Zugeordneter bipartiter Graph

Für ein Transportproblem sei $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ die Menge der Fabriken und $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ sei die Menge der Warenhäuser.

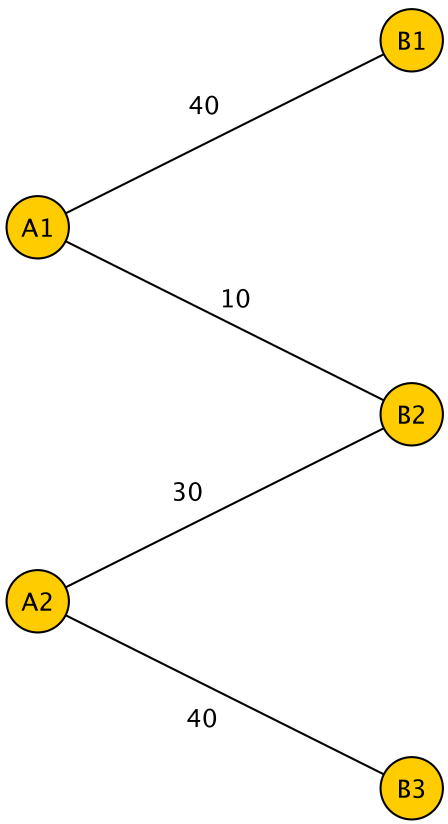
Wir ordnen nun einem Transportproblem einen bipartiten Graph $G = (V, E)$ zu mit:

- $V = A + B$ und
- $E = \{\{v, w\} | v \in A, w \in B\}$.

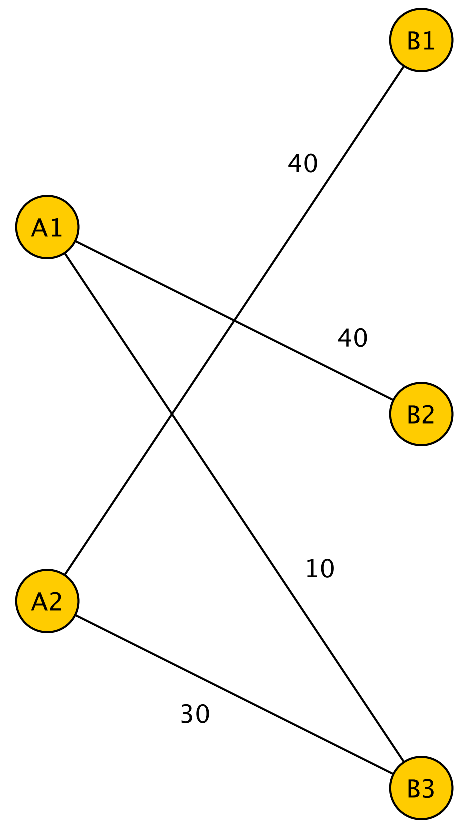
Damit können wir auch jeder Variablen x_{ij} die Kante $\{A_i, B_j\} \in E$ zuordnen.

Struktur zulässiger Basislösungen

Basislösung von Beispiel 1.2:



Basislösung von Beispiel 1.3:



Satz 1.3. *Gegeben sei eine zulässige Basislösung für ein Transportproblem.*

Dann bilden die Kanten der Basisvariablen im zugeordneten bipartiten Graphen einen Baum.

Beweis: Angenommen, eine Teilmenge der Basisvariablen bildet im zugeordneten bipartiten Graphen einen Kreis der Länge $2k$. O.B.d.A. sei dies der Kreis $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, \dots, A_k, B_k, A_1)$ mit den Basisvariablen $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, \dots, x_{kk}, x_{1k}$.

Wir bilden nun eine Linearkombination der Spaltenvektoren dieser Basisvariablen von der Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt:

- Für eine Kante (A_i, B_i) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i,i)}$ den Koeffizienten 1,
- für eine Kante (B_i, A_{i+1}) und die Kante (B_k, A_1) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i+1,i)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(1,k)}$ den Koeffizienten -1.

Dann bildet diese Linearkombination den Vektor $\mathbf{0}$, die Spaltenvektoren sind also linear abhängig. Widerspruch zu Basislösung!
Tafel ✎.

Also müssen die Kanten der Basisvariablen einen kreisfreien Untergraphen bilden.

