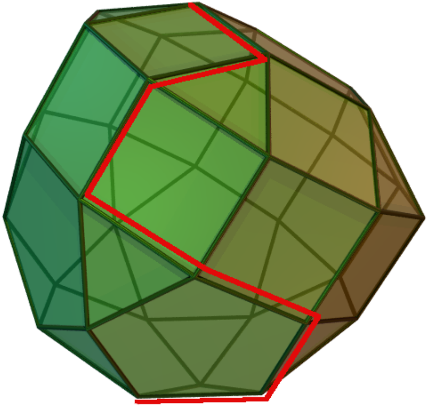
Kapitel 4

Simplex-Verfahren



Inhalt

Grundideen

- Der Simplexalgorithmus ist das Standardverfahren zur Lösung von linearen Programmen.
- von George Bernard Dantzig in den 40ern des 20. Jahrhunderts entwickelt
- Vorgehen: versuche ausgehend von einer Startecke mit einer Ausgangsbasis durch Basisaustausch zu einer Ecke mit besserem Zielfunktionswert fortzuschreiten.
- Da es nur endlich viele Ecken gibt, erhälten wir nach endlich vielen Schritten die optimale Lösung.
- Der Basistausch geschieht dabei so sparsam wie möglich: Es wird stets genau eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht.

Fazit zu Grundideen

Konstruktion einer Folge $(\mathbf{x}^{(r)})$ von Basislösungen mit

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r+1)} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r)}$$

und Abbruch, wenn keine Verbesserung mehr möglich ist.

Beispiel für ein Simplextableau

Beispiel 4.1

Wir bleiben beim Problem des Eisverkäufers (Beispiel 3.41) und ordnen die Daten in einem Simplextableau an:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	1	1	1	0	0	0	10
x_4	5	2	0	1	0	0	30
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	-30	-25	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 4.1.

- Die Strukturvariablen x_1, x_2 sind NBV, die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 sind BV.
- Die Werte der BV ergeben sich aus den Nebenbedingungsgleichungen, die durch die Zeilen des Tableaus repräsentiert werden. Hierdurch ist eine Ecke gegeben.
- Für den Zielfunktionswert $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ wird eine neue Variable z eingeführt und die Gleichung $-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z = 0$ wird wie eine zusätzliche Nebenbedingung aufgefasst. Wir betrachten also eigentlich das Problem:

$$\begin{array}{lrcl} & \multicolumn{3}{c}{\max z} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z & = & 0 \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

- Letzte Zeile ist Zielfunktionszeile, aufgefasst als Nebenbedingung. Der Zielfunktionswert z steht ganz rechts.

Beispiel für einen Basiswechsel

Beispiel 4.2

Im Tableau von Beispiel 4.1 verspricht x_1 den größeren Zuwachs, x_1-Spalte ist daher die Pivotspalte.

x_1 kann höchstens den Wert $30/5 = 6$ annehmen, x_4 würde dann 0. x_4-Zeile ist daher die Pivotzeile.

Wir nehmen x_1 in die Basis auf, dafür wird x_4 aus der Basis herausgenommen. Dies ist der Basisaustausch.

Pivotspalte und Pivotzeile schneiden sich im Pivotelement, hier $a_{21} = 5$. Wir teilen die Pivotzeile durch das Pivotelement. Damit entsteht

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 6$$

Aus dieser Gleichung folgt $x_1 = 6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$. Dies setzen wir in alle übrigen Gleichungen ein.

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Für die erste Zeile erhalten wir $\left(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4\right) + x_2 + x_3 = 10$. Dies ergibt $\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 4$.

Die dritte Zeile bleibt unverändert, da x_1 dort nicht auftritt.

Die Zielfunktionszeile wird zu $-30(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 25x_2 + z = 0$, also $-13x_2 + 6x_4 + z = 180$.

Jetzt können wir das neue Tableau aufstellen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	0	-13	0	6	0	1	180

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Durch Vertauschen der Spalten für x_1 und x_4 können wir das Tableau wieder in die übliche Form bringen:

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	z	**b**
x_3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	4
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	6	-13	0	0	0	1	180

Die zugehörige Ecke ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Der nächste Austauschschritt liefert das Tableau:

	x_4	x_3	x_2	x_1	x_5	b_i
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{20}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{10}{3}$
x_5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{7}{3}$
z	$\frac{5}{3}$	$\frac{65}{3}$	0	0	0	$\frac{800}{3}$

Das heißt in der Ecke $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ wird das Optimum mit $z = \frac{800}{3}$ angenommen.

