

Maximalflussproblem als LP

Man führe für jede gerichtete Kante $(v, w) \in E$ eine Variable x_{vw} ein.
Damit erhält man das LP

$$\max \sum_{(s,w) \in E} x_{sw} - \sum_{(w,s) \in E} x_{ws}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_{vw} \leq c(v, w) \text{ für alle } (v, w) \in E$$

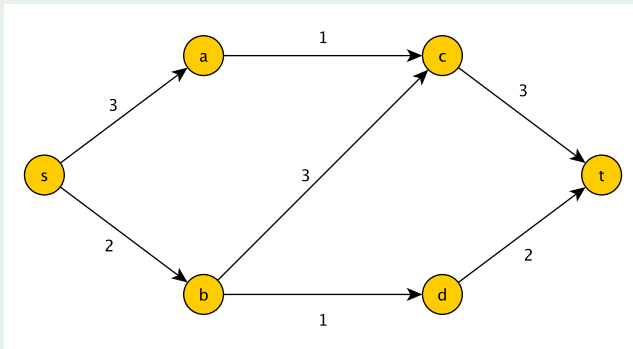
$$\sum_{(w,v) \in E} x_{wv} - \sum_{(v,w) \in E} x_{vw} = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$

sowie Vorzeichenbedingungen

$$x_{vw} \geq 0 \text{ für alle } (v, w) \in E$$

Beispiel 1.25

Gegeben Sei das Flussnetzwerk



Das LP für das Maximalflussproblem lautet dann

$$\max x_{sa} + x_{sb}$$

Fortsetzung Beispiel.

unter den Nebenbedingungen

$$x_{sa} \leq 3$$

$$x_{sb} \leq 2$$

$$x_{ac} \leq 1$$

$$x_{bc} \leq 3$$

$$x_{bd} \leq 1$$

$$x_{ct} \leq 3$$

$$x_{dt} \leq 2$$

$$x_{sa} - x_{ac} = 0$$

$$x_{sb} - x_{bc} - x_{bd} = 0$$

$$x_{ac} + x_{bc} - x_{ct} = 0$$

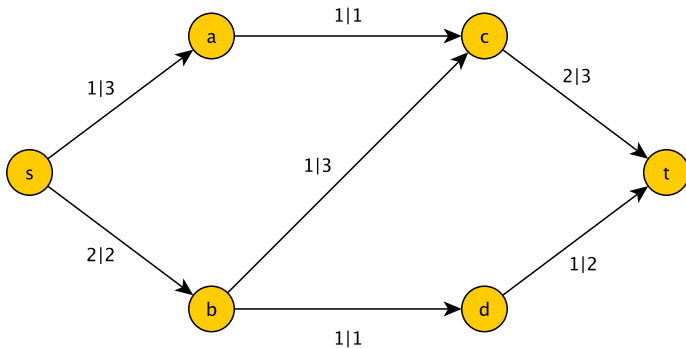
$$x_{bd} - x_{dt} = 0$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{sa}, x_{sb}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{ct}, x_{dt} \geq 0$$

LP-Formulierung für GLPK: siehe Homepage

Maximalfluss:



Koeffizientenmatrix in Normalform

Für jede Strukturvariable x_{vw} wird eine Schlupfvariable s_{vw} eingeführt.

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Satz 1.26

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{F}$ eines Maximalflussproblems in Normalform ist total unimodular.

Beweis.

Die Matrix $\mathbf{A}'$ ist eine Teilmatrix der Inzidenzmatrix von G (es fehlen die Zeilen für s und t).

Weil eine Inzidenzmatrix total unimodular ist, ist auch jede Teilmatrix total unimodular. Also ist $\mathbf{A}'$ total unimodular.

Jede quadratische Untermatrix mit Spalten nur aus der linken Hälfte (Strukturvariablen) und genau einer Zeile aus der oberen Hälfte (Kapazitätsrestriktionen) ist total unimodular.

Begründung: Man entwickle nach der Zeile aus der oberen Hälfte.

Mit Induktion folgt: Jede quadratische Untermatrix mit Spalten nur aus der linken Hälfte ist total unimodular.

Fortsetzung Beweis.

Jede quadratische Untermatrix mit genau einer Spalte aus der rechten Hälfte (Schlupfvariablen) ist total unimodular.

Begründung: Man entwickle nach dieser Spalte.

Mit Induktion folgt: $\mathbf{F}$ ist total unimodular.

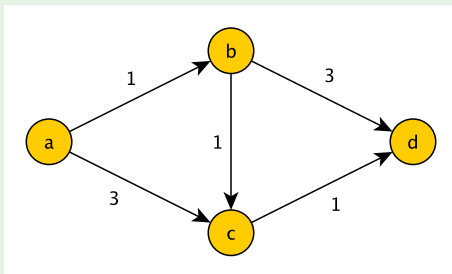
Folgerung 1.27

Für ganzzahlige Kapazitäten liefert der Simplexalgorithmus stets einen ganzzahligen Maximalfluss als optimale Lösung.

Kürzeste Wege

Beispiel 1.28

Für das Netzwerk



soll ein kürzester Weg von a nach d ermittelt werden.

Wir führen für jede gerichtete Kante $e = (v, w)$ eine Variable x_{vw} ein.
Dann lautet das LP:

$$\min x_{ab} + 3x_{ac} + x_{bc} + 3x_{bd} + x_{cd}$$

Fortsetzung Beispiel.

unter den Nebenbedingungen

$$x_{ab} - x_{bc} - x_{bd} = 0$$

$$x_{ac} + x_{bc} - x_{cd} = 0$$

$$-x_{ab} - x_{ac} = -1$$

$$x_{bd} + x_{cd} = 1$$

und

$$x_{ab}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{cd} \in \{0, 1\}$$

bzw. für das relaxierte LP

$$0 \leq x_{ab}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{cd} \leq 1$$

Lemma 1.29

Das relaxierte LP zur Ermittlung eines kürzesten Weges hat unabhängig von den Kantengewichten ausschließlich ganzzahlige Ecken.

Transport- und Zuordnungsproblem revisited

Die Matrix $\mathbf{A}'$ der Nebenbedingungen eines relaxierten Zuordnungsproblems entspricht der **Inzidenzmatrix eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$** .

Damit ist die Matrix $\mathbf{A}'$ **total unimodular**.

Für die Beschränkungen $x_{ij} \leq 1$ werden **zusätzliche Schlupfvariablen** benötigt.

Insgesamt entsteht eine totale unimodulare Matrix in der gleichen Form wie beim Maximalflussproblem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Damit haben wir einen **anderen Beweis für Satz 1.8**: Beim relaxierten Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Beim Transportproblem entspricht die Koeffizientenmatrix direkt der Inzidenzmatrix einer vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$.

Konsequenz: Wenn die a_i und b_j alle ganzzahlig sind, dann **hat das Transportproblem nur ganzzahlige Ecken**.

Zusammenfassung

- Ganzzahlige Ecken beim Zuordnungsproblem
- Totale Unimodularität der Koeffizientenmatrix als wesentlicher Teil einer hinreichenden Bedingung für ganzzahlige Ecken
- Inzidenzmatrizen als Beispiele für total unimodulare Matrizen
- Maximalflussproblem und Kürzeste Wege als Beispiele für graphentheoretische LPs mit ganzzahligen Ecken.