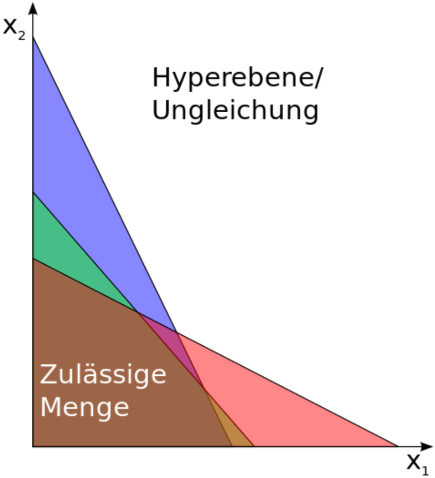
Kapitel 3

Lineare Programmierung



Inhalt

3 Lineare Programmierung

- Lineares Programm
- Grafische Lösung linearer Programme
- Normalform
- Geometrie linearer Programme
- Basislösungen

Lineares Programm

Definition 3.1

Es seien $b_i, c_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

Ein lineares Programm (LP) ist die Aufgabe, eine lineare Zielfunktion

$$z = F(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

für $x_j \in \mathbb{R}$ zu maximieren oder zu minimieren unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen der Form

$$\begin{array}{rcll} a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i & (i = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \geq & b_i & (i = m_2 + 1, \ldots, m) \end{array}$$

und meist auch von Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel 3.2

Ein Eisverkäufer stellt stündlich bis zu 10 kg Eis der Sorten A bzw. B her.

	A	B
Verkaufspreis	80 EUR/kg	65 EUR/kg
Kosten	50 EUR/kg	40 EUR/kg
Energieaufwand	5 kWh/kg	2 kWh/kg
absetzbar	6 kg	9 kg

Es stehen höchstens 30 kWh stündlich zur Verfügung.

Entscheidungsvariablen seien die stündlich herzustellenden Mengen x_1 kg bzw. x_2 kg.

Zu maximieren sei die Differenz aus Preis und Kosten.

Modellierung für Beispiel 3.2

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 80x_1 + 65x_2 - 50x_1 - 40x_2 = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

Zulässige und optimale Lösung

Definition 3.3

Ein Punkt oder Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Vorzeichenbedingungen erfüllt, heißt zulässige Lösung eines LP.

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ heißt optimale Lösung eines LP, wenn es keine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ mit besserem Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x}^*)$ gibt.

Mit $\mathcal{X}_{LP}$ bezeichnen wir die Menge der zulässigen Lösungen des linearen Programms LP und mit $\mathcal{X}_{LP}^*$ die Menge der optimalen Lösungen von LP.

Bemerkung: Wenn aus dem Kontext heraus das lineare Programm eindeutig ist, schreiben wir auch $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^*$ statt $\mathcal{X}_{LP}$ bzw. $\mathcal{X}_{LP}^*$.

Grafische Lösung linearer Programme

Wir betrachten zwei Entscheidungsvariablen x_1 und x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

ist die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \text{ und } a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

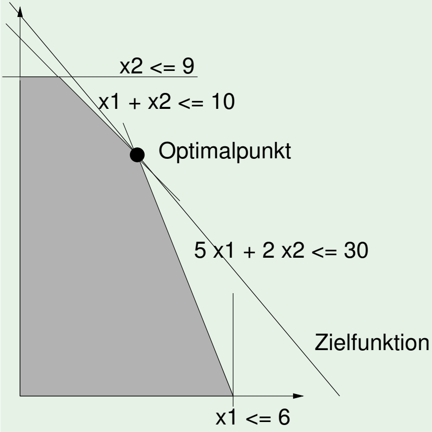
beschreiben jeweils eine Halbebene mit der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ als Rand.

Auch $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ stellen Halbebenen dar.

Der zulässige Bereich ist der Durchschnitt endlich vieler Halbebenen und somit ein sogenanntes konvexes Polyeder mit endlich vielen Eckpunkten.

Grafische Lösung zu Beispiel 3.2

Beispiel 3.4



Die Zielfunktion $z = 30x_1 + 25x_2$ wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt.

Wachsendes z bedeutet eine Verschiebung nach rechts oben.

Verschiebe nach oben, solange die Gerade durch $\mathcal{X}$ verläuft.

Optimale Lösung im Schnittpunkt der Geraden $x_1 + x_2 = 10$ und $5x_1 + 2x_2 = 30$, also $\mathbf{x}^* = (\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$ mit $z^* = \frac{800}{3}$.

