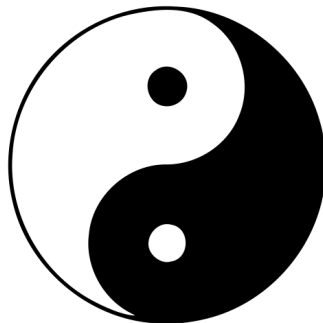


Kapitel 5

Dualität



Inhalt

5 Dualität

- Konzept der Dualität
- Dualitätssätze
- Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Duales Lineares Programm

Zu jedem Optimierungsproblem existiert ein korrespondierendes duales Optimierungsproblem.

Definition 5.1

Gegeben sei das folgende LP als Maximumproblem (**primales lineares Programm**):

$$\begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Dann lautet das zugehörige **duale lineare Programm**:

$$\begin{array}{ll} \min & Z = \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Das Paar dieser beiden LPs nennt man die **symmetrische Form der Dualität**.

Bemerkungen zum dualen Programm (1)

- Das duale Programm hat so viele Variablen, wie das primale Programm Nebenbedingungen hat.
- Das duale Programm hat so viele Nebenbedingungen, wie das primale Programm Variablen hat.
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$

Bemerkungen zum dualen Programm (2)

Zum Aufstellen des dualen Programms werden die folgenden Schritte ausgeführt:

- Bilden einer Zielfunktion aus dem Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seite der Nebenbedingungen,
- Transponieren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und
- Erzeugung von $\geq$ -Nebenbedingungen mit $\mathbf{A}^T$ und dem Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}$ des primalen Programms als rechte Seite.

Beispiel zur Dualität

Beispiel 5.2

Wir betrachten als primales Programm das LP von Beispiel 4.6. Das zugehörige duale Programm lautet dann:

$$\min Z = 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$40u_1 + 24u_2 \geq 10$$

$$24u_1 + 48u_2 + 60u_3 \geq 40$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

Das Maximumproblem geht also in ein Minimumproblem über.

Dualität für ein LP in Normalform

Satz 5.3

Gegeben sei das primale LP in Normalform (mit den üblichen Dimensionen):

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Dann lautet das zugehörige duale Programm:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\end{array}$$

Definition 5.4

Das Paar der beiden LPs von Satz 5.3 nennt man die **asymmetrische Form der Dualität**.

Beweis.

Wir stellen das primale LP

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

als Maximumproblem dar. Hierzu wandeln wir als erstes die
= $\text{Nebenbedingungen in zwei Nebenbedingungen der Form } \leq \text{ und } \geq \text{ um.}$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 5.3.

Durch Multiplikation der $\geq$ -Nebenbedingungen mit -1 entsteht dann das Maximumproblem:

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Zu diesem Maximumproblem können wir das duale LP aufstellen:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{b}^T \mathbf{v} - \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{v}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ erhält man dann das duale lineare Programm:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\end{array}$$

Bemerkungen

- Statt die Dualität wie in Definition 5.1 zu definieren, hätte man auch die Dualität über die Beziehung in Satz 5.3 definieren können.
Diese beiden Formen der Dualität sind äquivalent!
- Der Beweis von Satz 5.3 macht deutlich, wie wir allgemein für ein primales LP das zugehörige duale LP bestimmen können:
 - (i) Transformation in ein Maximumproblem
 - (ii) Aufstellen des dualen LP gemäß Definition 5.1
 - (iii) Vereinfachungen anwenden
- Zur Bestimmung des dualen LPs können wir statt Definition 5.1 natürlich auch Satz 5.3 verwenden.

Beispiele für duale LPs

Beispiel 5.5

Für das primale LP

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

lautet das duale LP:

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{Au} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\end{array}$$

Beispiel 5.6

Das LP von Beispiel 4.6 lautet in Normalform:

$$\max 10x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$40x_1 + 24x_2 + x_3 = 480$$

$$24x_1 + 48x_2 + x_4 = 480$$

$$60x_2 + x_5 = 480$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Fortsetzung Beispiel 5.6.

Das zugehörige duale LP ist dann:

$$\min 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$40u_1 + 24u_2 \geq 10$$

$$24u_1 + 48u_2 + 60u_3 \geq 40$$

$$u_1 \geq 0$$

$$u_2 \geq 0$$

$$u_3 \geq 0$$

Obere Schranke für die Zielfunktion

Das folgende Beispiel soll einen stärkeren Einblick in das Konzept der Dualität geben.

Beispiel 5.7

Wir betrachten wieder das LP von Beispiel 4.6:

$$\max z = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$40x_1 + 24x_2 \leq 480$$

$$24x_1 + 48x_2 \leq 480$$

$$60x_2 \leq 480$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Fortsetzung Beispiel 5.7.

