Schranken für zulässige Lösungen

Satz 5.9

Gegeben seien primales und duales LP gemäß der asymmetrischen Form der Dualität.
Wenn $\mathbf{x}$ *eine zulässige Lösung des primalen Programms und* $\mathbf{u}$ *eine zulässige Lösung des dualen Programms ist, dann gilt:*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

Beweis.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

□

Folgerung 5.10

Gilt $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$, dann ist $\mathbf{x}$ eine optimale Lösung des primalen LP und $\mathbf{u}$ eine optimale Lösung des dualen LP.

Bemerkungen:

- Satz 5.9 gilt analog für alle zueinander dualen Probleme:
  Ist das primale Problem ein Maximierungsproblem, dann gilt stets
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
  ansonsten
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
- Dementsprechend gilt natürlich auch Folgerung 5.10 für alle zueinander dualen Probleme.

Dualitätstheorem der linearen Programmierung

Satz 5.11

Gegeben seien ein primales LP (max) *und das zugehörige duale LP* (min)*. Dann gilt:*

- *Besitzt sowohl das primale LP als auch das duale LP eine zulässige Lösung* $\mathbf{x}$ *bzw.* $\mathbf{u}$*, so haben beide LPs auch optimale Lösungen* $\mathbf{x}^*$ *bzw.* $\mathbf{u}^*$ *und es gilt:*

$$z_{\text{max}} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{u}^* = Z_{\text{min}}$$

- *Ist die Zielfunktion des primalen LP nicht nach oben beschränkt, dann hat das duale LP keine zulässige Lösung.*
- *Ist die Zielfunktion des dualen LP nicht nach unten beschränk, dann hat das primale LP keine zulässige Lösung.*

Spezialfall: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

- Aus der Vorlesung Graphentheorie kennen wir das Max-Flow-Min-Cut-Theorem:

  In einem Flussnetzwerk ist der Wert $\Phi(f)$ eines Maximalflusses f gleich der Kapazität $c(A_S)$ eines minimalen Schnittes A_S.

- Dies ist ein Spezialfall des Dualitätstheorems 5.11.
- Jeder trennende Schnitt hat eine Kapazität $\geq$ dem Wert eines Maximalflusses. Umgekehrt ist der Wert eines beliebiges Flusses stets $\leq$ der Kapazität eines minimalen Schnittes.
- In den Optima treffen sich die Werte: Das Maximalflussproblem und das Problem der Bestimmung eines minimalen Schnittes sind zueinander dual.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Satz 5.12

Gegeben seien primales und duales LP in asymmetrischer Form.

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ *des primalen LP und eine zulässige Lösung* $\mathbf{u}$ *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j$$

Beweis.

Für die $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ gilt nach Satz 5.9:

$$0 \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c})$$

Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ jeweils optimal, dann gilt nach dem Dualitätstheorem $= 0$.
Also muss für $x_j > 0$ gelten, dass die j-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}$ gleich 0 ist.
Umgekehrt folgt aus

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = c_j$$

dass gilt

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}) = 0$$

und damit $\mathbf{b}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Also sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ nach dem Dualitätstheorem optimal. □

Satz vom Komplementären Schlupf

Satz 5.13

Gegeben seien primales und duales LP in symmetrischer Form.

Durch Einführen von m Schlupfvariablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ *für das primale LP und n Schlupfvariablen* $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_{m+n}$ *für das duale LP gegen die LPs über in die Normalform.*

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ *des primalen LP und eine zulässige Lösung* $\mathbf{u}$ *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_i u_{m+i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad u_j x_{n+j} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m$$

Bemerkung:

- Die Strukturvariablen des primalen LP korrespondieren mit den Schlupfvariablen des dualen LP und umgekehrt.
- Ist für die optimale Lösung des primalen LP $x_i > 0$, so ist $u_{m+i} = 0$. Analog gilt: $u_j > 0$ impliziert $x_{n+j} = 0$.

Beweis.

Wir betrachten die LPs

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \ge 0 \end{array}$$

Wir führen Vektoren $\mathbf{x}' = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ und $\mathbf{u}' = (u_{m+1}, \ldots, u_{n+m})$ an Schlupfvariablen ein.

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x}' \ge 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{u}' \ge 0 \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}')^T\mathbf{u} &= \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ (\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}')^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Mit Satz 5.9 ergibt sich

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{x}'^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T\mathbf{A} - \mathbf{u}'^T)\mathbf{x}^T \geq 0$$

Nach dem Dualitätstheorem sind nun $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ optimale Lösungen der beiden zueinander dualen LPs genau dann, wenn gilt:

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{x}'^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T\mathbf{A} - \mathbf{u}'^T)\mathbf{x}^T = 0$$

bzw.

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{u} + \mathbf{u}'^T\mathbf{x} = 0$$

Wegen den Vorzeichenbedingungen entspricht dies genau dem Satz vom komplementären Schlupf.

Beispiel zum komplementären Schlupf

Beispiel 5.14

Das Problem aus Beispiel 4.6 haben wir bereits mit dem primalen Simplexalgorithmus gelöst.

☞ siehe Endtableau

Das zugehörige duale Problem haben wir in Beispiel 5.6 formuliert.

☞ siehe LP

Wir lösen dieses LP mit dem dualen Simplexalgorithmus.

1. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	$\mathbf{c}$
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_5	-24	-48	-60	0	1	0	-40
$-Z$	480	480	480	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_3	$2/5$	$4/5$	1	0	$-1/60$	0	$2/3$
$-Z$	288	96	0	0	8	1	-320

3. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360

Fortsetzung Beispiel.

Wir vergleichen die beiden Endtableaus:

	primales Programm						
	Strukturvariablen		Schlupfvariablen				
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360
	Wert der Schlupfvariablen		Wert der Strukturvariablen				
	duales Programm						

Fortsetzung Beispiel.

	duales Programm						
	Strukturvariablen			Schlupfvariablen			
BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360
	Wert der Schlupfvariablen			Wert der Strukturvariablen			
	primales Programm						

Interpretation: komplementärer Schlupf

Die Variablen des dualen LP entsprechen Bewertungsfaktoren bzw. Preisen für die Maschinenzeiten, die so festzulegen sind, dass

- der Gesamtwert aller Maschinenzeiten möglichst klein ist: $\min \mathbf{b}^T \mathbf{u}$,
- die Kosten für die Erzeugung der einzelnen Produkte mindestens gleich den mit diesen Produkten erzielten Gewinnen sind: $\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c}$ und
- die Werte für die Maschinenzeiten nicht negativ sind: $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Bei optimaler Planung stimmen Gesamtgewinn der Produktion und Gesamtkosten für die Maschinenzeiten überein, die Zielfunktionswerte von primalem und dualem LP sind gleich.