Duales Problem

Lemma 1.4. *Das zum Transportproblem duale Problem lautet:*

$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

und

$$u_i, v_j \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

Anwendung der Dualitätssätze

Es sei $F(\mathbf{x})$ die Zielfunktion des primalen und $D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ des dualen Transportproblems.

- Sind $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ optimal, dann gilt

$$F(\mathbf{x}) = D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

  siehe Satz 5.4, OR I

- $\mathbf{x} = (x_{ij})$ sowie $\mathbf{u} = (u_i)$ und $\mathbf{v} = (v_j)$ sind genau dann optimal, wenn gilt

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

  siehe Satz 5.5, OR I

Effizienterer Solver durch Ausnutzung der Dualität

Gegeben sei eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$:

- Finde Belegung der Variablen u_i und v_j, so dass gilt:

$$x_{ij} \text{ ist BV } \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

- Wenn außerdem $u_i + v_j \leq c_{ij}$ für alle NBV gilt, dann ist die Basislösung optimal.

- Ansonsten wähle NBV x_{ij} mit dem kleinsten (negativen) Wert für

$$B_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

und tausche sie gegen eine BV aus.

Wie werden die u_i und v_j bestimmt?

- Ausgehend von einer Basislösung $\mathbf{x}$ stellt man das LGS

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$

  auf.

- Anzahl der Variablen: $n + m$

  Anzahl der Gleichungen: $n + m - 1$

- Setze eine Variable auf 0, z.B. $u_1 = 0$.

  Löse die restlichen Gleichungen sukzessive.

- Die Basislösung bildet einen Baum. Das LGS kann also entlang der Kanten des Baumes gelöst werden.

Beispiel 1.8. Wir bestimmen u_i und v_j für die Basis von Beispiel 1.2. Das LGS lautet:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_2 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Wir setzen $u_1 = 0$. Damit folgt:

$$v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = 4, v_3 = 4$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} B_{13} &= 3 - 0 - 4 = -1 \\ B_{21} &= 4 - 4 - 9 = -9 \end{aligned}$$

Dies sind genau die Schattenpreise aus den Beispielen 1.4, 1.6 und 1.7.

Die u-v-Methode

Algorithmus 1.4.

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.

2. Setze $u_1 = 0$ und löse damit das LGS

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$

3. Berechne für alle NBV x_{ij}: $B_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j$

4. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP!

   Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

5. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist die BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.

6. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**
   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**
   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$

7. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.

   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel für die u-v-Methode

Beispiel 1.9. Wir setzen einfach Beispiel 1.8 fort.

$i = 2, j = 1$
$W = (A_2, B_2, A_1, B_1)$ $x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$

$x_{22} = 0$
$x_{11} = 10$
$x_{12} = 40$ $z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

BVs: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}$ LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung:

$$u_1 = 0, v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = -5, v_3 = 13$$

Schattenpreise:
$B_{13} = 3 - 0 - 13 = -10$
$B_{22} = 5 - (-5) - 1 = 9$

$i = 1, j = 3$
$W = (A_1, B_1, A_2, B_3)$
$x_{13} = \Delta = min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$

$x_{11} = 0$
$x_{23} = 30$
$x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$

BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung:

$$u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 5, v_1 = -1$$

Schattenpreise:
$B_{11} = 9 - 0 - (-1) = 10$
$B_{22} = 5 - 5 - 1 = -1$

$i = 2, j = 2$
$W = (A_2, B_3, A_1, B_2)$
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$

$x_{23} = 0$
$x_{12} = 10$
$x_{13} = 40$
$z = 470 - 30 \cdot 1 = 440$

BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_2 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung:

$$u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 4, v_1 = 0$$

Schattenpreise:

$B_{11} = 9 - 0 - 0 = 9$

$B_{23} = 8 - 4 - 3 = 1$

Damit ist die aktuelle Basislösung optimal!

