)$.
- Die *Klauselform* einer Formel F in KNF mit

$$F = ((L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n}))$$

ist die Menge

$$F = \{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,m_1}\}, \ldots, \{L_{n,1}, \ldots, L_{n,m_n}\}\}$$

Resolution

Beispiel 3.10. *Resolution* basiert auf folgendem Schema:

- Wenn es regnet (R), gehe ich ins Kino (K), also $R \rightarrow K$.
- Wenn es nicht regnet ($\neg R$), gehe ich ins Schwimmbad (S), also $\neg R \rightarrow S$.
- Hieraus folgt, daß ich ins Kino oder ins Schwimmbad gehe, also

$$\{R \rightarrow K, \neg R \rightarrow S\} \models K \vee S$$

Als Inferenzregel geschrieben lautet die Resolution wie folgt:

$$\frac{F \rightarrow G, \neg F \rightarrow H}{G \vee H}$$

Für die maschinelle Inferenz benutzt man Resolution in Verbindung mit Klauselform.

Definition 3.11. Seien K_1, K_2 Klauseln und sei A eine atomare Formel mit $A \in K_1$ und $\neg A \in K_2$. Dann heißt die Klausel R mit

$$R = (K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\})$$

Resolvente von K_1 und K_2.

Ein Resolutionsschritt wird wie folgt dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[dl, dash] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 3.11. Modus Ponens und Modus Tollens können als Spezialfall der Resolution dargestellt werden:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{A\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg A, B\} \arrow[dl, dash] \\
& \{B\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\neg B\} \arrow[dr, dash] & & \{B, \neg A\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\neg A\} &
\end{tikzcd}
$$

Die Resolvente zweier widersprüchlicher Klauseln ist die leere Klausel:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{A\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg A\} \arrow[dl, dash] \\
& \square &
\end{tikzcd}
$$

Beispiel 3.12. Herleitung der Aussage aus Beispiel 3.6 mit der Resolutiosregel:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\{H, K, M\} \arrow[dr] & & \{\neg H, F\} \arrow[dl] & \\
& \{F, K, M\} \arrow[dr] & & \{\neg W, \neg K\} \arrow[dl] \\
& & \{\neg W, F, M\} &
\end{tikzcd}
$$

- Das letzte Beispiel zeigt den direkten Beweis einer Formel mit Hilfe der Resolutionsregeln.
- Beim Resolutionskalkül führt man stattdessen einen Widerspruchsbeweis.
- D.h., man beweist $F \models G$, in dem man zeigt, daß $F \wedge \neg G$ unerfüllbar ist (vgl. Satz 3.1).
- Dies bedeutet, man leitet aus den Klauseln von F vereinigt mit den Klauseln, die sich aus $\neg G$ ergeben, die leere Klausel ab.

Satz 3.3. *Es sei F eine Klauselmenge und es seien $K_1, K_2 \in F$. Für eine Resolvente R von K_1 und K_2 gilt $F \models R$.*

Insbesondere ist F genau dann erfüllbar, wenn $F \cup \{R\}$ erfüllbar ist.

- Satz 3.3 sagt aus, daß durch die Hinzunahme von Resolventen die Erfüllbarkeitseigenschaft einer Klauselmenge nicht beeinträchtigt wird.
- Dies nutzt man im Resolutionskalkül aus. Um zu zeigen, daß eine Klauselmenge F unerfüllbar ist, bildet man solange Resolventen und fügt sie der Klauselmenge hinzu, bis irgendwann eine Menge F' entsteht, die die leere Klausel enthält.
- Diese Klauselmenge F' ist unerfüllbar, also muß auch die ursprüngliche Klauselmenge F unerfüllbar sein.

Beispiel 3.13. Herleitung der Aussage aus Beispiel 3.6 mit dem Resolutionskalkül:

