

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen der Linearen Programmierung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inhalt

2 Mathematische Grundlagen der Linearen Programmierung

- Notationen
- Dimension, Basis, Rang
- Lineare Gleichungssysteme
- Determinante
- Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Notationen für K -Vektorraum

Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\in V$ und den Skalaren $\in K$ schreiben wir die **Vektoren mit fettgedruckten lateinischen Kleinbuchstaben**, z.B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j) \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Skalare nutzen wir üblicherweise **griechische Kleinbuchstaben in Normalschrift**, z.B.

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Vektoren teilweise auch zeilenorientiert, also $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Den **Nullvektor** bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$. Demgegenüber bezeichnet 0 das neutrale Element des Körpers.

In den meisten nachfolgenden Fällen **verzichten wir auf die Verwendung des Multiplikationssymbols \cdot** , sowohl bei der Multiplikation im Körper als auch bei der Multiplikation mit Skalaren. D.h.

$$\lambda\mu := \lambda \cdot \mu$$

$$\lambda\mathbf{v} := \lambda \cdot \mathbf{v}$$

für $\lambda, \mu \in K, \mathbf{v} \in V$.

☞ Wir bewegen uns im Folgenden fast ausschließlich im **\mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^n** .

Notationen für Matrizen

Die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zur Darstellung solcher Matrizen nutzen wir i.d.R. **fette lateinische Großbuchstaben**, z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die **Nullmatrix** stellen wir ebenfalls durch **0** dar. Aus dem Kontext ergibt sich, ob damit der Nullvektor oder die Nullmatrix gemeint ist.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die **transponierte Matrix** von \mathbf{A} .

Einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir auch als **einseitige Matrix** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auffassen.

Das **Skalarprodukt** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ können wir dann auch als **Matrixprodukt** $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ schreiben.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet

- $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ (**Kleinbuchstabe mit tiefgestelltem Index**) den i -ten Zeilenvektor und
- $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$ (**Kleinbuchstabe mit hochgestelltem Index**) den j -ten Spaltenvektor von \mathbf{A} .

Also:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ mit $\mathbf{e}_i = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ und

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden die **kanonische Basis** des \mathbb{R}^n .

Die Matrix

$$\mathbf{E} := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet die **Einheitsmatrix**.

Lineare Unabhängigkeit

Definition 2.1

Ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$$

und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq k$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.2

Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

stets $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ folgt. Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn sich $\mathbf{0}$ nur auf triviale Weise als Linearkombination darstellen lässt.

Beispiel 2.3

- Folgende Vektoren sind linear unabhängig:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dagegen sind diese Vektoren linear abhängig:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tafel .


Satz 2.4

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ seien linear abhängig. Dann existiert ein $j, 1 \leq j \leq k$ mit

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \mu_i \mathbf{v}_i.$$

- ☞ Wenn Vektoren linear abhängig sind, kann also **mindestens einer dieser Vektoren** als **Linearkombination** der anderen Vektoren dargestellt werden.

Beweis.

Tafel 



Basis und Dimension eines Vektorraums

Definition 2.5

Der **Spann** (oder die **lineare Hülle**) der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge alle Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Für einen Vektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Menge $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ von Vektoren **Erzeugendensystem von V** , wenn

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = V$$

gilt.

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt **Basis von V** .

Die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V heißt **Dimension von V** und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Bemerkungen zu Basis und Dimension

Alle Basen eines Vektorraums V haben die gleiche Anzahl an Vektoren. $\dim(V)$ ist somit sinnvoll definiert.

Vektorräume können auch eine unendliche Dimension haben. Beispiel: $C^0([a, b])$.

Der \mathbb{R}^n hat natürlich die Dimension n , aber (echte) Unterräume des \mathbb{R}^n haben eine kleinere Dimension.

Der Unterraum $(\{\mathbf{0}\}, +, \cdot)$ ist der sogenannte **Nullvektorraum** oder auch **Nullraum**. Er hat die Dimension 0.

Rang einer Matrix

Definition 2.6

Der **Rang** $r(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von \mathbf{A} .

Bemerkung:

$$r(\mathbf{A}) = \dim(\text{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n))$$

Satz 2.7

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Dann gilt:

- (a) $r(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- (b) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$
- (c) $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$

Beispiel zum Matrixrang

Beispiel 2.8

Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $r(\mathbf{A}) = 2$.

Begründung: Die Spaltenvektoren \mathbf{a}^1 und \mathbf{a}^2 sind linear unabhängig, somit folgt $r(\mathbf{A}) \geq 2$.

Aus Satz 2.7 (c) folgt $r(\mathbf{A}) \leq \min\{2, 3\} = 2$.

Also muss $r(\mathbf{A}) = 2$ gelten.

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die allgemeine Gestalt

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array}$$

Hierbei sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ die **Koeffizienten** und x_j die **Unbekannten** des LGS.

Wir können das LGS auch schreiben als

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

oder in Matrixschreibweise mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

als

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Beispiel LGS

Beispiel 2.9

Das LGS

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$4x_1 - 5x_2 + x_3 = 2$$

und seine Darstellung in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Definition 2.10

Für ein LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bezeichne

$$\mathbf{A|b} := (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$$

die um den Vektor \mathbf{b} der rechten Seite erweiterte Matrix \mathbf{A} .

Satz 2.11

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist das LGS

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

genau dann lösbar, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A|b})$ gilt.

Gilt zusätzlich $r(\mathbf{A}) = n$, dann gibt es genau eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Falls $r(\mathbf{A}) < n$ gilt, gibt es unendlich viele Lösungen mit $n - r(\mathbf{A})$ freien Parametern.

