Kapitel 1

Einführung

Inhalt

Was ist Operations Research?

Definition der Gesellschaft für Operations Research (GOR):

> *Unter Operations Research (OR) wird allgemein die Entwicklung und der Einsatz quantitativer Modelle und Methoden zur Entscheidungsunterstützung verstanden.*

Operations Research ist geprägt durch die Zusammenarbeit von

- Mathematik,
- Wirtschaftswissenschaften und
- Informatik.

Gegenstand des Operations Research

OR dient der Entscheidungsvorbereitung im Rahmen von Planungsprozessen.

Dabei werden quantifizierbare Informationen unter Einbeziehung von Zielen verarbeitet.

OR arbeitet mit Modellen.

Zur Formulierung und Lösung der Modelle bedient es sich mathematischer und informatischer Methoden.

Modellbildung

Typische Fragestellungen:

- Welche quantifizierbaren und für das Problem relevanten Informationen habe ich?
- Welche Zusammenhänge bestehen?
- Was sind die Handlungsmöglichkeiten (Variablen)?
- Welche Einschränkungen sind dabei zu beachten (Nebenbedingungen)?
- Was will ich optimieren (Zielfunktion)?
- Sind Vereinfachungen möglich?
- Kann das Modell in eine Standardform gebracht werden?

Abgrenzung

OR im weiteren Sinne beschäftigt sich mit Modellbildung und Lösungsfindung sowie mit Methoden zur Datenermittlung.

OR im engeren Sinne beschränkt sich in erster Linie auf die Entwicklung von Algorithmen.

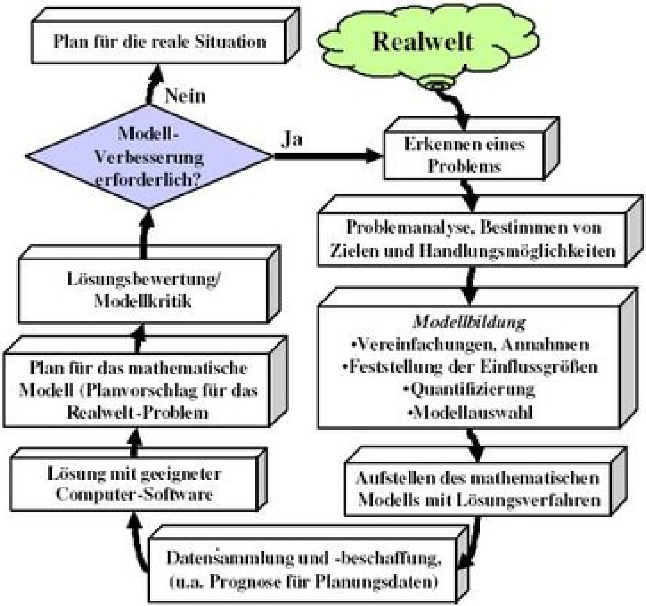
☞ Wir betrachten OR im engeren Sinne.

Geschichte

- Die Gründungszeit des OR waren die Jahre kurz vor und während des 2. Weltkriegs.
- In GB und den USA wurden z.B. Möglichkeiten der optimalen Zusammenstellung von Schiffskonvois untersucht.
- Auch bei der Organisation der Lüftbrücke im Rahmen der Berlin-Blockade 1948/49 spielte OR eine wichtige Rolle.
- Heute überwiegen ökonomische und ingenieurwissenschaftliche Anwendungen, v.a. in den Bereichen Produktion und Logistik.

OR-gestützte Planung

- Erkennen und Analysieren eines Problems
- Bestimmen von Zielen und Handlungsmöglichkeiten
- Mathematisches Modell, Informatisches Modell (Algorithmus)
- Datenbeschaffung
- Lösungsfindung, Berechnung
- Bewertung der Lösung


Plan für die reale Situation
Realwelt
Nein
Modell-
Verbesserung
erforderlich?
Ja
Erkennen eines
Problems
Problemanalyse, Bestimmen von
Zielen und Handlungsmöglichkeiten
Lösungsbewertung/
Modellkritik
Modellbildung
•Vereinfachungen, Annahmen
•Feststellung der Einflussgrößen
•Quantifizierung
•Modellauswahl
Plan für das mathematische
Modell (Planvorschlag für das
Realwelt-Problem
Lösung mit geeigneter
Computer-Software
Aufstellen des mathematischen
Modells mit Lösungsverfahren
Datensammlung und -beschaffung,
(u.a. Prognose für Planungsdaten)

