Ecken des Zuordnungsproblems

Definition 1.6

Ein Zuordnungsproblem mit den Vorzeichenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

statt $x_{ij} \in \{0, 1\}$ heißt relaxiertes Zuordnungproblem.

Beispiel 1.7

Wir betrachten ein relaxiertes Zuordnungproblem mit Kostenmatrix

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Dann sind

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) \\
&= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{y} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ und} \\
\mathbf{z} &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

optimale Lösungen.
Wegen

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$$

ist aber $\mathbf{z}$ keine Ecke und würde damit vom Simplexalgorithmus niemals als optimale Lösung ermittelt.

Ganzzahligkeit der Ecken beim Zuordnungsproblem

Satz 1.8

Für jedes relaxierte Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Für ein relaxiertes Zuordnungsproblem der Größe $n \times n$ gilt also

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke } \Rightarrow \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n \times n}$$

Beweis.

Induktion über n.
$n = 1$: $x_{11} = 1$ ist die einzige zulässige und damit optimale Lösung.
$n - 1 \to n$: Es sei $\mathbf{x}$ Ecke eines relaxierten $n \times n$-Zuordnungsproblems.
Fall 1: Es existieren $1 \leq i, j \leq n$ mit $x_{ij} = 1$.
Dann streiche aus dem Zuordnungsproblem Zeile i und Spalte j und aus $\mathbf{x}$ alle entsprechenden Komponenten. Der Restvektor von $\mathbf{x}$ muss dann eine Ecke des $(n-1) \times (n-1)$ Zuordnungsproblems sein, das nach I.V. nur ganzzahlige Ecken hat.

Fortsetzung Beweis.

Fall 2: Es existiert kein i, j mit $x_{ij} = 1$.

Damit folgt $0 \leq x_{ij} < 1$ für alle i, j.

Wegen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ für alle i folgt: Für jedes i gibt es mindestens zwei Variablen $x_{ij} > 0$.

Damit existieren mindestens $2n$ Variablen $x_{ij} > 0$.

Widerspruch, denn eine Ecke $\mathbf{x}$ und damit eine zulässige Basislösung hat nur $2n - 1$ BVs.

Folgerung 1.9

Wir können Zuordnungsprobleme mit dem Simplexalgorithmus optimal lösen.

Konsequenz

Wir können Zuordnungsprobleme lösen, indem wir

- zum relaxierten Problem übergehen und
- das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus lösen.

Wir wollen nun untersuchen,

- für welche weiteren kombinatorischen Probleme solch ein Vorgehen möglich ist, bzw.
- welche Bedingungen hinreichend für ganzzahlige Ecken sind.

Quadratische Untermatrizen

Definition 1.10

Für eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie

- Zeilenindizes $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ und
- Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$

heißt die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

quadratische Untermatrix von **A**.

Totale unimodulare Matrix

Definition 1.11

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist total unimodular genau dann, wenn jede quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$ die Determinante $0, 1$ oder -1 hat.

- Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})$ total unimodular ist, dann sind alle Matrixelemente a_{ij} gleich $0, 1$ oder -1.
- Die Umkehrung gilt natürlich nicht.

Beispiel 1.12

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

ist total unimodular.

Inzidenzmatrix für gerichtete Graphen

Definition 1.13

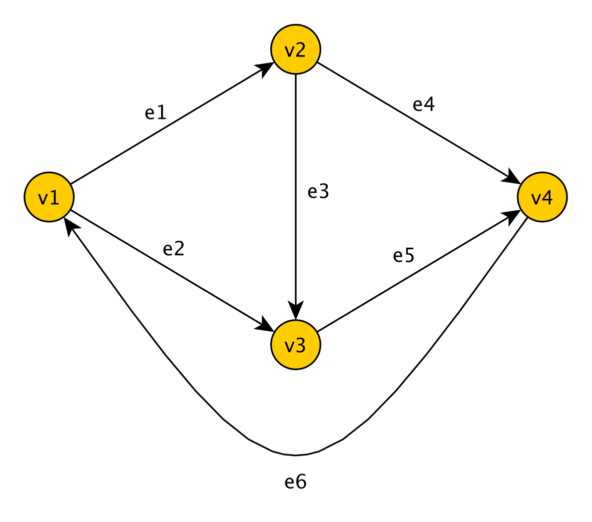
Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
Dann heißt die $m \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{wenn } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 1 & \text{wenn } v_i \text{ Endknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix von G.