Fazit für Beispiel 4.2

- Wir dividieren also die Pivotzeile durch den Pivotwert.
- Zu den übrigen Zeilen addieren wir ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass in der Pivotspalte Nullen entstehen (analog zum Gaußalgorithmus).
- optionale Spaltenvertauschung, um wieder die reine kanonische Form zu erlangen
- Aus der Spalte $\mathbf{b}$ und den Basisvariablen ergibt sich die Ecke.
- Solange in der Zielfunktionszeile Koeffezienten < 0 auftreten, ist eine Verbesserung möglich.
- Der Algorithmus terminiert, wenn in der Zielfunktionszeile alle Koeffizienten ≥ 0 sind.

Kanonische Form

- Dieses Vorgehen funktioniert in der gezeigten Weise nur, wenn zu Beginn ein kanonisches Maximumproblem vorliegt, d.h. ein Problem der Form
$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ u.d.N. } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0$$
und zusätzlich $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$ gilt.
- Fur dieses kanonische Maximumproblem erhalten wir mit Hilfe von m Schlupfvariablen ein Problem in kanonischer Normalform.
- Die erste Basislösung ist dann durch die Schlupfvariablen bestimmt (siehe Beispiel 4.1).
- Wegen $\mathbf{b} \ge 0$ ist diese Basislösung zulässig und stellt damit eine Ecke (die Startecke) dar.

Starttableau für kanonisches Maximumproblem

BV	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	z	$\mathbf{b}$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$\cdots$	1	0	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	1	0

Definition 4.3

Für $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ heißt solch ein Tableau primal zulässig.

Bemerkung: Da sich die Spalte z nie ändert, können wir auf diese Spalte im Tableau auch verzichten.

Primaler Simplexalgorithmus

Algorithmus 4.4

Es liege ein kanonisches Maximumproblem ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) vor mit n Variablen und m Nebenbedingungen, also n Struktur- und m Schlupfvariablen in Normalform.

Start: Ecke des Starttableaus ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit $z = 0$. Schlupfvariablen sind BV, Strukturvariablen sind NBV.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Starttableau:

	x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+s}	$\cdots$	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	$a_{n+1,1}$	$\cdots$	$a_{n+1,t}$	$\cdots$	$a_{n+1,n}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	$a_{s,1}$	$\cdots$	$a_{s,t}$	$\cdots$	$a_{s,n}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{n+m,1}$	$\cdots$	$a_{n+m,t}$	$\cdots$	$a_{n+m,n}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_t$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0

Von hier ab stehen Indices nicht für eine Spalten- oder Zeilennummer, sondern für den Variablenindex in der entsprechenden Spalte- bzw. Zeile des Simplextableaus.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Wahl der Pivotspalte: Ist die Zielfunktionszeile von der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccccc|ccc|c} \hline z & d_1 & \cdots & d_t & \cdots & d_n & 0 & \cdots & 0 & d \end{array}$$

mit $d_j \geq 0, (j = 1, \ldots, n)$, so liegt eine Optimallösung vor. Andernfalls machen wir eine Spalte t mit negativem d_t zur Pivotspalte und die NBV x_t zur BV.

Wahl der Pivotzeile: Sind in der Pivotspalte alle $a_{i,t} \leq 0$, so wächst z unbeschränkt, da x_t unbeschränkt wachsen kann. Es gibt dann keine Optimallösung.

Andernfalls bestimmen wir eine Zeile s durch

$$\frac{b_s}{a_{s,t}} = \min_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_{i,t}} \text{ für } a_{i,t} > 0$$

Die NBV x_t wird BV und bekommt den Wert $\frac{b_s}{a_{s,t}}$.

Die bisherige BV x_s wird NBV und nimmt den Wert 0 an.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Austauschschritt: Das neue Tableau lautet: Linke Hälfte:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_t & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & a_{1,1} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_t & \frac{a_{s,1}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{s,n}}{a_{s,t}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_m & a_{m,1} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{m,n} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\hline
z & d_1 - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & d_n - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,n} &
\end{array}
$$

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Rechte Hälfte:

$$
\cdots\left|\begin{array}{ccccc|c}
x_{n+1} & \cdots & x_s & \cdots & x_{n+m} & b_i \\
\hline
1 & \cdots & -\frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & b_1 - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{1,t} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \frac{1}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & \frac{b_s}{a_{s,t}} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & b_m - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{m,t} \\
\hline
0 & \cdots & -\frac{d_t}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & d - \frac{b_s}{a_{s,t}} d_t
\end{array}\right.
$$

Terminierung: Wenn alle Koeffizienten der Zielfunktionszeile nichtnegative Werte haben, beschreibt das Tableau eine optimale Ecke. Rechts unten steht dann z^*.

Andernfalls vertauschen wir die Spalten, so dass das Tableau wieder kanonische Form annimmt. Wir beginnen nun wieder von vorne.

Eigenschaften des primalen Simplexalgorithmus

Satz 4.5

Das r-te Tableau beim Simplexalgorithmus sei primal zulässig. Wählen wir die Pivotspalte und die Pivotzeile gemäß Algorithmus 4.4, so ist das $(r+1)$-te Tableau wieder primal zulässig, und es gilt $z^{(r+1)} \geq z^{(r)}$.