Gebiete des Operations Research

Teilgebiete des Operations Research

- Lineare Optimierung bzw. lineare Programmierung
- Graphentheorie und Netzplantechnik
- Ganzzahlige (lineare) und kombinatorische Optimierung
- Dynamische Optimierung
- Nichtlineare Optimierung
- Warteschlangentheorie
- Simulation

Arten der Anwendung

Unterscheidung der Anwendungsmöglichkeiten:

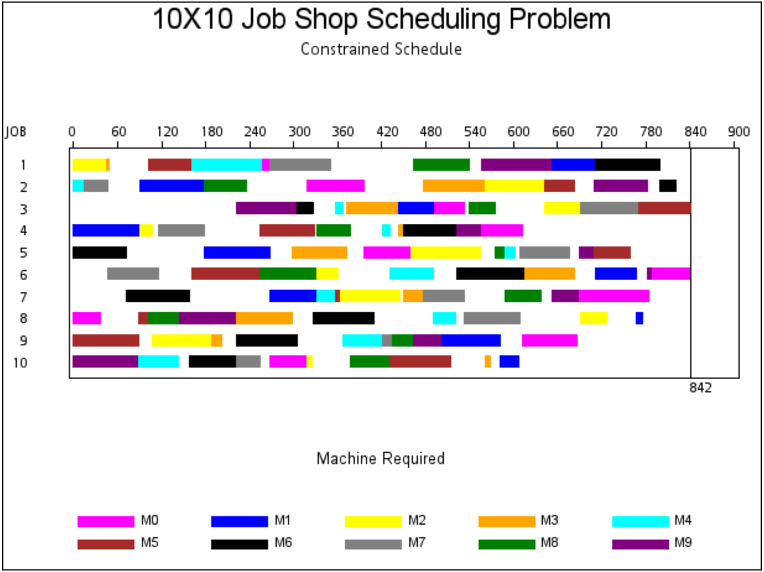
Betriebliche Funktionsbereiche: Beschaffung, Produktion, Logistik, Absatz, Investition, Finanzierung

Planungsinhalt: Zielplanung, Maßnahmenplanung, Durchführungsplanung, Ablaufplanung

Fristigkeit: strategische, taktische, operative Planung

Umfang: Teil- oder Gesamtplanung

Beispiel: Ablaufplan in Form eines Gantt-Charts



Modellierung

Ziel der Modellierung: Optimierungskriterien, Handlungsmöglichkeiten und Einschränkungen durch Variablen und Funktionen definieren.

- Handlungsmöglichkeiten entsprechen Variablen.
- Einschränkungen entsprechen Funktionen der Variablen und werden Nebenbedingungen genannt.
- Optimierungskriterium entspricht einer Funktion der Variablen, die Zielfunktion genannt wird.

Allgemeines Optimierungsmodell

Maximiere (oder minimiere)

$$z = F(x_1, \ldots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

und (eventuell) Vorzeichenbedingungen der Art $x_j \geq 0$ und weiteren einschränkenden Bedingungen an den Definitionsbereich der x_j wie $x_j \in \mathbb{Z}$ oder $x_j \in \{0, 1\}$.

Dabei sind:

n	Anzahl der Variablen
m	Anzahl der Nebenbedingungen
x_j	die Variablen mit $x_j \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{Z}$ oder $x_j \in \{0, 1\}$
$F(x_1, \ldots, x_n)$	die Zielfunktion
$g_i(x_1, \ldots, x_n)$	die Funktion der i-ten Nebenbedingung
b_i	die rechte Seite der i-ten Nebenbedingung
$x_j \in \mathbb{R}$	kontinuierliche Variable
$x_j \in \mathbb{Z}$	ganzzahlige Variable
$x_j \in \{0, 1\}$	binäre Variable

Bemerkungen zum allgemeinen Optimierungsmodell

- Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0$ spielen eine besondere Rolle und werden oft nicht zu den Nebenbedingungen gezählt.
- Gilt $x_j \in \mathbb{Z}$ für alle x_j, dann sprechen wir von einem ganzzahligen Modell.
- In einem gemischt-ganzzahligen Modell treten sowohl Variablen $x_j \in \mathbb{R}$ als auch Variablen $x_j \in \mathbb{Z}$ auf.
- In diesem allgemeinen Modell ist nicht berücksichtigt, dass Größen auch stochastischer Natur sein können (Zufallsvariablen).