Da der bipartite Graph aber

- $m + n$ Knoten und
- eine Basislösung $n + m - 1$ Variablen (also Kanten)

hat, müssen die Variablen der Kanten einen Baum bilden (vgl. Graphentheorie, Satz 1.8 (5)).

Transport-Solver analog zu Simplex

Fragestellungen/Aufgaben:

- Bewertung der Nicht-Basisvariablen (NBV) x_{ij} mit Schattenpreisen B_{ij}
- Auswahl einer Nicht-Basisvariablen
- Auswahl einer Basisvariablen (BV), die zur Nicht-Basisvariablen wird
- Anpassung des Tableaus

Satz 1.3 bildet die Basis, um diese Fragestellungen zu lösen.

Schattenpreise im Transportproblem

Es sei x_{ij} eine NBV.

- Schattenpreis: Wie würden sich die Kosten ändern, wenn wir 1 ME von A_i nach B_j schicken würden?
- In der Basislösung gibt es gemäß Satz 1.3 genau einen Weg W von A_i nach B_j.
- Nehmen wir die Kante für x_{ij} hinzu, entsteht genau ein Kreis.
- Transportieren wir 1 ME von A_i nach B_j über die Kante von x_{ij}, müssen wir auf dem Weg W von A_i nach B_j die Transportmengen wie folgt anpassen:

– von A_k zu B_l: 1 ME weniger
– von B_l zu A_k: 1 ME mehr

- Damit können wir die Schattenpreise bestimmen:

$$B_{ij} = c_{ij} + \sum_{(B_l, A_k) \in W} c_{kl} - \sum_{(A_k, B_l) \in W} c_{kl}$$

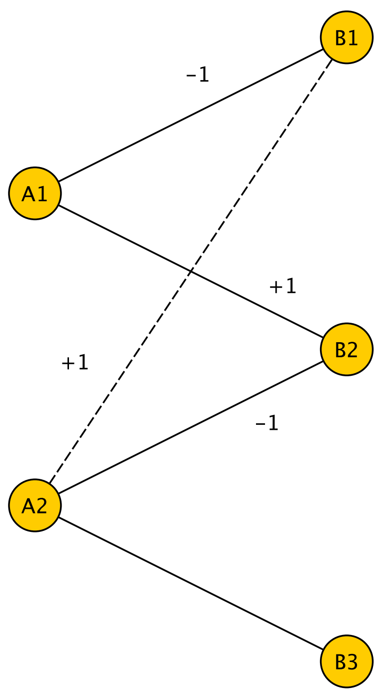
- Für $B_{ij} < 0$ lohnt es sich, die Variable x_{ij} in die Basis aufzunehmen.

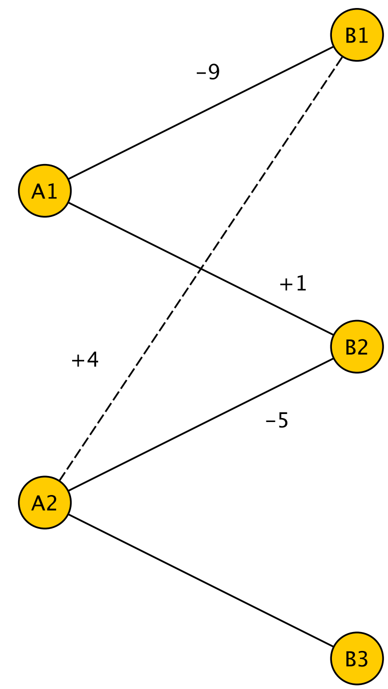
- Analog zum Simplexalgorithmus können wir die NBV mit kleinstem B_{ij} als neue BV wählen.

- Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV, dann ist die Lösung optimal.

Beispiel 1.4.