Bemerkungen

Für $m < n$ kann die Bedingung $r(\mathbf{A}) = n$ nicht erfüllt werden und es gibt daher keine eindeutige Lösung (falls es überhaupt eine Lösung gibt).

Wenn keine Lösung existiert, dann heißt das LGS **überbestimmt**, existieren unendlich viele Lösungen, dann ist es **unterbestimmt**.

Für $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ spricht man von einem **homogenen LGS**.

Hat ein homogenes LGS nur die Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dann sind die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig.

Beispiele für Lösbarkeit von LGS

Beispiel 2.12

Für das LGS aus Beispiel 2.9 gilt $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ (siehe auch Beispiel 2.8). Also ist das LGS lösbar mit unendlich vielen Lösungen und einem freien Parameter.

Beispiel 2.13

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 3, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit eindeutiger Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 3 = n$.

Fortsetzung Beispiel.

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 2, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit unendlich vielen Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 2 < n$.

(c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 8 & 4 \\ 3 & -12 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 1, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit unendlich vielen Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 1 < n$.

Fortsetzung Beispiel.

(d)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 2, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$$

unlösbar, da $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Bemerkungen:

- Im Operations Research treten überwiegend unterbestimmte Systeme auf.
- Die Lösungsmenge eines LGS entspricht hierbei der Menge der zulässigen Lösungen.

Permutationen

Definition 2.14

Es sei $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eine n -elementige Menge. Dann heißt eine bijektive Abbildung

$$\sigma : X \rightarrow X$$

Permutation.

Satz 2.15

Für eine n -elementige Menge X gibt es $n!$ verschiedene Permutationen.

- Für die mathematische Betrachtung von Permutationen beschränkt man sich üblicherweise auf $X = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Für uns ist eine Permutation also stets eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Schreibweise von Permutationen

Eine Permutation $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ stellt man üblicherweise in Form einer zweizeiligen Matrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

oder verkürzt in Tupelform

$$\sigma = (\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \cdots \quad \sigma(n))$$

dar.

Beispiel 2.16

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 4 \quad 1 \quad 3)$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3 \quad 1 \quad 4 \quad 2)$$

Symmetrische Gruppe

Definition 2.17

S_n bezeichne die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Bemerkung:

- (S_n, \circ) bildet mit der Komposition \circ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.
- S_n wird auch als **symmetrische Gruppe** bezeichnet.
- Eine **Permutationsgruppe** ist eine Untergruppe von S_n .
- Nach dem sogenannten Satz von Cayley ist **jede endliche Gruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe** (siehe Algebra 1./5. Semester).

Fehlstand und Signum einer Permutation

Definition 2.18

Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ **Fehlstand**.

Die Zahl

$$F(\sigma) = |\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

bezeichnet die **Anzahl der Fehlstände** von σ .

Das **Signum** $\text{sign}(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist definiert als

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{F(\sigma)}.$$

Beispiel 2.19

Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 2.16 hat die Fehlstände

$$\{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Also gilt

$$F(\sigma) = 3$$

und damit

$$\text{sign}(\sigma) = -1.$$

Eigenschaften des Signum

Satz 2.20

Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Dann gilt

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Für zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\text{sign}(\tau \circ \sigma) = \text{sign}(\tau) \cdot \text{sign}(\sigma).$$

Determinante

Definition 2.21

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Dann heißt

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

Determinante der Matrix \mathbf{A} .

Bemerkungen:

- Die Formel in Definition 2.21 heißt **Leibniz-Formel** und geht zurück auf **Gottfried Wilhelm Leibniz**.
- Summiert wird über die Elemente der symmetrischen Gruppe S_n . Die Summe besteht demnach aus $n!$ **Summanden**.

Beispiel zur Berechnung der Determinante

Beispiel 2.22

Für $n = 3$ enthält die symmetrische Gruppe S_n die Permutationen

$$(1 \ 2 \ 3), \quad (2 \ 3 \ 1), \quad (3 \ 1 \ 2)$$

mit $\text{sign}(\sigma) = +1$ und die Permutationen

$$(3 \ 2 \ 1), \quad (1 \ 3 \ 2), \quad (2 \ 1 \ 3)$$

mit $\text{sign}(\sigma) = -1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{array}{r} 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ - 1 \cdot 2 \cdot (-3) \end{array} + \begin{array}{r} 0 \cdot 1 \cdot (-3) \\ - 3 \cdot 1 \cdot (-2) \end{array} + \begin{array}{r} 1 \cdot 6 \cdot (-2) \\ - 0 \cdot 6 \cdot 1 \end{array} \\ &= 6 + 0 - 12 + 6 + 6 - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Eigenschaften der Determinante (1)

Satz 2.23 (Laplacescher Entwicklungssatz)

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ bezeichne die Matrix, die aus \mathbf{A} durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})\end{aligned}$$

Die erste Gleichung beschreibt die *Entwicklung nach der j -ten Spalte*, die zweite Gleichung die *Entwicklung nach der i -ten Zeile*.

Eigenschaften der Determinante (2)

Satz 2.24

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratische Matrizen. Dann gilt:

- (a) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- (b) Für $r \in \mathbb{R}$ gilt $\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$
- (c) $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$

Determinante und Lösbarkeit eines LGS

Satz 2.25

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- (b) Die Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von \mathbf{A} sind linear unabhängig.
- (c) $r(\mathbf{A}) = n$
- (d) Für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar.
- (e) Es existiert eine Matrix $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.