  Mit der Optimierung stochastischer Modelle beschäftigen wir uns kurz in OR II (stochastische dynamische Optimierung).

Im Folgenden stellen wir eine Reihe von Optimierungsproblemen beispielhaft mit Hilfe dieses allgemeinen Modells dar.

Beispielmodell: Produktionsplanung

Beispiel 1.1

Fertigung von Toilettenpapier, Küchenrollen und Taschentüchern aus Altpapier.

- Deckungsbeiträge pro Mengeneinheit (ME): Toilettenpapier 85 €, Küchenrollen 90 €, Taschentücher 110 €
- Produktionshöchstmengen: Toilettenpapier 20 ME, Küchenrollen 15 ME, Taschentücher 12 ME
- Benötigtes Altpapier pro ME: Toilettenpapier 1 ME, Küchenrolle 0.8 ME, Taschentücher 0.6 ME
- Verfügbares Altpapier: 20 ME

Wie sieht das optimale Produktionsprogramm aus, wenn der Hersteller seinen Deckungsbeitrag maximieren möchte?

Mathematische Modellierung

x_1 zu produzierende Menge Toilettenpapier (ME)
x_2 zu produzierende Menge Küchenrollen (ME)
x_3 zu produzierende Menge Taschentücher (ME)

Zielfunktion:

$$\max D(x_1, x_2, x_3) := 85x_1 + 90x_2 + 110x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccclrl}
x_1 & + & 0.8x_2 & + & 0.6x_3 & \leq & 20 & \text{(Kapazitätzgrenze für Altpapier)} \\
x_1 & & & & & \leq & 20 & \text{(Höchstmenge für Toilettenpapier)} \\
& & x_2 & & & \leq & 15 & \text{(Höchstmenge für Küchenrollen)} \\
& & & & x_3 & \leq & 12 & \text{(Höchstmenge für Taschentücher)} \\
& & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}$$

Bemerkungen zum Modell Produktionsplanung

- lineare Zielfunktion
- alle Nebenbedingungen linear
- alle Nebenbedingungen sind $\leq$-Bedingungen
- Lösungsmethode: primaler Simplex-Algorithmus (siehe Kapitel 4)

Beispielmodell: Mischproblem

Beispiel 1.2

Für die Kakteenzucht mischt eine Gärtnerei drei Sorten Erde E_1, E_2, E_3 zusammen, die pro ME den folgenden Gehalt an Nährstoffen A, B, C aufweisen:

	E_1	E_2	E_3
Nährstoff A	4	5	8
Nährstoff B	1	1	2
Nährstoff C	5	3	4
Kosten €/ME	4.95	3.50	7.00

Mindestbedarf an Nährstoffen: 800 g für A, 280 g für B und 650 g für C. Es sollen die Kosten der Erdmischung minimiert werden.

Mathematische Modellierung

x_1	Menge von E_1 an der Mischung (ME)
x_2	Menge von E_2 an der Mischung (ME)
x_3	Menge von E_3 an der Mischung (ME)

Zielfunktion:

$$\min K(x_1, x_2, x_3) := 4.95x_1 + 3.5x_2 + 7.0x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
4x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & \geq & 800 & \text{(Bedarf an Nährstoff } A\text{)} \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 280 & \text{(Bedarf an Nährstoff } B\text{)} \\
5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \geq & 650 & \text{(Bedarf an Nährstoff } C\text{)} \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \text{(Nichtnegativität)}
\end{array}$$

Bemerkungen zum Mischproblem

- lineare Zielfunktion
- alle Nebenbedingungen linear
- alle Nebenbedingungen sind $\geq$-Bedingungen
- Lösungsmethode: dualer Simplex-Algorithmus (siehe Kapitel 4)

