

Branch-and-Cut

- Verwende **Branch-and-Bound als übergeordneten Algorithmus**.
- Nutze **LP-Relaxationen** zur Bestimmung oberer Schranken für die Teilprobleme P_i .
- Falls Lösung der LP-Relaxation nicht zu einer Auslotung führt:
 - ☞ Versuche durch **Schnittebenen** die obere Schranke zu verringern.
 - ☞ Im Idealfall führt dies zu einem ausgeloteten Teilproblem P_i .
- Branching erst dann, wenn weitere Schnittebenen “nichts mehr bringen”.

Gültige Ungleichungen

- Als Schnittebenen bei Branch-and-Cut verwendet man **gültige Ungleichungen**.
- Dies sind Ungleichungen, die jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{X}(P_i)$ erfüllen muss.
- Hierzu gehören natürlich die **Gomory-Cuts** aus Kapitel 5.
- Statt allgemeiner Gomory-Cuts werden meist Ungleichungen verwendet, die **speziell für eine Problemklasse sind**.
- **Seperationsproblem**: Welche gültigen Ungleichungen werden von einer optimalen Lösung einer LP-Relaxation verletzt?

TSP als lineares Programm: Variablen und Zielfunktion

Vollständiger Graph (V, E) mit Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

c_{ij} sei die Länge der Kante $\{v_i, v_j\}$.

Wegen Symmetrie gelte stets $i < j$.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Kante } \{v_i, v_j\} \text{ ist in Tour enthalten} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zielfunktion:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Gültige Ungleichungen für das TSP (1)

In einer TSP-Tour ist jeder Knoten inzident mit genau zwei Kanten.

Für $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = 2$$

Grad-Gleichungen



Gültige Ungleichungen für das TSP (2)

Jede Kante ist an einer TSP-Tour mit einem Gewicht von höchstens 1 beteiligt.

Für $1 \leq i < j \leq n$:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

Variablenbeschränkungen



Gültige Ungleichungen für das TSP (3)

Für jede echte Teilmenge $S \subsetneq V$ ist der induzierte Untergraph $T(S)$ einer TSP-Tour T kreisfrei, enthält also höchstens $|S| - 1$ Kanten.

Für $3 \leq |S| \leq n - 1$:

$$\sum_{v_i, v_j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1$$

Subtour Elimination Constraints



Schnittebenenverfahren für das TSP

Problem: Schon die Anzahl der Subtour Elimination Constraints wächst exponentiell in n .

Ansatz:

- Beginne nur mit den **Grad-Gleichungen als LP-Relaxation**.
- Falls die Lösung der LP-Relaxation eine der **gültigen Ungleichungen verletzt**, nehme diese zur Relaxation **hinzu**.

Mit diesem Ansatz lösen wir nun einige TSP-Probleme.

Beispiele für TSP mit Schnittebenen

Beispiel 3.16

TSP von Folie 131.

LP: Grad-Ungleichungen für alle Knoten

$$z = 189$$

Verletzte Ungleichungen:

- Variablenbeschränkungen für: AaDü, BeHa, MüNü
- Subtour für: Ba – Fr – St



Fortsetzung Beispiel.

Nehme Ungleichung für
Variablenbeschränkungen hinzu.

$$z = 250$$

- ☞ Optimale Lösung der
LP-Relaxation ist (die bekannte)
zulässige TSP-Tour!
- ☞ Branching war nicht erforderlich!



Beispiel 3.17

Beispiel mit $n = 17$ aus TSPLIB (gr17).

☞ Tafel.

LP-Relaxationen siehe Homepage.

Wiederum ist kein Branching notwendig.