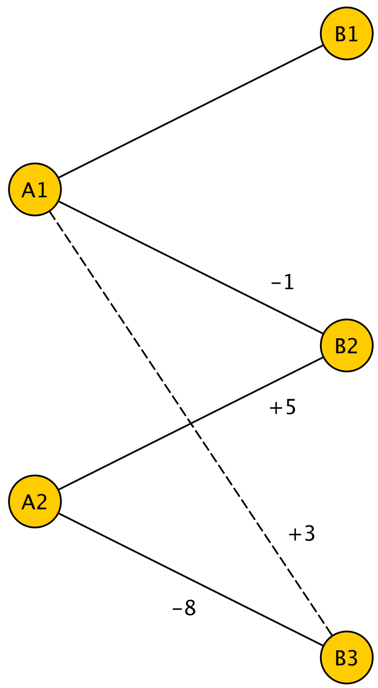
Mengenänderung für x_{21} in Basislösung von Beispiel 1.2:





Schattenpreis B_{21} für Variable x_{21}:

$$B_{21} = 4 + 1 - 9 - 5 = -9$$



Schattenpreis B_{13} für Variable x_{13}:

$$B_{13} = 3 + 5 - 1 - 8 = -1$$

- Auswahl von x_{21} als neue BV
- entspricht Pivotspalte in primalem Simplex
- bleibt:
  - Pivotzeile?
  - Anpassung?

Anpassung der Basislösung

- Auf einer Kante von A_k nach B_l können wir die Transportmenge um nicht mehr als x_{kl} reduzieren.

- Damit fehlt in Warenhaus B_l eine Kapazität von x_{kl}, die nun von Fabrik k' über die Kante von $x_{k'l}$ geliefert werden muss. usw.

- Für die ausgewählte NBV x_{ij} setzen wir:

$$x_{ij} = \Delta = \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$$

- Eine BV $x_{i'j'}$, für die das Minimum angenommen wird, wird zur NBV.

- Für alle Kanten $(A_k, B_l) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} - \Delta$$

- Für alle Kanten $(B_l, A_k) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} + \Delta$$

- Zielfunktionswert:

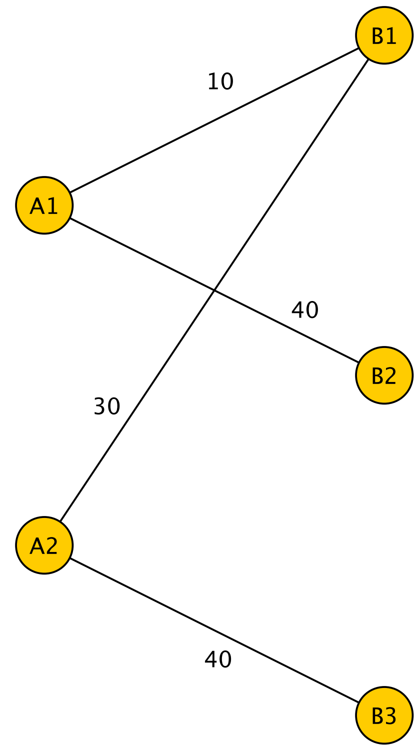
$$z = z + \Delta \cdot B_{ij}$$

Beispiel 1.5. Für die Basislösung von Beispiel 1.2 und die neue BV x_{21} ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{21} &= \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} \\ &= \min\{40, 30\} = 30 \\ x_{22} &= 30 - 30 = 0 \\ x_{12} &= 10 + 30 = 40 \\ x_{11} &= 40 - 30 = 10 \\ z &= 840 - 30 \cdot 9 = 570 \end{aligned}$$

x_{22} wird also NBV.

Die neue Basislösung:



Stepping-Stone-Methode

Algorithmus 1.3.

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.

2. Suche für alle NBV x_{ij} im zugeordneten bipartiten Graphen den Weg W_{ij} von A_i nach B_j und bestimme damit die Schattenpreise

$$B_{ij} := c_{ij} + \sum_{(B_l, A_k) \in W_{ij}} c_{kl} - \sum_{(A_k, B_l) \in W_{ij}} c_{kl}.$$

3. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP!

Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

4. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist eine BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.

5. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**

   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**

   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$

6. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.

   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel

Bemerkungen:

- Nach dem Eröffnungsverfahren setzen wir im Tableau wieder die Originalwerte für a_i und b_j ein.

- Dies dient nur der besseren Übersicht, denn die Werte werden im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt.

Beispiel 1.6. Gegeben seien Kosten, Angebot und Nachfrage wie in Beispiel 1.1.

Die Nordwesteckenregel und Beispiel 1.4 liefern:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 / 40	1 / 10	3 / -1	50
A_2	4 / -9	5 / 30	8 / 40	70
	40	40	40	840

Also $i = 2, j = 1$ mit $B_{21} = -9$.