Wir multiplizieren nun die erste NB mit $u_1 = \frac{1}{4}$, die dritte NB mit $u_3 = \frac{34}{60}$ und addieren diese beiden Ungleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} & 10x_1 & + & 6x_2 & \leq & 120 \\ (+) & & & 34x_2 & \leq & 272 \\ \hline (=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 392 \end{array}$$

☞ Auf der linken Seite der Summe steht die Zielfunktion.

Wir haben also, ohne das LP zu lösen, mit **392 eine obere Schranke für den maximalen Zielfunktionswert z** hergeleitet.

Fortsetzung Beispiel 5.7.

Andere Faktoren können natürlich andere Schranken liefern. Für

$$u_1 = \frac{1}{8}, \quad u_2 = \frac{5}{24}, \quad u_3 = \frac{27}{60}$$

erhalten wir

$$\begin{array}{rclcl}
 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\
 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 100 \\
 (+) & & 27x_2 & \leq & 216 \\
 \hline
 (=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 376
 \end{array}$$

mit 376 eine noch etwas bessere obere Schranke.

Interpretation der Dualität (1)

Wir verallgemeinern das Prinzip zur Herleitung oberer Schranken aus Beispiel 5.7:

- Für jede Nebenbedingung definieren wir einen **nichtnegativen Faktor u_i** , mit dem die i -te Nebenbedingung **multipliziert wird**. Der Vektor der u_i ist $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.
- Damit die Summe der gewichteten Nebenbedingungen eine **obere Schranke** für die Zielfunktion ist, müssen **in der Summe die Faktoren der Variablen x_i größer oder gleich c_i** sein. Dies entspricht $\mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c}$.
- Die **obere Schranke** ist dann $\sum_{i=1}^m u_i b_i = \mathbf{b}^T \mathbf{u}$.
- Die **beste obere Schranke ist die kleinste**. Also versuchen wir $\mathbf{b}^T \mathbf{u}$ zu minimieren!

Interpretation der Dualität (2)

- Für $\leq$ -Ungleichungen dürfen wir nur nichtnegative u_i verwenden,
- denn bei Multiplikation mit negativem u_i würde eine $\geq$ -Ungleichung entstehen.
- Dagegen dürfen wir bei $=$ -Nebenbedingungen auch negative u_i verwenden.
- Dies erklärt, warum bei der asymmetrischen Form der Dualität die Variablen des dualen Programms nicht vorzeichenbeschränkt sind.
- Allgemein: $\leq$ - und $\geq$ -Nebenbedingungen des primalen LP korrespondieren mit vorzeichenbeschränkten Variablen des dualen LP, $=$ -Nebenbedingungen mit nicht vorzeichenbeschränkten Variablen.

Primales vs. duales LP

primales LP	duales LP
Maximierung	Minimierung
Kostenvektor	rechte Seite
rechte Seite	Kostenvektor
A	A^T
$\leq$ -Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≥ 0
Gleichung	freie Variable
$\geq$ -Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≤ 0
Vorzeichenbeschränkung ≥ 0	$\geq$ -Ungleichung
freie Variable	Gleichung

Weitere Beispiele zur Dualität

Beispiel 5.8

Wir betrachten das primale LP

$$\min 60x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1000 \\ x_1 & & & & & \geq & 300 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & \leq & 7000 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Da es sich um ein Minimierungsproblem handelt, sind wir an unteren Schranken interessiert. In der Summe der Nebenbedingungen brauchen wir also ein $\geq$ und für die Koeffizienten der x_i muss $\leq c_i$ gelten.

Fortsetzung Beispiel 5.8.

Für $u_1 = 120$ und $u_3 = -10$ erhalten wir

$$\begin{array}{rclclclcl}
 & 100x_1 & + & 100x_2 & + & 100x_3 & = & 100000 \\
 (+) & -40x_1 & - & 90x_2 & - & 80x_3 & \geq & -70000 \\
 \hline
 (=) & 60x_1 & + & 10x_2 & + & 20x_3 & \geq & 30000
 \end{array}$$

Für $u_1 = 30$ und $u_2 = 30$ erhalten wir

$$\begin{array}{rclclclcl}
 & 30x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & = & 30000 \\
 (+) & 30x_1 & & & & & \geq & 9000 \\
 \hline
 (=) & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & \geq & 39000
 \end{array}$$

Bemerkung: Der minimale Zielfunktionswert beträgt 42000.

Fortsetzung Beispiel 5.8.

Allgemein lautet dann das duale LP

$$\max 1000u_1 + 300u_2 + 7000u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_1 + u_2 + 4u_3 \leq 60$$

$$u_1 + 9u_3 \leq 30$$

$$u_1 + 8u_3 \leq 40$$

$$u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0$$