Mögliche Situationen bei grafischer Lösung

(a) beschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung

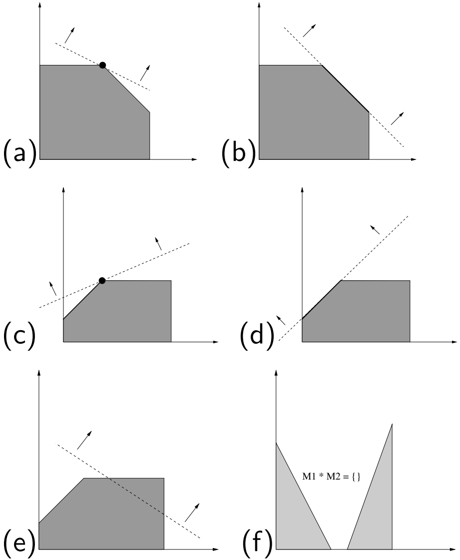
(b) beschränktes $\mathcal{X}$, nicht-eindeutige optimale Lösung

(c) unbeschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung

(d) unbeschränktes $\mathcal{X}$, nicht-eindeutige optimale Lösung

(e) unbeschränktes $\mathcal{X}$, keine optimale Lösung

(f) $\mathcal{X} = \emptyset$



Maximumproblem

Definition 3.5

Ein LP der Form

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$
heißt Maximumproblem.

Kompakte Schreibweise

Mit $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können wir ein Maximumproblem auch schreiben als:

Maximiere

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Beispiel 3.2 in kompakter Schreibweise

Beispiel 3.6

Maximiere

$$(30, 25) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformung in ein Maximumproblem

Satz 3.7

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Form eines Maximumproblems formulieren.

Beweis.

- Ersetze zu minimierende Zielfunktion $z = F(\mathbf{x})$ durch zu maximierende Zielfunktion $-z = -F(\mathbf{x})$
- Transformiere $\geq$-Nebenbedingung durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\leq$-Nebenbedingung.
- Eine Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ kann durch zwei Ungleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ und $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ ersetzt werden.
- Falls für x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ erlaubt sind, so ersetze x_j durch die zwei Variablen $x_j^+ \geq 0$ und $x_j^- \geq 0$ mit $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

□

Beispiel 3.8

Wir überführen das folgende LP in ein Maximumproblem:
Minimiere

$$z = 3x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

Fortsetzung Beispiel 3.8

Zunächst sorgen wir für eine Maximierung und stellen alle Nebenbedingungen als $\leq$ Nebenbedingungen dar:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 7 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & -4 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ -3x_1 - 2x_2 & \leq & -6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

Fortsetzung Beispiel 3.8

Nun wird durch $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+, x_2^- \geq 0$ die fehlende Vorzeichenbeschränkung eliminiert. Wir erhalten:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcr}
2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- & \leq & 7 \\
-x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- & \leq & -4 \\
3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- & \leq & 6 \\
-3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \leq & -6 \\
x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 & &
\end{array}$$

Normalform

Definition 3.9

Ein LP liegt in Normalform vor, wenn es die Form hat:

Maximiere	$z = F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
unter den Nebenbedingungen	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$
und Vorzeichenbedingungen	$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

In kompakter Darstellung:

Maximiere	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$
unter den Nebenbedingungen	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
und den Vorzeichenbedingungen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Umformung in Normalform

Satz 3.10

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Normalform formulieren.

Beweis.

Nach Satz 3.7 lässt sich zu jedem LP ein äquivalentes Maximumproblem formulieren. Es reicht daher zu zeigen, dass jedes Maximumproblem in Normalform überführt werden kann.

Hierzu führen wir für die m Ungleichungen die Schlupfvariablen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ ein, die in der Zielfunktion mit 0 bewertet werden.

Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißen Strukturvariablen.

Fortsetzung Beweis.

Die Normalform ergibt sich dann durch:

Maximiere $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0 \cdot x_j$ unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n+m)$$

In Matrixschreibweise lautet die Normalform

$$z = F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Bedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Kanonische Normalform

Definition 3.11

Gelten in der Matrixschreibweise für die Normalform die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

so ist das LP in kanonischer Form.

Beispiel 3.12

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Für die Nebenbedingungen führen wir die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5, x_6 ein und erhalten ...

Fortsetzung Beispiel 3.12.

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_6$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 30 \\ x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 6 \\ & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 9 \end{array}$$

und $x_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, 6)$.

Fortsetzung Beispiel 3.12.

In Matrixschreibweise:

Maximiere

$$z = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$