Zuordnungsproblem

siehe Beispiel 1.5 aus OR I

Definition 1.2. Das Optimierungsproblem

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

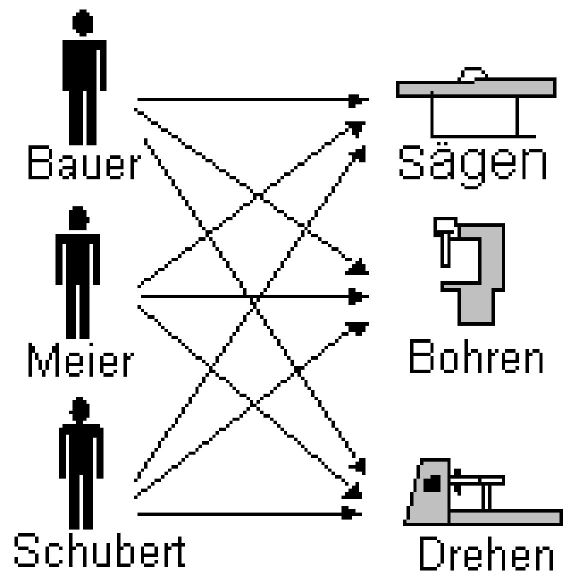
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \in \{0,1\} \text{ für } i = 1,\ldots,n \text{ und } j = 1,\ldots,n$$

heißt *Zuordnungsproblem*.



Zuordnungsproblem als Transportproblem

Bemerkung:

- Das Zuordnungsproblem kann als Spezialfall des Transportproblems betrachtet und
- mit Algorithmus 1.3 bzw. Algorithmus 1.4 gelöst werden.

Begründung:

- Setze im Transportproblem $m = n$, sowie $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Damit sind die Nebenbedingungen des Zuordnungsproblems modelliert.

- Die Zielfunktion ist dann identisch zu der des Transportproblems.
- Wegen $x_{ij} \leq \max\{a_i, b_j\}$ folgt aus dem Begrenzungsvektor $x_{ij} \leq 1$. Damit ist $0 \leq x_{ij} \leq 1$ keine zusätzliche Einschränkung gegenüber dem Transportproblem.
- Falls a_i und b_j ganzzahlig sind, liefern die Algorithmen 1.3 und 1.4 nur ganzzahlige Lösungen.
- Damit gilt für eine mit diesen Algorithmen ermittelte optimale Lösung stets $x_{ij} \in \{0, 1\}$, sie ist also zulässig für das Zuordnungsproblem.
- Größe einer zulässigen Basislösung: $2n - 1$

Beispielproblem

Beispiel 1.10. Wir betrachten im Folgenden ein Zuordnungsproblem mit $m = n = 3$ und Kosten (als Matrix dargestellt)

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Eröffnungsverfahren

Wegen $a_i = b_j = 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und alle Transportprobleme, ist eine zulässige Basislösung gemäß der Nordwesteckenregel eindeutig bestimmt:

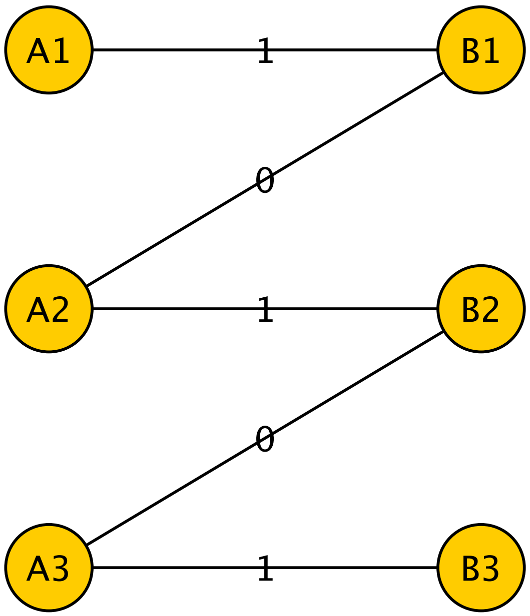
- $x_{i,i} = 1$ ist BV für $1 \leq i \leq n$,
- $x_{i+1,i} = 0$ ist BV für $1 \leq i \leq n-1$ und
- alle sonstigen Variablen sind NBV.

Bemerkung:

- Wegen $x_{i+1,i} = 0$ tritt Entartung auf.

Beispiel 1.11.

Für Beispiel 1.10:



Basis:

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1$$

$$x_{21} = x_{32} = 0$$

Zielfunktionswert:

$$z = 13$$

Ungarische Methode

- Die sogenannte *Ungarische Methode* ist die Spezialisierung der u-v-Methode auf Zuordnungsprobleme.
- Hier keine spezielle angepasste Darstellung, stattdessen ein Beispiel.

Beispiel: Ungarische Methode

Beispiel 1.12. Wir wollen das Zuordnungsproblem mit Kosten aus Beispiel 1.10 lösen.