Beispielmodell: Investitionsplanung

Beispiel 1.3

Ein Hersteller von Schrauben will seine Fertigungskapazität durch die Investition in neue Maschinen vom Typ T_1, T_2, T_3, T_4 erhöhen. Die nachfolgende Tabelle gibt die Eckdaten der verschiedenen Maschinentypen T_i wieder:

	T_1	T_2	T_3	T_4
Jährliche Kapazität (ME)	750	2400	1500	1200
Tägliche Maximalkapazität (ME)	3	8	5	4
Investitionsaufwand (GE)	12	20	7	25
Jährliche Kosten (GE)	3	7	4	8

Es soll eine tägliche Maximalkapazität von 20 ME und eine jährliche Kapazität von 12000 ME zur Verfügung stehen. Die Investitionsmittel sind auf 100 GE beschränkt. Wie viele Maschinen sind von jedem Typ zu kaufen, so dass die jährlichen Kosten minimal sind?

Mathematische Modellierung

x_1	Anzahl der zu beschaffenden Maschinen vom Typ T_1
x_2	Anzahl der zu beschaffenden Maschinen vom Typ T_2
x_3	Anzahl der zu beschaffenden Maschinen vom Typ T_3
x_4	Anzahl der zu beschaffenden Maschinen vom Typ T_4

Zielfunktion

$$\min K(x_1, x_2, x_3, x_4) := 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 750x_1 & + & 2400x_2 & + & 1500x_3 & + & 1200x_4 & \geq & 12000 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \geq & 20 \\ 12x_1 & + & 20x_2 & + & 7x_3 & + & 25x_4 & \leq & 100 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} & & & & \end{array}$$

Bemerkungen zum Modell der Investitionsplanung

- lineare Zielfunktion
- alle Nebenbedingungen linear
- Nebenbedingungen sind sowohl $\leq$- als auch $\geq$-Bedingungen
- Die Variablen dürfen nur ganzzahlige Werte annehmen, was das Problem erheblich erschwert (es gelte dabei $0 \in \mathbb{N}$).
- Verzicht auf Ganzzahligkeit (LP-Relaxation) liefert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert.
- Lösungsmethode für die LP-Relaxation:
  2-Phasen-Simplex-Algorithmus (siehe Kapitel 5)

Beispielmodell: Transportproblem

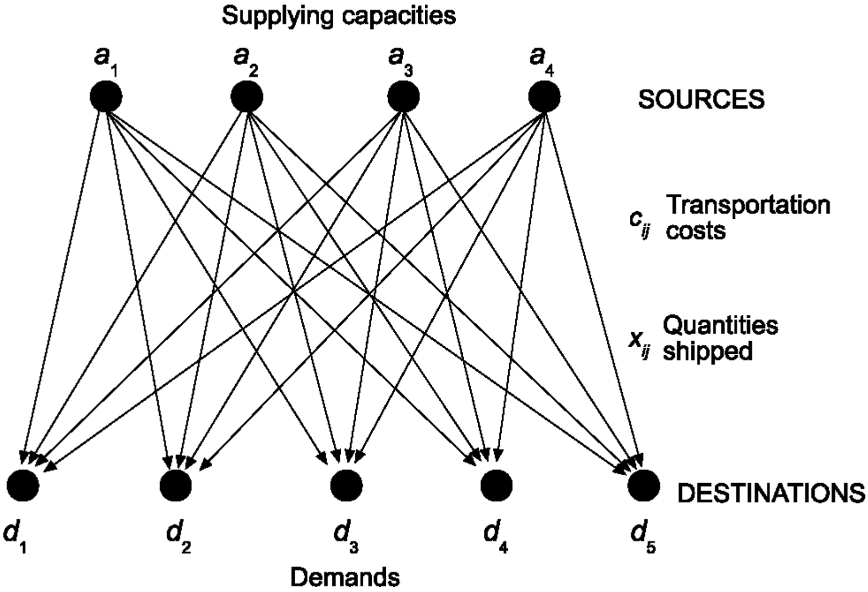
Beispiel 1.4

Ein Gut, das an den Orten A_i $(i = 1, ..., m)$ in den Mengen a_i angeboten wird, soll zu den Orten D_j $(j = 1, ..., n)$ transportiert werden, an denen eine Nachfrage von d_j besteht. Es gelte: Gesamtnachfrage = Gesamtangebot.