Beispiel 1.14

Die Matrix von Beispiel 1.12 ist Inzidenzmatrix des folgenden Graphen:



Inzidenzmatrix für ungerichtete Graphen

Definition 1.15

Es sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
Dann heißt die $m \times n$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \text{ inzident mit } e_j \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix von G.

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (1)

Lemma 1.16

Es sei G ein gerichteter Graph mit m Knoten. Dann hat die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ von G einen Rang $r(\mathbf{A}) \leq m - 1$.

Beweis.

Die Summe der Zeilenvektoren ergibt den Nullvektor, da in jeder Spalte genau eine 1 und eine -1 existiert. $\square$

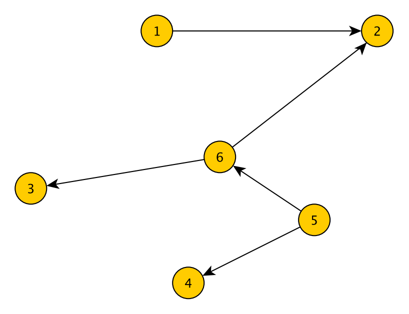
Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (2)

Definition 1.17

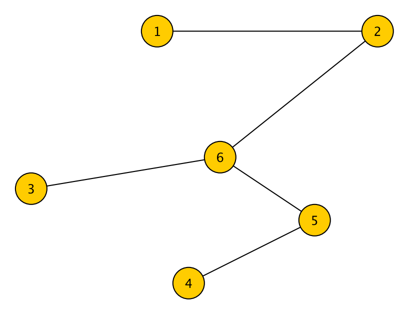
Ein gerichteter Graph G ist ein Wald bzw. ein Baum gdw. der G zugeordnete ungerichtete Graph G' (siehe Graphentheorie, Definition 1.16) ein Wald bzw. ein Baum ist.

Beispiel 1.18

gerichteter Graph G:



Der zugeordnete ungerichtete Graph G' ist ein Baum:

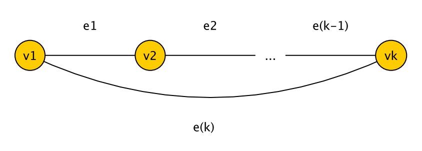


Lemma 1.19

Ein gerichteter Graph G ist genau dann ein Wald, wenn die Spalten der Inzidenzmatrix von G linear unabhängig sind.

Beweis.

Wir zeigen: G enthält einen Kreis gdw. die Spalten der Inzidenzmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}$ linear abhängig sind.

"$\Rightarrow$": Es sei $C =$ 

ein Kreis in G' und $j_1, \ldots, j_k$ seien die zugehörigen Spaltenindizes der Inzidenzmatrix.

Für $l = 1, \ldots, k$ setzen wir:

$$\alpha_l = \begin{cases} 1 & e_l \text{ hat in } G \text{ die Richtung } v_{l-1} \to v_l \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fortsetzung Beweis.

Damit gilt

$$\alpha_1 \mathbf{a}^{j_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}^{j_k} = \mathbf{0}$$

die Spaltenvektoren sind also linear abhängig.

"$\Leftarrow$": Die Spalten von $\mathbf{A}$ seien linear abhängig. Dann existieren Spaltenindizes $j_1, \ldots, j_k$ und Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0$ mit

$$\alpha_1 \mathbf{a}^{j_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}^{j_k} = \mathbf{0}$$

Es sei E'' die Menge der Kanten zu den Spaltenindizes $j_1, \ldots, j_k$ und V'' sei die Menge der mit den Kanten aus E'' inzidenten Knoten.

Wir betrachten jetzt den Graphen $G'' = (V'', E'')$. Weil alle $\alpha_j \neq 0$ muss es für jede Zeile i, in der nicht nur 0en auftreten, mindestens zwei Spalten geben, deren Linearkombination in der i-ten Zeile $= 0$ ist.

Damit hat jeder Knoten in G'' mindestens den Grad 2 und G'' kann damit nicht kreisfrei sein.

