ϵ-Umgebung

Definition 3.13

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$U_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

ϵ-Umgebung von $\mathbf{x}$.

Bemerkungen:

- Welche Norm $\| \ \|$ genau verwendet wird, spielt keine Rolle.
- $U_\epsilon(\mathbf{x})$ bildet anschaulich eine n-dimensionale (offene) Kugel mit Radius ϵ um $\mathbf{x}$.

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 3.14

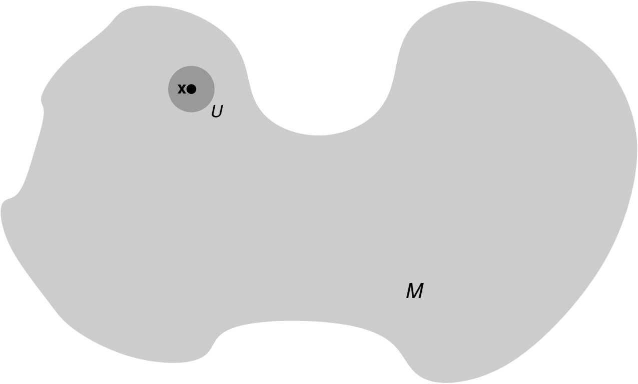
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen gdw. gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in M \, \exists \epsilon > 0 \; : \; U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M.$$

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $M^C := \mathbb{R}^n \setminus M$ von M offen ist.

Anschauliche Interpretation einer offenen Menge

Um jedes Element $\mathbf{x} \in M$ einer offenen Menge M kann man immer eine (eventuell sehr kleine) Kugel $U_\epsilon(\mathbf{x})$ bilden, die vollständig in M liegt.



Beispiel 3.15

Die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 < 5\}$ ist offen.
Begründung: Mit $\mathbf{a}^T = (1, 2, -3)$ ist M darstellbar als

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{a}^T\mathbf{x} < 5\}$$

Wähle für ein beliebiges $\mathbf{x} \in M$

$$\epsilon = \frac{5 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{2\|\mathbf{a}\|} > 0.$$

Zu zeigen: $\mathbf{y} \in U_\epsilon(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{a}^T\mathbf{y} < 5$.
Nachweis Tafel ✎.

Damit ist die Menge $M^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5\}$ abgeschlossen.

Bemerkungen

- Offen ist nicht das Gegenteil von abgeschlossen. Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.
  Beispiel: $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$.
- $\emptyset$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.
- $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Lemma 3.16

Jede Nebenbedingung und jede Vorzeichenbedingung eines linearen Programms LP definiert eine abgeschlossene Menge.

Beweis.

- Für $\geq$-Nebenbedingungen analog zu Beispiel 3.15 mit

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} < b_i\}$$

- Für $\leq$-Nebenbedingungen analog mit $>$ statt $<$.
- Für $=$-Bedingungen: Darstellbar als Schnitt von $\leq$- und $\geq$-Bedingungen und damit wieder abgeschlossen (siehe unten, Lemma 3.19).
- Variable x_i vorzeichenbeschränkt mit $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{e}_i^T \mathbf{x} < 0\}$.

$\square$

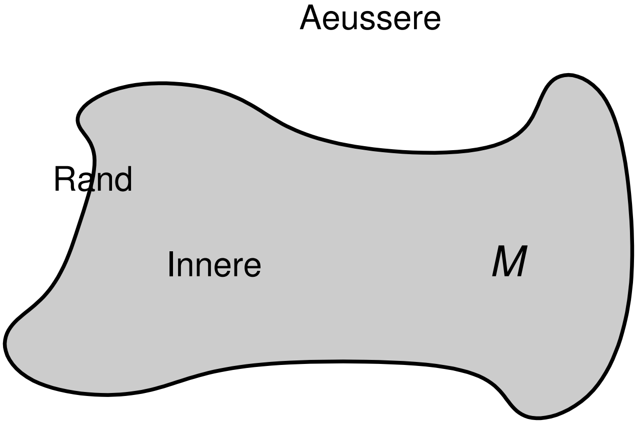
Inneres, Rand und Äußeres einer Menge

Definition 3.17

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt von M gdw. ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M$.
  M° bezeichnet die Menge der inneren Punkte von M (das Innere von M).
- $\mathbf{x}$ ist ein äußerer Punkt, gdw. $\mathbf{x}$ innerer Punkt von M^C ist. Die Menge der äußeren Punkte von M ist das Äußere von M.
- $\mathbf{x}$ heißt Randpunkt von M gdw. jedes $U_\epsilon(\mathbf{x})$ ein $\mathbf{y}$ enthält mit $\mathbf{y} \notin M$ und ein $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z} \in M$.
  Die Menge ∂M der Randpunkte bildet den Rand von M.
- $\overline{M} := M \cup \partial M$ bildet den Abschluss von M.