Die Kosten des Transportes einer Mengeneinheit von A_i zu D_j betragen c_{ij}.

Wieviele Mengeneinheiten x_{ij} sollen jeweils von A_i zu D_j transportiert werden, so dass

- die Nachfrage genau erfüllt ist,
- das Angebot vollständig ausgenutzt wird und
- die Gesamttransportkosten minimal sind?


Supplying capacities
a_1
a_2
a_3
a_4
SOURCES
c_{ij} Transportation costs
x_{ij} Quantities shipped
DESTINATIONS
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
Demands

Mathematische Modellierung

Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\text{Nachfrage} &: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \forall j \\
\text{Angebot} &: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \\
\text{Nichtnegativität} &: \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \forall j
\end{aligned}$$

Bemerkungen zum Transportprobem

- Im Gegensatz zu den Beispielen 1.1 bis 1.3 haben wir hier nicht eine spezielle Probleminstanz sondern eine ganze Klasse von Problemen modelliert.
- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Beachte:
  - Wir haben insgesamt n Nebenbedingungen für die Nachfrage (für jedes D_j) und
  - m Nebenbedingungen für das Angebot (für jedes A_i).
- Sollte Gesamtangebot $>$ Gesamtnachfrage gelten, so können wir stets ein äqivalentes Modell mit Gesamtangebot $=$ Gesamtnachfrage aufstellen (Übungsaufgabe).
- Lösung mit spezieller Variante des Simplexalgorithmus (siehe Kapitel 7)

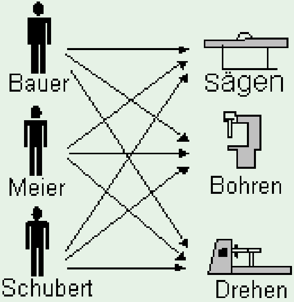
Beispielmodell: Zuordnungsproblem

Beispiel 1.5

n Arbeiter sollen n Tätigkeiten zugeordnet werden, wobei die Ausführungskosten c_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ betragen, wenn Arbeiter i die Tätigkeit j ausführt.

Die Arbeiter sollen nun so auf die Tätigkeiten verteilt werden, dass

- jedem Arbeiter genau eine Tätigkeit zugeordnet wird und jede Tätigkeit von genau einem Arbeiter ausgeführt wird und
- die dabei anfallenden Gesamtkosten minimal sind.



Mathematische Modellierung

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Arbeiter } i \text{ Tätigkeit } j \text{ ausführt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zielfunktion: $$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \forall j \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \quad \forall i \forall j \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Zuordnungsproblem

- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Das Zuordnungsproblem ist eng verwandt mit dem Transportproblem.
- Analog zum Transportproblem haben wir hier n Nebenbedingungen für die Arbeiter ($\forall i$) und n Nebenbedingungen für die Tätigkeiten ($\forall j$).
- Lösung mit spezieller Variante des Simplexalgorithmus (siehe Kapitel 7)
- Die binären Entscheidungsvariablen stellen dabei kein Problem dar! Begründung hierzu folgt in OR II.

Beispielmodell: Verschnittproblem

Beispiel 1.6

Aus 3 m langen Metallstangen sollen

- 10 Stangen mit 1 m,
- 45 Stangen mit 2 m,
- 21 Stangen mit 1.5 m und
- 42 Stangen mit 0.9 m

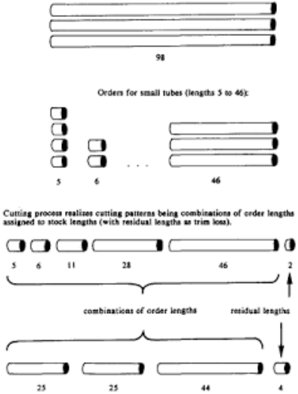
Länge hergestellt werden.

Die Anzahl der dafür notwendigen 3 m Stangen soll minimiert werden.

Mathematische Modellierung

Zunächst stellen wir alle möglichen maximale Schnittmuster auf, d.h. alle Möglichkeiten, eine 3 m Stange in die geforderten Längen zu zersägen, so dass der verbleibende Rest nicht mehr verwendbar ist.