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (3)

Satz 1.20

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *die Inzidenzmatriz eines gerichteten Graphen* G.

Dann ist $\mathbf{A}$ *total unimodular.*

Beweis.

Vollständige Induktion über die Größe k einer quadratischen Untermatrix.

$k = 1$: Die Untermatrizen der Größe $k = 1$ sind die Matrixelemente selbst. Per Definition der Inzidenzmatrix sind sie gleich $0, 1$ oder -1.

Fortsetzung Beweis.

$k-1 \to k$: Es sei $\mathbf{A}'$ eine quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$.
Fall 1: $\mathbf{A}'$ hat in jeder Spalte zwei Elemente $\neq 0$.

Dann definieren die Zeilen und Spalten von $\mathbf{A}'$ (als Inzidenzmatrix betrachtet) einen gerichteten Graphen G' mit k Knoten und k Kanten.

Damit kann G' nicht kreisfrei sein. Nach Lemma 1.19 sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}'$ linear abhängig. Also folgt $\det(\mathbf{A}') = 0$.

Fall 2: $\mathbf{A}'$ enthält eine Spalte j mit höchstens einem Element $a'_{ij} \neq 0$. Zur Berechnung von $\det(\mathbf{A}')$ entwickeln wir nach Spalte j. Es folgt

$$\det(\mathbf{A}') = (-1)^{i+j} \cdot a'_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}'_{ij})$$

Nach I.V. gilt $\det(\mathbf{A}'_{ij}) = 0, 1$ oder -1. Also gilt auch

$$\det(\mathbf{A}') = 0, 1 \text{ oder } -1.$$

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (4)

Satz 1.21

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *die Inzidenzmatrix eines (ungerichteten) bipartiten Graphen* G.

Dann ist $\mathbf{A}$ *total unimodular.*

Beweis.

Übungsaufgabe ✎

Cramersche Regel

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir die sogenannte Cramersche-Regel.

Lemma 1.22

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine quadratische Matrix mit* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. *Für das LGS* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *sei*

$$\mathbf{A}_j := (\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^{j+1}, \ldots, \mathbf{a}^n),$$

also die Matrix, die entsteht, wenn in $\mathbf{A}$ *die* j*-te Spalte durch den Vektor* $\mathbf{b}$ *ersetzt wird.*

Dann gilt für die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ *des Gleichungssystems* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}.$$

Beispiel 1.23

Wir betrachten das LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= 6 + 0 - 12 + 6 + 6 - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 6 + 2 + 2 - 0 = 0$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 9 - 3 - 6 + 9 + 3 - 6 = 6$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -6 + 0 - 12 + 6 + 18 - 0 = 6$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_2 = \frac{6}{6} = 1, \quad x_3 = \frac{6}{6} = 1$$

Totale Unimodularität und ganzzahlige Ecken

Satz 1.24

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *eine total unimodulare Matrix und* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ *sei ein ganzzahliger Vektor.*
Dann hat die Menge

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nur ganzzahlige Ecken.

Beweis.

O.B.d.A. gelte $r(\mathbf{A}) = m$.

- $\mathbf{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$ ist zulässige Basislösung (siehe Satz **??**)

Fortsetzung Beweis.

- $\mathbf{x}$ ist zulässige Basislösung $\Leftrightarrow \exists j_1, \ldots, j_m$ mit:
  - die Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}$ sind linear unabhängig,
  - die Komponenten $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ von $\mathbf{x}$ sind für $\mathbf{A}' = (\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m})$ (eindeutige) Lösung des LGS

$$\mathbf{A}' \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

  - $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Nach der Cramer-Regel gilt

$$x_{j_k} = \frac{\det(\mathbf{A}'_{j_k})}{\det(\mathbf{A}')}$$

Fortsetzung Beweis.

Weil $\mathbf{A}$ total unimodular ist und die Spaltenvektoren linear unabhängig sind, folgt $\det(\mathbf{A}') = 1$ oder -1.

Weil $\mathbf{b}$ ganzzahlig ist, ist auch $\det(\mathbf{A}'_{j_k})$ ganzzahlig.

Damit sind die x_{j_k} ganzzahlig.