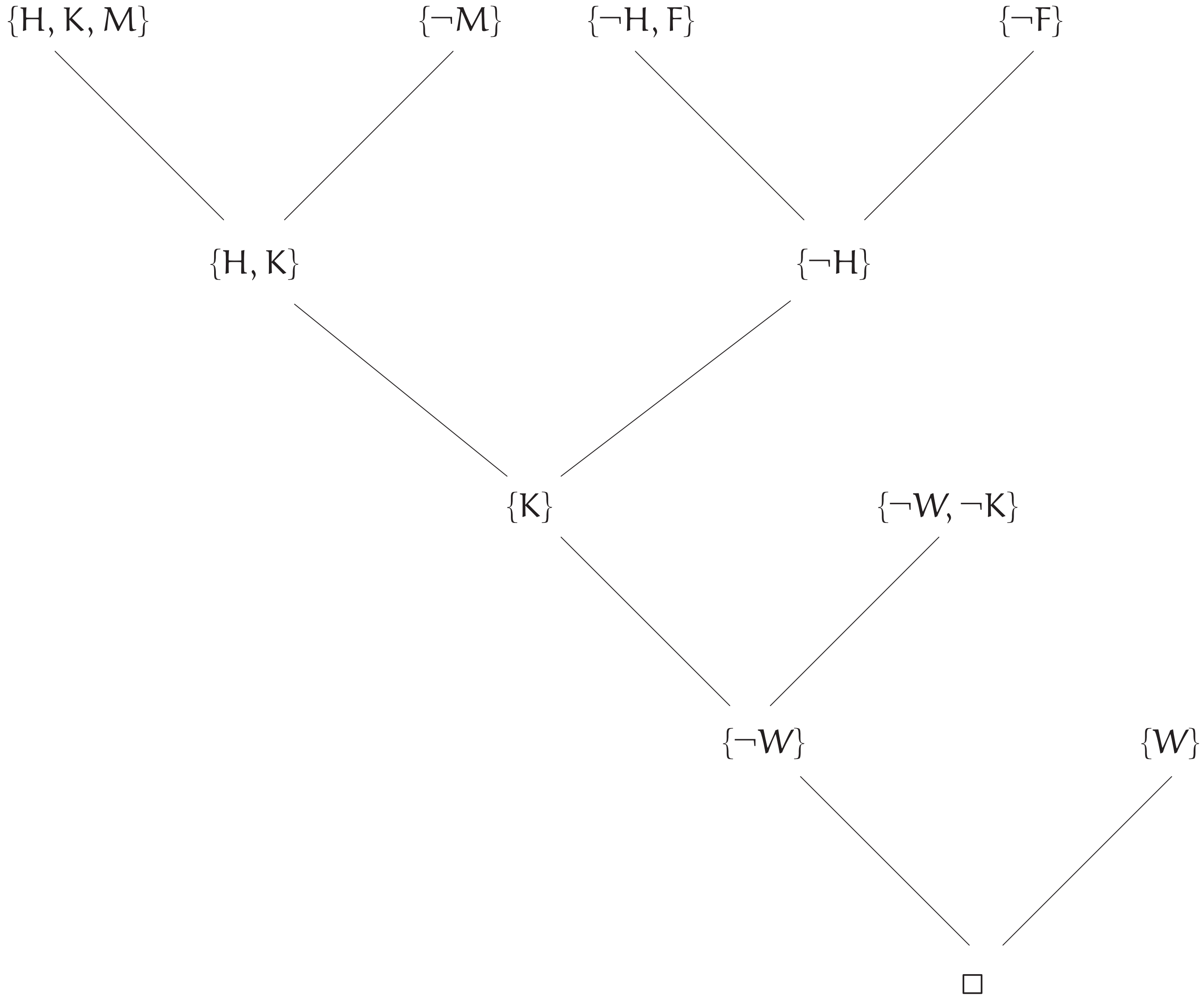
Klauselmenge V der Voraussetzungen:

$$\{\{H, K, M\}, \{\neg W, \neg K\}, \{\neg H, F\}\}$$

Klauselmenge A der negierten zu beweisenden Aussage:

$$\{\{W\}, \{\neg F\}, \{\neg M\}\}$$

Es gilt, aus $V \cup A$ die leere Klausel abzuleiten.


$\{H, K, M\}$
$\{\neg M\}$
$\{\neg H, F\}$
$\{\neg F\}$
$\{H, K\}$
$\{\neg H\}$
$\{K\}$
$\{\neg W, \neg K\}$
$\{\neg W\}$
$\{W\}$
$\Box$

Eigenschaften der Resolution

Satz 3.4. *Eine Klauselmenge* $\mathbb{F}$ *ist unerfüllbar genau dann, wenn die leere Klausel* $\square$ *mit einer endlichen Anzahl von Resolutionsschritten aus* $\mathbb{F}$ *abgeleitet werden kann.*

Bemerkung 3.3. Aus Satz 3.4 folgt die Korrektheit und (Widerlegungs)-Vollständigkeit des Resolutionskalküls:

- Die leere Klausel kann nur dann abgeleitet werden, wenn die ursprüngliche Klauselmenge unerfüllbar ist $\Longrightarrow$ *Korrektheit*
- Das Resolutionskalkül findet für jede unerfüllbare Klauselmenge eine Widerlegung, d.h. die leere Klausel wird abgeleitet $\Longrightarrow$ *Vollständigkeit*

- Im Fall der Aussagenlogik ist es entscheidbar, ob die leere Klausel abgeleitet werden kann.
- Für n Aussagenvariablen gibt es höchstens 4^n verschiedene Klauseln, die aus diesen Aussagenvariablen gebildet werden können.
- Der Prozess der Resolventenbildung ist also endlich, d.h. irgendwann können keine neuen Resolventen mehr gebildet werden.

Lemma 3.5. *Es sei F eine Klauselmenge. F' sei eine Klauselmenge,*

- *die durch sukzessive Resolventenbildung aus F entstanden ist.*
- *F' enthalte nicht die leere Klausel und*
- *aus F' kann keine neue Resolvente erzeugt werden.*

Dann ist F' und somit auch F erfüllbar.

Fazit zur Aussagenlogik

- Eine Signatur legt die Variablen der Sprache fest.
- Aus den Variablen entsteht durch Festlegung einer Syntax eine Wissensrepräsentationssprache (Menge der Formeln).
- Eine Interpretation gibt den Variablen eine Bedeutung.
- Die Erfüllungsrelation dehnt diese Bedeutung auf alle Formeln aus
- Über die Erfüllungsrelation wird der Begriff der semantischen Folgerung festgelegt.
- Ein Kalkül stellt die Äquivalenz zwischen semantischer Folgerung und syntaktischen Operationen her.