Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Operations Research I
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Sommersemester 2014
9. April 2014

Aufgabenblatt 3

— Lineare Gleichungssysteme —

Aufgabe 1 (Cramersche Regel)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel (Satz 2.26):

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Lösung:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 12 + 15 + 6 - 8 + 15 = 12$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 8 + 24 + 6 - 12 + 16 + 6 = 48$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 16 - 30 - 6 + 16 + 20 = -12$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -8 + 6 + 20 + 8 + 4 + 30 = 60$$

Also

$$x_1 = \frac{48}{12} = 4, x_2 = -\frac{12}{12} = -1, x_3 = \frac{60}{12} = 5.$$

Aufgabe 2 (Gaußscher Algorithmus)

Ermitteln Sie für das unterbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & & & = & -3 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & + & 15x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

die Lösungsmenge mit Hife des Gaußschen Algorithmus. Stellen Sie die Lösungsmenge wie in Beispiel 2.31 dar.

Lösung: Wir wenden auf die erweiterte Koeffizientenmatrix den Gauß-Algorithmus an:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\Longrightarrow \\
(II)+2(I) \\
(III)+3(I) \\
\Longrightarrow \\
(III)-3(II) \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\
-2 & 4 & 5 & -1 & 0 & -3 \\
-3 & 6 & 15 & 8 & 1 & 1
\end{array}\right) \\
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 5 & 7 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 15 & 20 & 7 & 4
\end{array}\right) \\
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
\boxed{1} & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{5} & 7 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -5 & 7
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Die Kopfelemente in den Spalten für x_1, x_3, x_4 sind eingerahmt. Somit sind $x_2 = s$ und $x_5 = t$ die freien Parameter.

Wir bestimmen die Lösungsmenge:

$$
\begin{aligned}
-x_4 - 5t = 7 \quad &\Rightarrow \quad x_4 = -5t - 7 \\
5x_3 + 7(-5t-7) + 4t = -1 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = \frac{31}{5}t + \frac{48}{5} \\
x_1 - 2s + 4(-5t-7) + 2t = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 2s + 18t + 29
\end{aligned}
$$

Damit lässt sich die Lösungsmenge darstellen als

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 0 \\ \frac{48}{5} \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ \frac{31}{5} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}
$$

Aufgabe 3 (LR-Zerlegung)

Ermitteln Sie eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}^{-1}$ bzw. deren inverse $\mathbf{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$, so dass sich die Matrix

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

darstellen lässt als

$$
\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}
$$

Lösung: Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\Longrightarrow \\
(II)-2(I) \\
(III)-4(I) \\
\Longrightarrow \\
(III)-\frac{22}{9}(II) \\
\\
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 4 & -22 & -3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =: \mathbf{R}
\end{array}
$$

Jede angewendete Operation entspricht einer Multiplikation von $\mathbf{A}$. mit einer Elementarmatrizen von links. Jede dieser Elementarmatrizen ist eine untere Dreiecksmatrix, das Produkt dieser Matrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix und entspricht $\mathbf{L}^{-1}$.

$$\underbrace{\mathbf{R}_{3,2}(-\frac{22}{9})\,\mathbf{R}_{3,1}(-4)\,\mathbf{R}_{2,1}(-2)}_{=\mathbf{L}^{-1}}\,\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

Wegen $(\mathbf{R}_{l,k}(\alpha))^{-1} = \mathbf{R}_{l,k}(-\alpha)$ folgt

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{R}_{2,1}(2)\,\mathbf{R}_{3,1}(4)\,\mathbf{R}_{3,2}(\frac{22}{9})}_{=\mathbf{L}}\,\mathbf{R}$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{22}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Implementierung der Cramerschen Regel)

Implementieren Sie eine Java-Methode zur Lösung von linearen Gleichungssystemen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ nach der Cramerschen Regel.

Hinweise:

- Zur Berechnung der Determinanten können Sie Ihre Lösung von Aufgabe 4, Blatt 2 oder die hierzu veröffentlichte Musterlösung nutzen.
- Bei der Anwendung der Cramerschen Regel müssen Sie für $j = 1, \ldots, n$ die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ durch den Vektor $\mathbf{b}$ ersetzen. Falls Sie hierfür eine Kopie von $\mathbf{A}$ mittels `clone()` erzeugen, müssen Sie beachten, dass `clone()` nur eine flache Kopie erzeugt.

  Alternativen: Kopieren Sie manuell oder verzichten Sie auf das Kopieren von $\mathbf{A}$. Statt $\mathbf{A}$ zu kopieren können Sie auch nur den j-ten Spaltenvektor kopieren, ihn anschließend durch $\mathbf{b}$ ersetzen, $\det(\mathbf{A}_j)$ berechnen und anschließend den kopierten j-ten Spaltenvektor wieder in die j-te Spalte schreiben.

Besprechung der Übungsaufgaben am 16. April 2014 in der Veranstaltung.