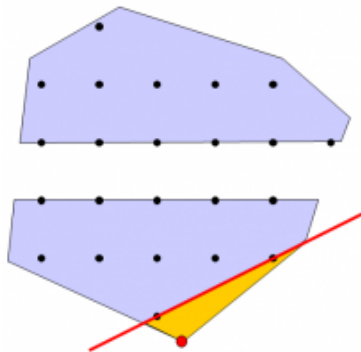


# Kapitel 3

## Branch-and-Bound und Varianten



# Inhalt

## 3 Branch-and-Bound und Varianten

- Branch-and-Bound
- Anwendungsbeispiele
- Branch-and-Cut

# Schranken (1)

## Definition 3.1

Gegeben sei ein Maximierungsproblem der Art

$$\max F(\mathbf{x}), \quad \text{u.d.N. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

Gilt

$$F(\mathbf{x}) \leq B_{up} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

dann ist  $B_{up}$  eine **obere Schranke** für den optimalen Zielfunktionswert.

Gilt

$$F(\mathbf{x}) \geq B_{low} \text{ für ein } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

dann ist  $B_{low}$  eine **untere Schranke** für den optimalen Zielfunktionswert.

# Schranken (2)

## Definition 3.2

Gegeben sein ein Minimierungsproblem der Art

$$\min F(\mathbf{x}), \quad \text{u.d.N. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

Gilt

$$F(\mathbf{x}) \geq B_{low} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

dann ist  $B_{low}$  eine **untere Schranke** für den optimalen Zielfunktionswert.

Gilt

$$F(\mathbf{x}) \leq B_{up} \text{ für ein } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

dann ist  $B_{up}$  eine **obere Schranke** für den optimalen Zielfunktionswert.

# Herleitung von Schranken

Für Maximierungsprobleme:

- obere Schranken

typischerweise durch Relaxationen, z.B. LP-Relaxation bei einem ILP

- untere Schranken

durch zulässige i.d.R. aber nicht optimale Lösungen, z.B. auf der Basis von Heuristiken

Für Minimierungsprobleme: genau umgekehrt

Wenn nicht anders erwähnt betrachten wir im Folgenden stets  
Maximierungsprobleme.

# Grundprinzip von Branch-and-Bound

Suchverfahren, das die Menge  $\mathcal{X}$  der zulässigen Lösungen systematisch durchsucht.

Wesentliche Operationen bei der Suche:

- Verzweigung (Branch)

Teile das Ausgangsproblem  $P_0$  (bzw. die Menge  $\mathcal{X}(P_0)$  der zulässigen Lösungen) in zwei Teilprobleme  $P_1$  und  $P_2$  (bzw. Teilmengen  $\mathcal{X}(P_1)$  und  $\mathcal{X}(P_2)$ ) auf.

- Beschränkung (Bound)

Berechne für die Teilprobleme  $P_1$  und  $P_2$  obere Schranken (upper bound)  $B_{up}^1$  und  $B_{up}^2$  für die optimale Lösung in  $\mathcal{X}(P_1)$  und in  $\mathcal{X}(P_2)$ .

# Nutzung von Schranken für die Suche (1)

Es sei  $B_{low}$  eine bekannte untere Schranke für  $\mathcal{X}(P_0)$ , z.B. der Zielfunktionswert einer bekannten zulässigen Lösung  $\mathbf{x}$ .

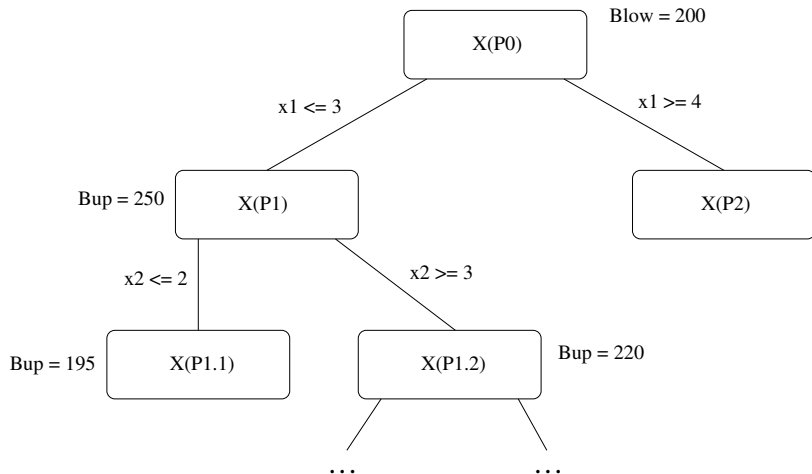
Dann gilt:

- Aus  $B_{up}^1 \leq B_{low}$  folgt, dass  $\mathcal{X}(P_1)$  keine bessere Lösung als  $\mathbf{x}$  enthalten kann.
  - Analog für  $B_{up}^2 \leq B_{low}$
- ☞ Im Fall von  $B_{up}^1 \leq B_{low}$  bzw.  $B_{up}^2 \leq B_{low}$  müssen wir in  $\mathcal{X}(P_1)$  bzw.  $\mathcal{X}(P_2)$  nicht mehr nach einer optimalen Lösung suchen.

