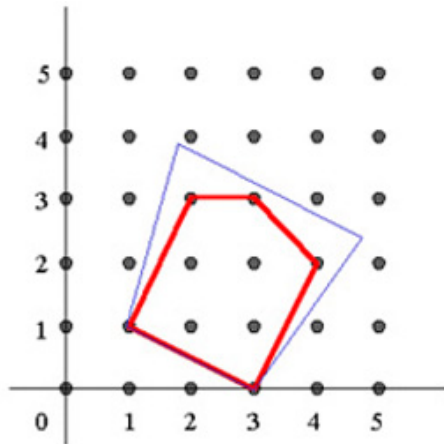


Kapitel 1

Unimodularität



Inhalt

1 Unimodularität

- Wiederholung: Transport- und Zuordnungsprobleme
- Total unimodulare Matrizen
- Inzidenzmatrix
- Optimierungsprobleme auf Graphen

Transportproblem

Definition 1.1

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$

unter den Nebenbedingungen

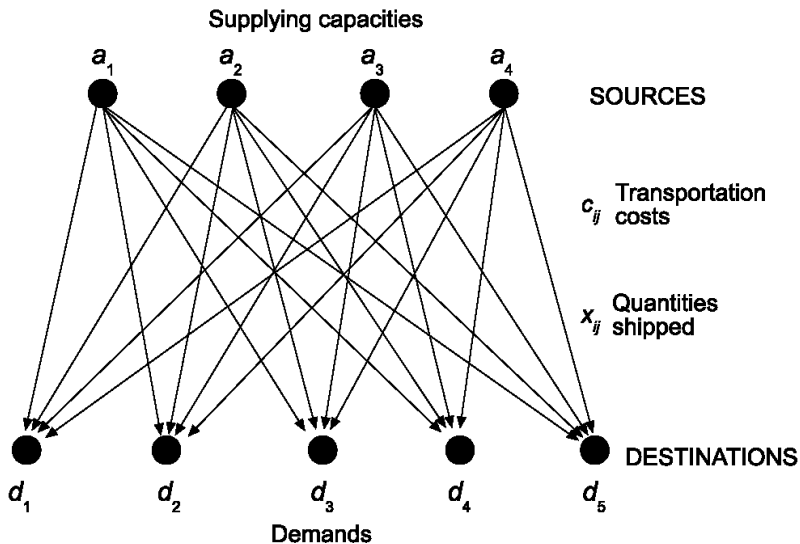
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n$$

heißt **Transportproblem**.



Bemerkungen zum Transportproblem

Wir setzen ein **geschlossenes Transportproblem** voraus: $a_i > 0$, $b_j > 0$ und $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, also **Gesamtangebot = Gesamtnachfrage**.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir ein **zusätzliches Warenhaus** mit $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ und $c_{i,n+1} = 0$ ein.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir eine **zusätzliche Produktionsstätte** mit $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ein.

Die $c_{m+1,j}$ modellieren dann die **Kosten pro ME für das mangelnde Angebot in Warenhaus j** .

Anzahl Variablen: $m \cdot n$

Beispielproblem

Beispiel 1.2

Wir gehen von folgenden Kosten, Angebot und Nachfrage aus:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	1	3	50
A_2	4	5	8	70
	40	40	40	

Fortsetzung Beispiel.

Damit lautet das zugehörige Transportproblem

$$\min 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcccccccl} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & = & 50 \\ & & & & & + & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 70 \\ x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 40 \\ & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 40 \\ & & & & x_{13} & & & & + & x_{23} & & = & 40 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.$$

Lösbarkeit des Transportproblems

Satz 1.3

Zu jedem Transportproblem existiert eine optimale Lösung.

Beweis.

Es sei

$$G = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

und

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{G}$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{G} = \frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{G} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

Fortsetzung Beweis.

und

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{G} = \frac{b_j \sum_{i=1}^m a_i}{G} = b_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Damit existiert eine **zulässige Lösung**.

Wegen $0 \leq x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$ ist der **Zulässigkeitsbereich** $\mathcal{X}$ darüberhinaus **beschränkt**.

Also existiert nach Satz 3.25 OR I bzw. Satz 3.37 OR I eine optimale Lösung.

Transportproblem in Matrixdarstellung

$$\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \dots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m \cdot n}$$

genauer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq m \wedge (i-1) \cdot n < j \leq i \cdot n \\ 1 & \text{falls } m < i \leq m+n \wedge j = k \cdot n + (i-m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Begrenzungsvektor:

$$\mathbf{b} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

Damit hat das **Transportproblem in Normalform** die Darstellung

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Rang der Koeffizientenmatrix

Satz 1.4

Die Matrix $\mathbf{A}$ des Transportproblems hat den Rang $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$.

Beweis.

Die Summe der Zeilen 1 bis m ist gleich der Summe der Zeilen $m + 1$ bis $m + n$. Also sind die $m + n$ Zeilenvektoren linear abhängig und es folgt $r(\mathbf{A}) \leq m + n - 1$.

Andererseits sind die $m + n - 1$ Spaltenvektoren mit den Indizes

$$1, 2, \dots, n, n + 1, 2n + 1, \dots, (m - 1)n + 1$$

linear unabhängig, also $r(\mathbf{A}) \geq m + n - 1$.

Insgesamt folgt $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$. □

Zuordnungsproblem

Definition 1.5

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

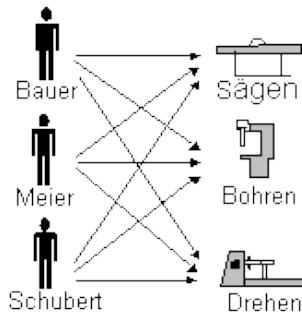
und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \text{ und } j = 1, \dots, n$$

heißt **Zuordnungsproblem**.

Bemerkungen:

- Man beachte: Keine Stetigkeit für die Entscheidungsvariablen x_{ij}
- Ein Optimierungsproblem, bei dem die Entscheidungsvariablen nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen, heißt **kombinatorisches Optimierungsproblem**.



Zuordnungsproblem als Transportproblem

- Das Zuordnungsproblem kann als **Spezialfall des Transportproblems** betrachtet und mit dem Simplexalgorithmus optimal gelöst werden.
- Setze hierzu im Transportproblem $m = n$, sowie $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ und $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Damit sind die Nebenbedingungen des Zuordnungsproblems modelliert.
- Die **Zielfunktion** ist dann für beide Probleme **identisch**.
- Wegen $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$ folgt aus dem Begrenzungsvektor $x_{ij} \leq 1$. Damit ist $0 \leq x_{ij} \leq 1$ **keine zusätzliche Einschränkung** gegenüber dem Transportproblem.
- Wir werden im Folgenden zeigen: Falls a_i und b_j ganzzahlig sind, **liefert der Simplexalgorithmus** für das Transportproblem **nur ganzzahlige Lösungen**.
- Damit gilt für eine so ermittelte optimale Lösung **stets $x_{ij} \in \{0, 1\}$, sie ist also zulässig für das Zuordnungsproblem**.
- Größe einer zulässigen Basislösung: $2n - 1$