Beweis.

Wir müssen $b_l^{(r+1)} \geq 0$ für $1 \leq l \leq m$ zeigen. Nach Algorithmus 4.4 ist dies für die Pivotzeile s erfüllt, denn es gilt

$$b_s^{(r+1)} = \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}}$$

und $a_{s,t} > 0$. Wir brauchen uns also nur noch die Zeilen $l \neq s$ anzuschauen.

Fortsetzung Beweis zu Satz 4.5.

Für $l \neq s$ gilt

$$b_l^{(r+1)} = b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t}$$

Hierbei bezeichnet t den Index der Pivotspalte.
Für $a_{l,t} \leq 0$ folgt $b_l^{(r+1)} \geq b_l^{(r)} \geq 0$. Wir müssen also nur noch den Fall $a_{l,t} > 0$ betrachten. Hier gilt nach der Regel zur Wahl der Pivotzeile

$$\begin{aligned} \frac{b_l^{(r)}}{a_{l,t}} &\geq \frac{b_s}{a_{s,t}} \\ \Rightarrow \quad b_l^{(r)} &\geq \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{l,t} \\ \Rightarrow \quad b_l^{(r+1)} &= b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t} \geq 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 4.5.

Wegen $d_t^{(r)} \leq 0, b_s^{(r)} \geq 0$ und $a_{s,t} > 0$ folgt außerdem

$$z^{(r+1)} = z^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} d_t^{(r)} \geq z^{(r)}.$$

Bemerkung: Der Austauschschritt im primalen Simplexalgorithmus wird als primaler Austauschschritt bezeichnet.

Beispiel zum primalen Simplexalgorithmus

Beispiel 4.6

In einem Betrieb sind drei Maschinen vorhanden, die für die Herstellung zweier Produkte benötigt werden. Bei der Produktion müssen die Produkte auf mehreren Maschinen bearbeitet werden, wobei die folgenden Bearbeitungszeiten anfallen:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 480 Minuten. Der Ertrag pro Einheit beträgt 10 € für Produkt A und 40 € für Produkt B.

Welche Anzahl der Produkte ist täglich zu fertigen, so dass der Ertrag maximal wird?

Fortsetzung Beispiel 4.6.

Mathematische Modellierung:

x_1 produzierte Menge von Produkt A

x_2 produzierte Menge von Produkt B

LP:

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, x_2) = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 40x_1 + 24x_2 &\leq 480 \\ 24x_1 + 48x_2 &\leq 480 \\ 60x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 4.6.

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	24	1	0	0	0	480
x_4	24	48	0	1	0	0	480
x_5	0	60	0	0	1	0	480
z	-10	-40	0	0	0	1	0

2. Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	0	1	0	$-2/5$	0	288
x_4	24	0	0	1	$-4/5$	0	96
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	-10	0	0	0	$2/3$	1	320

Fortsetzung Beispiel 4.6.

3.Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360

Also ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine optimale Lösung.

Opportunitätskosten und Schattenpreise

Das Endtableau von Beispiel 4.6 entspricht dem LGS:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & x_3 & -\frac{5}{3}x_4 & +\frac{14}{15}x_5 & & = & 128 \\
x_1 & & & +\frac{1}{24}x_4 & -\frac{1}{30}x_5 & & = & 4 \\
 & x_2 & & & +\frac{1}{60}x_5 & & = & 8 \\
 & & & \frac{5}{12}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & +z & = & 360
\end{array}$$

Aufgelöst nach den Basisvariablen entsteht

$$\begin{array}{ccrcc}
x_3 & = & 128 & +\frac{5}{3}x_4 & -\frac{14}{15}x_5 \\
x_1 & = & 4 & -\frac{1}{24}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 \\
x_2 & = & 8 & & -\frac{1}{60}x_5 \\
z & = & 360 & -\frac{5}{12}x_4 & -\frac{1}{3}x_5
\end{array}$$

- Maschine 2 ($x_4 = 0$) und Maschine 3 ($x_5 = 0$) sind voll ausgelastet,
- dagegen steht Maschine 1 pro Tag $x_3 = 128$ Minuten still.
- Der Gewinn würde sich um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € pro Maschinenminute bei Maschine 2 bzw. 3 verringern,
- bzw. um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € erhöhen, wenn eine Maschinenminute mehr zur Verfügung stehen würde.
- Diese Werte nennen wir Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise.
- Sie entsprechen dem entgangenen Gewinn durch die nicht mehr verfügbare Kapazität
- bzw. den Preisen, die der Hersteller bereit wäre, für eine Maschinenminute von Maschine 2 bzw. 3 zu zahlen.