# Nutzung von Schranken für die Suche (2)

- Es sei  $B_{up}$  eine bekannte obere Schranke für  $\mathcal{X}$ .
- Findet man ein  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  mit  $F(\mathbf{x}) = B_{up}$ , dann ist  $\mathbf{x}$  eine optimale Lösung.

# Branch-and-Bound: Prinzipieller Ablauf für ein ILP



# Beispiele: Branch-and-Bound für ILP

## Beispiel 3.3

Wir wollen das ILP von Beispiel 2.2 lösen. Es sei dies das Problem  $P_0$ .

Die LP-Relaxation hat die optimale Lösung  $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$  mit Zielfunktionswert  $\frac{29}{4}$ . Dies liefert uns eine allgemeine obere Schranke  $B_{up} = \lfloor \frac{29}{4} \rfloor = 7$ .

Wir unterteilen das Problem  $P_0$  in zwei disjunkte Teilprobleme:

- Für  $P_1$  gelte die zusätzliche Bedingung  $x_1 \geq 3$ .
- Für  $P_2$  gelte die zusätzliche Bedingung  $x_1 \leq 2$ .

Für die LP-Relaxation von  $P_1$  erhalten wir die optimale Lösung  $\mathbf{x}^1 = (3, 2)$  mit Zielfunktionswert 7.

- Damit haben wir eine zulässige Lösung gefunden, deren Zielfunktionswert mit  $B_{up} = 7$  übereinstimmt.
- Somit ist  $\mathbf{x}^1$  eine optimale Lösung für  $P_0$ .

## Fortsetzung Beispiel.

Wir brauchen  $P_2$  nicht mehr zu lösen. Wenn wir trotzdem die zugehörige LP-Relaxation lösen,

- können wir  $B_{low} = 7$  setzen, da  $\mathbf{x}^1$  eine zulässige Lösung ist und
- wir erhalten  $\mathbf{x}^2 = (2, \frac{5}{2})$  mit Zielfunktionswert  $B_{up}^2 = 7 \leq B_{low}$  als optimale Lösung für die LP-Relaxation von  $P_2$ .
- Hieraus folgt, dass in  $\mathcal{X}(P_2)$  keine bessere Lösung als  $\mathbf{x}^1$  enthalten sein kann.

## Beispiel 3.4

Wir betrachten das ILP

$$\max x_1 + x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$

$$4x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Tafel 

### Beispiel 3.5 (Winston, Kapitel 9.3)

Die Telfa Corporation produziert Tische und Stühle.

Für die Produktion eines Tisches werden eine Arbeitsstunde und 9 Quadratmeter Holz benötigt, ein Stuhl erfordert eine Arbeitsstunde und 5 Quadratmeter Holz. Es stehen 6 Arbeitsstunden und 45 Quadratmeter Holz zur Verfügung.

Der Gewinn für einen Tisch beträgt 8 €, für einen Stuhl 5 €.

Tafel 

### Beispiel 3.6 (Nickel et al., Kapitel 5.4.1)

Gegeben sei das ILP

$$\max 5x_1 + 2x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

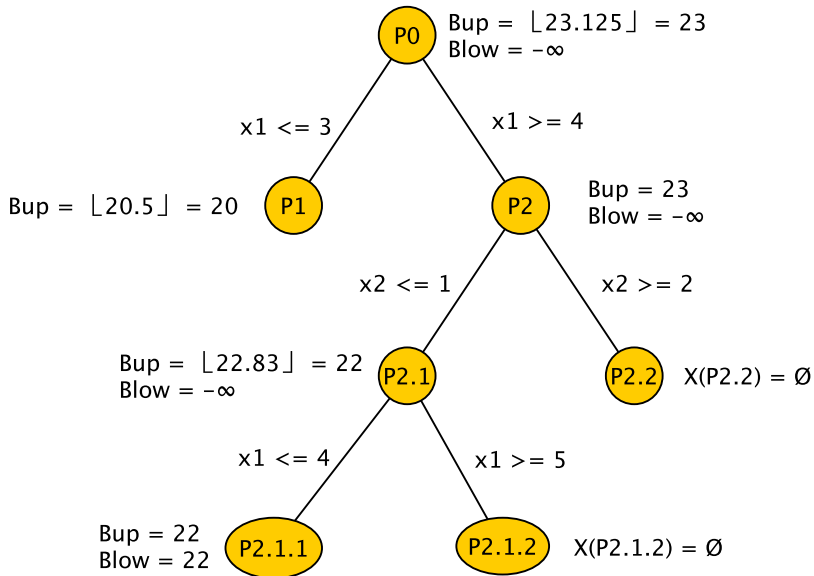
$$6x_1 + 2x_2 \leq 27$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 23$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Tafel: Mit Selektionsstrategie "Maximum Upper Bound" 



# Was brauchen wir für Branch-and-Bound?

- **Verzweigungsregel:** Wie teilen wir die Menge der zulässigen Lösungen auf?
- **Obere Schranke:** Effizientes Verfahren zur Berechnung einer oberen Schranke für ein Teilproblem, z.B. eine geeignete LP-Relaxation.
- **Optionale untere Schranke:** Eine Heuristik zur Ermittlung einer guten zulässigen Lösung für ein Teilproblem (üblicherweise auf Basis der optimalen Lösung des relaxierten Problems).
- **Selektionsstrategie:** In welcher Reihenfolge werden Teilprobleme abgearbeitet? Tiefensuche? Breitensuche? Gesteuert durch die oberen Schranken?

