Cramersche Regel

Satz 2.26

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine quadratische Matrix mit* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. *Für das LGS* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *sei*

$$\mathbf{A}_j := (\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^{j+1}, \ldots, \mathbf{a}^n),$$

also die Matrix, die entsteht, wenn in $\mathbf{A}$ *die* j*-te Spalte durch den Vektor* $\mathbf{b}$ *ersetzt wird.*

Dann gilt für die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ *des Gleichungssystems* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}.$$

Beispiel 2.27

Wir betrachten das LGS aus Beispiel 2.13 (a). Die Determinate $\det(\mathbf{A}) = 6$ haben wir bereits in Beispiel 2.22 berechnet.

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 6 + 2 + 2 - 0 = 0$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 9 - 3 - 6 + 9 + 3 - 6 = 6$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -6 + 0 - 12 + 6 + 18 - 0 = 6$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_2 = \frac{6}{6} = 1, \quad x_3 = \frac{6}{6} = 1$$

Beispiel 2.28

Java-Methode zur Lösung von LGS der Größe 3×3, siehe Homepage.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Beispiel 2.29

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Longrightarrow \\ (2) - \frac{1}{2}(1) \\ (3) - \frac{1}{4}(1) \end{array} \quad \begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 3 \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{31}{4}x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Longrightarrow \\ (3) - \frac{1}{10}(2) \end{array} \quad \begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 3 \\ & & & & \frac{77}{10}x_3 & = & \frac{1}{5} \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{77} \\ x_2 &= \frac{1}{5}(3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{77}) = \frac{46}{77} \\ x_1 &= \frac{1}{4}(2 - 2 \cdot \frac{46}{77} - \frac{2}{77}) = \frac{15}{77}. \end{aligned}$$

Pivotisierung

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a|$ groß und $|b|$ klein ist die Berechnung von $\frac{a}{b}$ schlecht konditioniert, d.h. ein Rundungsfehler bei der Darstellung von b wird verstärkt.

Deshalb: Pivotisierung durch Zeilenvertauschung

Für die verbleibenden Zeilen sucht man in der zu bearbeitenden Spalte nach dem betragsgrößten Element (Pivotelement) und führt eine Zeilenvertauschung durch.

Die Zeile, die das Pivotelement enthält, heißt Pivotzeile.

Bemerkung: In Beispiel 2.29 war keine Pivotisierung erforderlich.

Gaußscher Algorithmus

Äquivalente Umformungen eines LGS:

- Addition des Vielfachen einer Zeile (Gleichung) zu einer anderen,
- Vertauschung von Zeilen (Gleichungen),
- Multiplikation einer Zeile (Gleichung) mit einer Zahl ungleich null.

Bemerkung:

- Wir wollen mit dem Gaußschen Algorithmus auch $r(\mathbf{A})$ bzw. $r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ bestimmen.
- Deshalb schränken wir $\mathbf{A}$ nicht weiter ein, insbesondere sind auch Nullspalten und nicht-quadratische Matrizen zugelassen.

Algorithmus 2.30

1. *Initialisiere den Zeilenzähler* $k = 1$.
2. *Suche nach der ersten Spalte* j *mit* $(a_{kj}, \ldots, a_{mj}) \neq \mathbf{0}$ *und tausche die Pivotzeile mit der* k*-ten Zeile. Anschließend ist* a_{kj} *das Kopfelement der* k*-ten Zeile.*
3. *Für* $i = k + 1, \ldots, m$: *Durch*

   $$\mathbf{a}_i := \mathbf{a}_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}} \cdot \mathbf{a}_k$$

   Nullen unter dem Kopfelement a_{kj} *erzeugen.*
4. *Falls* $k < m$, *dann* $k := k + 1$ *und weiter mit 2. Ansonsten weiter mit 5.*
5. *Dividiere alle Nicht-Null-Zeilen durch deren Kopfelement.*

Zeilen-Stufen-Form

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \# & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & b_1 \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \# & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & b_2 \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0 & \# & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & b_3 \\
\vdots & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & \# & * & \cdots & * & b_r \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & b_m
\end{array}\right)
$$

$\#$ Kopfelement, $*$ beliebige Zahlen

$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$ gdw. $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$.