Für jede Menge M kann der $\mathbb{R}^n$ zerlegt werden in das Innere, das Äußere und den Rand von M.



Lemma 3.18

- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann offen, wenn* $M = M^\circ$ *gilt.*
- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $M = \overline{M}$ *gilt.*
- $(M^C)^\circ = (\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = (\overline{M})^C$
- $\overline{M^C} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus M} = \mathbb{R}^n \setminus M^\circ = (M^\circ)^C$

Lemma 3.19

Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

Konsequenzen für die Menge der zulässigen Lösungen

Folgerung 3.20

Für jedes lineare Programm LP ist die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen abgeschlossen.

Beweis.

- Jede Vorzeichenbedingung $x_i \geq 0$ definiert eine abgeschlossene Menge.
- Jede Nebenbedingung, sowohl in $\leq$-, $=$- oder $\geq$-Form, definiert eine abgeschlossene Menge.
- $\mathcal{X}_{LP}$ ist somit der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Mengen.

$\square$

Lemma 3.21

Es sei $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *der Zielfunktionsvektor eines linearen Programms LP. Dann gilt*

$$\mathcal{X}^*_{LP} \cap \mathcal{X}^\circ_{LP} = \emptyset$$

d.h., optimale Lösungen können nicht im Inneren von $\mathcal{X}_{LP}$ *auftreten.*

Folgerung 3.22

$$\mathcal{X}^*_{LP} \subseteq \partial \mathcal{X}_{LP}$$

Beweis.

O.B.d.A. sei LP ein Maximumproblem.

Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{LP}^{\circ}$, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{X}_{LP}$.

Wähle $\alpha := \frac{\epsilon}{2\|\mathbf{c}\|} > 0$. Damit gilt $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \alpha\mathbf{c} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$ und damit $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_{LP}$.

Es ergibt sich

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}^T\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\|\mathbf{c}\|_2^2$$

Wegen $\alpha\|\mathbf{c}\|_2^2 > 0$ folgt, dass $\mathbf{x}$ keine optimale Lösung sein kann. □

Beschränkte und kompakte Mengen

Definition 3.23

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- M heißt beschränkt, wenn ein $\beta \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|\mathbf{x}\| \leq \beta$ für alle $\mathbf{x} \in M$.
- M heißt kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel 3.24

Der offene Einheitskreis $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ ist beschränkt, denn es gilt $\|\mathbf{x}\| < 1$ für alle $\mathbf{x} \in M$. Da M offen ist, handelt es sich aber nicht um eine kompakte Menge.

Der abgeschlossene Einheitskreis $\overline{M}$ ist dagegen kompakt.

Bemerkung: Wenn der zulässige Bereich $\mathcal{X}_{LP}$ eines linearen Programms LP beschränkt ist, dann ist er auch kompakt.

Existenz von Extremwerten

Satz 3.25 (Weierstraß)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge und es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- *Ist M kompakt, dann ist die Funktion f auf M beschränkt und es existieren Minimum und Maximum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach unten beschränkt, dann existiert das Minimum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach oben beschränkt, dann existiert das Maximum für f.*

Beispiel 3.26

Es sei $M = [-1, 5] \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Das Minimum liegt bei $\frac{3}{2}$, das Maximum bei 5.
Für das offene Intervall $M = (-1, 5)$ existiert für f dagegen nur das Minimum.

Es sei $M = (2, 7) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = 2x - 3$. Dann existieren weder Minimum noch Maximum.
Für $M = (-\infty, 5]$ existiert das Maximum, aber kein Minumum.

Konsequenzen für lineare Programme

- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und beschränkt, dann existiert eine Lösung.
  vgl. Folie 120, Fälle (a) und (b)
- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und die Zielfunktion auf auf dem zulässigen Bereich nach oben beschränkt, dann existiert für Maximierungsprobleme eine Lösung.
  vgl. Folie 120, Fälle (c) und (d)
- Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nicht leer und die Zielfunktion auf auf dem zulässigen Bereich nach unten beschränkt, dann existiert für Minimierungsprobleme eine Lösung.