# Verzweigung (Branch)

- Ein Problem  $P_0$  wird in  $k$  Teilprobleme  $P_1, \dots, P_k$  unterteilt, so dass für die Mengen  $\mathcal{X}(P_i)$  der zulässigen Lösungen gilt:

$$\mathcal{X}(P_0) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{X}(P_i)$$

und

$$\mathcal{X}(P_i) \cap \mathcal{X}(P_j) = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

- Die Probleme  $P_1, \dots, P_k$  werden falls notwendig weiter unterteilt. Dadurch entsteht ein Baum von Problemen mit  $P_0$  als Wurzel.

# Übliche Verzweigungsstrategien

Es sei  $\mathbf{x}$  die optimale Lösung der LP-Relaxation von  $P_0$  und die Komponente  $x_i = \alpha$  sei nicht ganzzahlig.

- ILP:

- ▶  $P_1$  erhält die zusätzliche Nebenbedingung  $x_i \leq \lfloor \alpha \rfloor$
- ▶  $P_2$  erhält die zusätzliche Nebenbedingung  $x_i \geq \lceil \alpha \rceil$

- kombinatorische Probleme:

Setze  $x_i = 0$  für  $P_1$  bzw.  $x_i = 1$  für  $P_2$ .

Welches  $x_i$  auswählen? Z.B. das am wenigsten bestimmte.

# Obere Schranken

- Für jedes Teilproblem  $P_i$  bestimmen wir eine **obere Schranke (upper bound)**  $B_{up}^i$ .
- Hierfür lösen wir eine **Relaxation**  $P_i^{relax}$  von  $P_i$ , also ein gegenüber  $P_i$  vereinfachtes (**relaxiertes**) Problem (weniger Nebenbedingungen).
- Es muss gelten

$$\mathcal{X}(P_i) \subseteq \mathcal{X}(P_i^{relax})$$

- Wichtig ist, **dass die Relaxationen effizient gelöst werden können**.
- Für gewöhnliche ILPs benutzt man üblicherweise **LP-Relaxationen**.
- Für spezielle kombinatorische Probleme können die Relaxationen **vereinfachte und effizient lösbare Probleme** sein.

**Beispiel:** Minimalgerüst ist Relaxation für kürzesten Hamiltonschen Weg

# Untere Schranken

- Durch die heuristische Bestimmung einer zulässigen Lösung erhält man eine **untere Schranke**  $B_{low}$ .
- Prinzipiell nicht notwendig. Schlimmstenfalls **starten wir mit**  $B_{low} = -\infty$ .
- Ist die optimale Lösung einer Relaxation auch zulässig für das eigentliche Problem  $P_0$ , stellt der zugehörige Zielfunktionswert eine untere Schranke dar.

**Beispiel:** Bei einem ILP ist die optimale Lösung der LP-Relaxation ganzzahlig.

- $B_{low}$  ist dann im Laufe des Verfahrens gleich dem Zielfunktionswert der besten bekannten zulässigen Lösung von  $P_0$ .

# Auslotung eines Problems

## Definition 3.7

Ein Problem  $P_i$  heißt **ausgelotet**, wenn einer der folgenden Fälle auftritt:

(a)  $B_{up}^i \leq B_{low}$

In  $\mathcal{X}(P_i)$  kann es keine bessere Lösung geben als die beste bisher bekannte.

(b)  $B_{up}^i > B_{low}$  und die optimale Lösung von  $P_i^{relax}$  ist zulässig für  $P_i$ .

Dann hat man eine neue bisher beste zulässige Lösung für  $P_0$  gefunden. Man setzt nun  $B_{low} := B_{up}^i$ .

(c)  $\mathcal{X}(P_i^{relax}) = \emptyset$

Dann hat  $P_i^{relax}$  und damit auch  $P_i$  keine zulässige Lösung.

# Selektionsstrategie

- **Tiefensuche:** Durchsuche für ein noch offenes Teilproblem (Knoten im Suchbaum) zuerst den “linken” Teilbaum, dann den “rechten” Teilbaum

Vorteile:

- ▶ Man erhält i.d.R. schnell eine zulässige Lösung (und damit eine untere Schranke)
- ▶ geringer Speicherplatzverbrauch (kleine Agenda)

Nachteile:

- ▶ i.d.R. größerer Suchbaum

- **Maximum Upper Bound:** Untersuche als nächstes das noch offene Teilproblem  $P_i$  mit der größten oberen Schranke  $B_{up}^i$ .

Vorteil:

- ▶ Suchbaum i.d.R. kleiner als bei der Tiefensuche

Nachteil:

- ▶ Größerer Speicherplatzverbrauch für Agenda