W ist (A_2, B_2, A_1, B_1).
$x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$
$i' = 2, j' = 2$

$x_{22} = 0$
$x_{11} = 10$

$x_{12} = 40$
$z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

NBV sind jetzt: $\{x_{13}, x_{22}\}$

Weg von A_1 nach B_3: (A_1, B_1, A_2, B_2)
$B_{13} = 3 + 4 - 9 - 8 = -10$

Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_1, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 9 - 4 - 1 = 9$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 10	1 40	3 $\quad -10$	50
A_2	4 30	5 $\quad 9$	8 40	70
	40	40	40	570

Also $i = 1, j = 3$ mit $B_{13} = -10$.

W ist (A_1, B_1, A_2, B_3).
$x_{13} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$
$i' = 1, j' = 1$

$x_{11} = 0$
$x_{23} = 30$

$x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$

NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{22}\}$

Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_3, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 8 - 3 - 4 = 10$

Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_3, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 3 - 8 - 1 = -1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 40	3 10	50
A_2	4 40	5 -1	8 30	70
	40	40	40	470

Also $i = 2, j = 2$ mit $B_{22} = -1$.

W ist (A_2, B_3, A_1, B_2).
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$
$i' = 2, j' = 3$

$x_{23} = 0$
$x_{12} = 10$

$x_{13} = 40$
$z = 470 - 30 \cdot 1 = 440$

NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{23}\}$

Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_2, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 5 - 1 - 4 = 9$

Weg von A_2 nach B_3: (A_2, B_2, A_1, B_3)
$B_{23} = 8 + 1 - 5 - 3 = 1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 10	3 40	50
A_2	4 40	5 30	8 1	70
	40	40	40	440

Dies ist die optimale Lösung!

Vergleich zum Simplexalgorithmus

Beispiel 1.7. Wir stellen für die Basislösung von Beispiel 1.2 das Simplextableau auf.

Hierzu drücken wir die BVs $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$ durch die NBVs x_{13}, x_{21} aus.

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{21} = 40 \\ \Rightarrow \quad & x_{11} = 40 - x_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \\ \Rightarrow \quad & x_{12} = 50 - x_{11} - x_{13} \\ \Rightarrow \quad & x_{12} = 50 - (40 - x_{21}) - x_{13} \\ \Rightarrow \quad & x_{12} = 10 + x_{21} - x_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{13} + x_{23} = 40 \\ \Rightarrow \quad & x_{23} = 40 - x_{13} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\
\Rightarrow \quad & x_{22} = 70 - x_{23} - x_{21} \\
\Rightarrow \quad & x_{22} = 70 - (40 - x_{13}) - x_{21} \\
\Rightarrow \quad & x_{22} = 30 + x_{13} - x_{21}
\end{aligned}
$$

Wir setzen die Gleichungen in die Zielfunktion ein:

$$
\begin{aligned}
& 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8_{23} \\
= \quad & 9(40 - x_{21}) + (10 + x_{21} - x_{13}) + 3x_{13} + 4x_{21} \\
& \qquad +5(30 + x_{13} - x_{21}) + 8(40 - x_{13}) \\
= \quad & 360 - 9x_{21} + 10 + x_{21} - x_{13} + 3x_{13} + 4x_{21} \\
& \qquad +150 + 5x_{13} - 5x_{21} + 320 - 8x_{13} \\
= \quad & 840 - x_{13} - 9x_{21}
\end{aligned}
$$

Also lautet die Zielfunktion $z = \min 840 - x_{13} - 9x_{21}$

bzw. $-z = \max -840 + x_{13} + 9x_{21}$

Damit können wir das Startableau aufstellen:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
x_{11}	1	0	0	1	0	0	40
x_{12}	0	1	1	-1	0	0	10
x_{22}	0	0	-1	1	1	0	30
x_{23}	0	0	1	0	0	1	40
$-z$	0	0	-1	-9	0	0	-840

Man beachte: Die Schattenpreise in der Zielfunktionszeile sind identisch mit den Schattenpreisen aus den Beispielen 1.4 und 1.6.

Im weiteren Verlauf: Basislösungen, Zielfunktionswerte und Schattenpreise ebenfalls identisch zu Beispiel 1.6.

Übungsaufgabe ✎