Beispiel 2.31

Wir betrachten das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 6x_3 & + & 21x_4 & + & 3x_5 & = & 27 \end{array}$$

Mit dem Gaußschen Algorithmus ergibt sich

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 4 & -8 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & -6 & 21 & 3 & 27 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 4 & -8 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 21 \end{array}\right)$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 4 & -8 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{2} & 4 & -8 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die eingerahmten Elemente sind die Kopfelemente. Nicht-Kopfspalten sind die Spalten 2 und 5, so dass wir $x_2 = s$ und $x_5 = t$ als freie Parameter wählen. Damit ergibt sich

$$-2x_4 - 2x_5 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{2}(1-2t) = \frac{1}{2} - t$$

$$x_3 + 3x_4 + x_5 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 4 - 3(\frac{1}{2} - t) - t = \frac{5}{2} + 2t$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{1}{2}(4 - 4s + 20 + 16t - 3 + 6t - 2t) \\ & = \frac{21}{2} - 2s + 10t \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} - 2s + 10t \\ s \\ \frac{5}{2} + 2t \\ \frac{1}{2} - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Gaußscher Algorithmus für reguläre Matrizen

Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (eine sogenannte reguläre Matrix) entsteht beim Gaußalgorithmus ein Dreiecksschema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)$$

mit $a_{k,k} \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Daraus ergeben sich die Lösungen

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} x_j}{a_{k,k}} \text{ für } k = n, \ldots, 1$$

LR-Zerlegung

Die beiden Operationen

(a) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen und
(b) Vertauschung von Zeilen

entsprechen der Multiplikation von $\mathbf{A}$ mit sogenannten Elementarmatrizen.

Alle Elementarmatrizen von Operation (a) zusammen ergeben eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}^{-1}$, das Ergebnis ist eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$. In diesem Fall gilt daher

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

bzw.

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR}$$

Dies ist die sogenannte LR-Zerlegung.

LR-Zerlegung mit Pivotisierung

Nutzt man zusätzlich Pivotisierung, kann dies durch eine Matrix $\mathbf{P}$ ausgedrückt werden. Es gilt dann

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

bzw.

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$$

Hierbei gilt

- $\det(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L}^{-1}) = 1$
- $\det(\mathbf{P}) = \pm 1$
- $\det(\mathbf{R}) = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$

womit $\det(\mathbf{A})$ einfach berechnet werden kann.

Elementarmatrizen

Definition 2.32

Die Elementarmatrix $\mathbf{R}_{k,l}(\alpha) = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $k \neq l$ ist definiert durch:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ \alpha & \text{für } i = k \text{ und } j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 2.33

$$\mathbf{R}_{2,1}(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{3,1}(-\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wirkungsweise:

- $\mathbf{R}_{k,l}(\alpha) \cdot \mathbf{A}$ addiert das α-fache der l-ten Zeile zu Zeile k.
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{k,l}(\alpha)$ addiert das α-fache der k-ten Spalte zu Spalte l.

Eigenschaften:

- $\det(\mathbf{R}_{k,l}(\alpha)) = 1$
- Das Matrixprodukt von Elementarmatrizen $\mathbf{R}_{k,l}(\alpha)$ mit $k > l$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Hauptdiagonale.
- Die Matrix $\mathbf{L}^{-1}$ für die Zerlegung $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{R}$ ensteht durch die Multiplikation von Elemantarmatrizen mit k, l und α gemäß Gaußschem Algorithmus.
- Es gilt
$$(\mathbf{R}_{k,l}(\alpha))^{-1} = \mathbf{R}_{k,l}(-\alpha)$$
Damit lässt sich die Matrix $\mathbf{L}$ sehr leicht bestimmen.

Beispiel 2.34

Zerlegung der Koeffizientenmatrix **A** von Beispiel 2.29:

$$\mathbf{R}_{3,2}(-\frac{1}{10}) \cdot \mathbf{R}_{3,1}(-\frac{1}{4}) \cdot \mathbf{R}_{2,1}(-\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{77}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{77}{10} \end{pmatrix}$$

Die linke Matrix ist die Matrix $\mathbf{L}^{-1}$ der Zerlegung, die rechte Matrix die Matrix **R**.

Wegen $\det(\mathbf{L}^{-1}) = 1$ folgt auch

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i} = 4 \cdot 5 \cdot \frac{77}{10} = 154$$

Fortsetzung Beispiel.

Weiterhin ergibt sich

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{2,1}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{R}_{3,1}(\frac{1}{4}) \cdot \mathbf{R}_{3,2}(\frac{1}{10}) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{77}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{77}{10} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Bemerkung:

- $\mathbf{L}$ muss nicht berechnet werden, sondern ergibt sich indirekt aus den beim Gauß-Algorithmus angewendeten Operationen
- negativer α-Wert an Position k, l

Zusammenfassung

- Vektorraum als Basisstruktur für Berechnungen
- Bestimmung der Lösbarkeit von LGS mit Hilfe von $r(\mathbf{A})$ bzw. $r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$
- Determinante und Cramersche Regel für sehr kleine, eindeutig lösbare LGS
- Allgemeiner Lösungsalgorithmus: Gaußscher-Algorithmus
- LR-Zerlegung als Spezialfall des Gaußschen-Algorithmus für reguläre Matrizen