Wir beginnen mit der Basis aus Beispiel 1.11.

BVs: $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}$

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 5 \\ u_2 + v_1 &= 3 \\ u_2 + v_2 &= 4 \\ u_3 + v_2 &= 6 \\ u_3 + v_3 &= 4 \end{aligned}$$

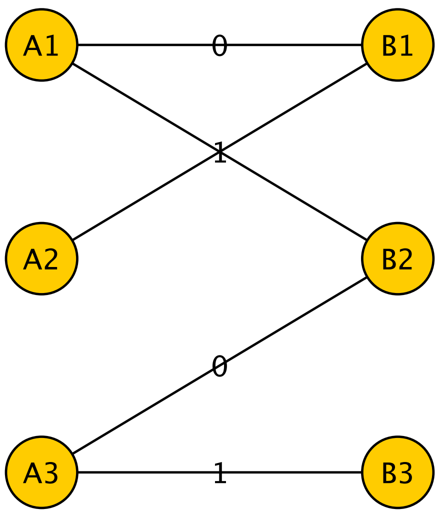
Wir setzen $u_1 = 0.$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} & v_1 = 5, u_2 = -2 \\ & v_2 = 6, u_3 = 0 \\ & v_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= 1-0-6 &= -5 \\ B_{13} &= 2-0-0 &= 2 \\ B_{23} &= 7-(-2)-0 &= 9 \\ B_{31} &= 8-0-5 &= 3 \end{aligned}$$

$i = 1, j = 2$
$W = (A_1, B_1, A_2, B_2)$
$x_{12} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{22}\} = 1$
$x_{11} = 0, x_{22} = 0, x_{21} = 1$
$z = 13 - 5 = 8$
x_{22} wird NBV.

Neue Basis:



$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 5 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 3 \\ u_3 + v_2 &= 6 \\ u_3 + v_3 &= 4 \end{aligned}$$

Wir setzen $u_1 = 0.$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = 5, v_2 = 1 \\ u_2 = -2, u_3 = 5 \\ v_3 = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcr} B_{13} & = & 2 - 0 - (-1) & = & 3 \\ B_{22} & = & 4 - (-2) - 1 & = & 5 \\ B_{23} & = & 7 - (-2) - (-1) & = & 10 \\ B_{31} & = & 8 - 5 - 5 & = & -2 \end{array}$$

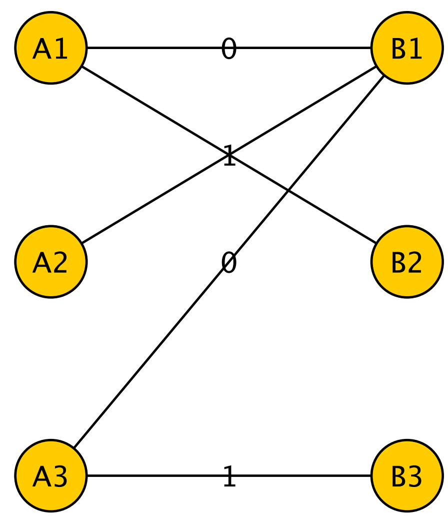
$i = 3, j = 1$

$W = (A_3, B_2, A_1, B_1)$

$x_{31} = \Delta = \min\{x_{32}, x_{11}\} = 0$

Keine Änderung an x_{ij} und z.

x_{32} wird NBV.



$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 5 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 3 \\ u_3 + v_1 &= 8 \\ u_3 + v_3 &= 4 \end{aligned}$$

Wir setzen $u_1 = 0.$

$$\Rightarrow \quad v_1 = 5, v_2 = 1$$
$$u_2 = -2, u_3 = 3$$
$$v_3 = 1$$

$$\begin{aligned} B_{13} &= 2 - 0 - 1 &&= 1 \\ B_{22} &= 4 - (-2) - 1 &&= 5 \\ B_{23} &= 7 - (-2) - 1 &&= 8 \\ B_{32} &= 6 - 3 - 1 &&= 2 \end{aligned}$$

Optimal!

Zusammenfassung

- Startecke für Transportproblem: Nordwesteckenregel und Minimale-Kosten-Regel
- Simplexvariante für Transportproblem: Stepping-Stone-Methode
- Effizienterer Algorithmus durch Einbeziehung der Dualität: u-v-Methode
- Spezialfall: Zuordnungsproblem