Muster	1 m	2 m	1.5 m	0.9 m
1	3	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	1	0	1
5	2	0	0	1
6	1	0	0	2
7	0	0	0	3
8	1	0	1	0
9	0	0	1	1



Variablen

$$x_i = \text{Anzahl der Stangen mit Schnittmuster } i, 1 \leq i \leq 9$$

Zielfunktion

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{cccccccccccc}
3x_1 & +x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & & +x_8 & & \geq & 10 \\
 & x_2 & & +x_4 & & & & & & \geq & 45 \\
 & & 2x_3 & & & & & +x_8 & +x_9 & \geq & 21 \\
 & & & x_4 & +x_5 & +2x_6 & +3x_7 & & +x_9 & \geq & 42 \\
 & & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{N}} & &
\end{array}$$

Bemerkungen zum Verschnittproblem

- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Problem: Ganzzahligkeit der x_i
- LP-Relaxation liefert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert
- Lösungsmethoden: siehe OR II

Beispielmodell: Rucksackproblem

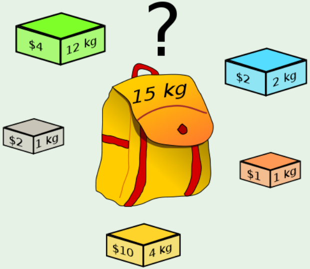
Beispiel 1.7

Gegeben seinen n Gegenstände.

- Jeder Gegenstand i hat ein Gewicht w_i $(1 \leq i \leq n)$ und
- einen Nutzen u_i $(1 \leq i \leq n)$.
- Zum Verpacken der Gegenstände steht ein Rucksack mit einer (Gewichts)-Kapazität von C zur Verfügung.

Welche Gegenstände sollen in den Rucksack gepackt werden, so dass

- deren Gesamtnutzen maximal ist und
- deren Gesamtgewicht die Rucksackkapazität nicht übersteigt.



Mathematische Modellierung

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Gegenstand } i \text{ in den Rucksack gepackt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zielfunktion

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i \, x_i$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i &\leq C \\ x_1, \ldots, x_n &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Rucksackproblem

- englisch: knapsack problem
- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- problematisch: Entscheidungsvariablen x_i sind binär
- Solche Probleme bezeichnen wir als kombinatorische Optimierungsprobleme.
- Das Rucksackproblem ist wie viele andere kombinatorische Optimierungsprobleme $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Lösungsmethoden: siehe OR II

Beispielmodell: Standortplanung

Beispiel 1.8

Gegeben sind m Kunden und n potentielle Depots, die an verschiedenen Standorten eröffnet werden könnten.

Die Eröffnung eines Depots j verursacht Fixkosten von c_j GE. Jedes Depot hat eine Lagerkapazität von u_j ME.

Jeder Kunde i hat einen Bedarf b_i ME und kann von jedem Depot bedient werden, wobei Transportkosten in Höhe von h_{ij} GE pro ME anfallen.

Welche Depots sollen eröffnet werden, so dass der Bedarf der Kunden bei minimalen Gesamtkosten befriedigt werden kann.

Mathematische Modellierung

x_j Soll Depot eröffnet werden ($x_j = 1$) oder nicht ($x_j = 0$)?
y_{ij} Menge, die von Depot j zu Kunde i transportiert wird

Zielfunktion

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} h_{ij} y_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} &= b_i \quad \forall i \\ -u_j x_j + \sum_{i=1}^{m} y_{ij} &\leq 0 \quad \forall j \\ x_j &\in \{0,1\} \quad \forall j \\ y_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \forall j \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Modell der Standortplanung

- lineare Zielfunktion und Nebenbedingungen
- gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem

Klassifikation von OR-Modellen

OR-Modelle werden v.a. nach folgenden Aspekten unterschieden:

- **Informationsgrad**
  deterministische Modelle vs. stochastische Modelle
- **Zielfunktionen**
  eine oder mehrere Zielfunktionen
- **Typ der Zielfunktionen und Nebenbedingungen**
  linear reellwertig, linear ganzzahlig, linear binär, nichtlinear
- **Lösbarkeit**
  polynomial, $\mathcal{NP}$-hart

Zusammenfassung

- Charakterisierung und Gebiete des Operations Research
- Planungsprozess
- Modellierung
- wichtige Modelle: Transportproblem, Zuordnungsproblem, Rucksackproblem