Lösungen zu Aufgabenblatt 4

— Lineare Programme: Grafische Lösung und Normalform —

Aufgabe 1 (Modellierung)

Formulieren Sie die folgenden Probleme als lineare Programme:

(a) Eine Schuhfabrik will je ein Modell eines Damen- und Herrenschuhs produzieren. Die 40 Angestellten und 10 Maschinen sollen so eingesetzt werden, dass der Gewinn maximal wird. Nebenbedingungen und Zielfunktion ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	Damenschuhe	Herrenschuhe	verfügbar
Herstellungszeit [h]	20	10	8000
Maschinenbearbeitung [h]	4	5	2000
Lederbedarf [qdm]	6	15	4500
Reingewinn [EUR]	16	32	

(b) In einem Betrieb werden Schafe und Kühe gehalten. Für höchstens 40 Kühe und 90 Schafe sind Ställe vorhanden. Eine Kuh braucht mindestens 1 ha, ein Schaf mindestens 0.25 ha Weideland, wovon 50 ha vorhanden sind. Pro Jahr stehen 1650 Personenarbeitsstunden zur Versorgung zur Verfügung. Eine Kuh braucht 30, ein Schaf 10 Personenarbeitsstunden pro Jahr. Der Reingewinn ist zu maximieren. Er beträgt 200 EUR/Kuh und 40 EUR/Schaf.

(c) Ein Haus mit 1000 qm Bodenfläche soll möglichst preisgünstig mit Bodenbelag ausgestattet werden, dessen Reinigungskosten jährlich 7000 EUR nicht übersteigen darf. Dabei sind mindestens 300 qm mit Parkett C (Preis: 60 EUR/qm, jährl. Reinigungskosten: 4 EUR/qm) auszustatten, während für den Rest die zwei Kunstoffsorten A (Preis: 30 EUR/qm, Reinigungskosten: 9 EUR/qm) und B (Preis: 40 EUR/qm, Reinigungskosten: 8 EUR/qm) zur Verfügung stehen.

Lösungen: siehe Homepage

Aufgabe 2 (Grafische Lösung von LPs)

Lösen Sie die linearen Programme von Aufgabe 1 (a) und (c) grafisch.

Hinweis: Benutzen Sie die =–Nebenbedingung in 1 (c) um das Problem auf zwei Variablen zu reduzieren.

Lösungen:

(a) siehe Homepage

(c) Aus

$$A + B + C = 1000$$

folgt

$$C = 1000 - A - B.$$

Wir setzen die rechte Seite in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen ein, so dass wir damit die Variable C eliminieren. Es entsteht das lineare Programm

$$\max 30A + 20B - 60000$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & \leq & 700 \\ 5A & + & 4B & \leq & 3000 \\ & & A, B & \geq & 0 \end{array}$$

Grafische Lösung dieses LP: siehe Homepage

Aufgabe 3 (Maximumproblem)

Überführen Sie das lineare Programm

Minimiere

$$z = 5x_1 - 2x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & \geq & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 8 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

in ein Maximumproblem.

Lösung: Durch Umformung ergibt sich zunächst

$$\max -z = -5x_1 + 2x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & \leq & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Jetzt ersetzen wir die nicht-vorzeichenbeschränkte Variable x_2 durch x_2^+ und x_2^- mit $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Damit entsteht

$$\max -z = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^-$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & \leq & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2^+ & - & 3x_2^- & \leq & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & \leq & 8 \\ -4x_1 & - & 2x_2^+ & + & 2x_2^- & \leq & -8 \\ & & & & x_1, x_2^+, x_2^- & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4 (Normalform)

Überführen Sie die linearen Programme von Aufgabe 1 (a) und (c) in die Normalform. Versuchen Sie dabei 1 (c) direkt in die Normalform zu überführen, also ohne den Umweg über die Darstellung als Maximumproblem.

Lösungen:

(a)

$$\max 16x_1 + 32x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
20x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8000 \\
4x_1 & + & 5x_2 & + & & + & x_4 & & & = & 2000 \\
6x_1 & + & 15x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4500 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0
\end{array}$$

(c)

$$\max -30A - 40B - 60C$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & & & = & 1000 \\
 & & & & C & - & D & & & = & 300 \\
9A & + & 8B & + & 4C & & & + & E & = & 7000 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{r}{A, B, C, D, E} & \geq & 0
\end{array}$$