Konvexität

Definition 3.27

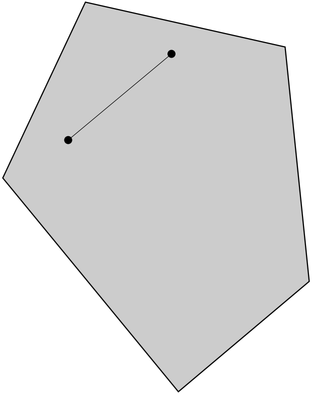
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex gdw. für je zwei Punkte Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M.$$

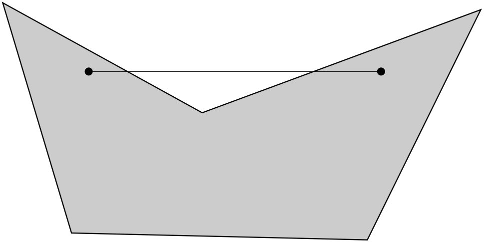
Die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält, d.h.

$$\text{conv}(M) = \bigcap_{\substack{M \subseteq K \\ K \text{ konvex}}} K$$

Konvexe Menge



konvexe Menge



nicht konvexe Menge

Durchschnitt konvexer Mengen

Lemma 3.28

Der Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.

Beweis.

Es seien $M_1, \ldots, M_n$ konvexe Mengen und es gelte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n M_i$. Dann gilt für ein beliebiges $\lambda \in [0, 1]$:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, wegen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n$.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, weil alle M_i konvex.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n M_i$.
- Also ist die Menge $\bigcap_{i=1}^n M_i$ konvex.

$\square$

Konvexkombination

Definition 3.29

Es seien $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ seien nichtnegative reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.

- Dann heißt $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}$ Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.
- Gilt sogar $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$ so heißt $\mathbf{x}$ echte Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.

Lemma 3.30

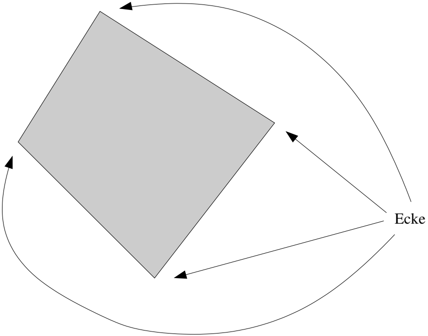
Die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ ist gleich der konvexen Hülle dieser Punkte, d.h.

$$\operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\}) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}^{(i)} \,\middle|\, \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$$

Ecke

Definition 3.31

Es $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.
z heißt Ecke von M, wenn sich **z** nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ darstellen lässt.



Frage: Wie viele Ecken hat ein Kreis?

Hyperebene und Halbraum

Definition 3.32

Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$$

Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Mengen

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq c\}$$

bzw.

$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c\}$$

heißen zu H gehöriger positiver Halbraum bzw. negativer Halbraum.

Lemma 3.33

Hyperebenen und Halbräume sind konvexe Mengen.

Beweis.

Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ und $\lambda \in [0,1]$, jeweils beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{y} \\ &= \lambda c + (1-\lambda)c \\ &= c \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in H$$

also ist H konvex.
Analog beweist man die Konvexität von H^+ und H^-. $\square$

Konvexität und LP-Lösungen

Folgerung 3.34

Es gilt:

- *Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung zulässigen Lösungen ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}^*_{LP}$ der optimalen Lösungen eines LP ist konvex.*

Beweis.

Folgt aus Lemma 3.28, Lemma 3.33 und der Linearität der Zielfunktion. □

Polytop und Polyeder

Definition 3.35

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellen lässt, heißt konvexes Polyeder.

Ein beschränktes konvexes Polyeder ist ein konvexes Polytop.

Satz 3.36

Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist ein konvexes Polyeder.

Bemerkung: Ein konvexes Polytop enthält nur endlich viele Ecken und ist identisch mit der konvexen Hülle dieser Ecken.

Ecken und LP-Lösungen

Satz 3.37

Gegeben sei ein LP (als Maximumproblem).

- *Die Menge $\mathcal{X}$ der zulässigen Lösungen des LP hat endlich viele Ecken.*
- *Ist $\mathcal{X}$ ein konvexes Polytop, so nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}$ an.*
- *Ist $\mathcal{X}$ unbeschränkt, aber die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}$ nach oben beschränkt, so nimmt $F(\mathbf{x})$ das Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}$ an.*
- *Ist $\mathcal{X}$ unbeschränkt und $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}$ nach oben unbeschränkt, so hat das LP keine Lösung.*

vgl. Folie 120