Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Operations Research I
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Sommersemester 2015
10. April 2015

Aufgabenblatt 2

— Mathematische Grundlagen der Linearen Programmierung —

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 2 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Bestimmen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 11 \\ 5x_1 - x_2 &= 8 \\ x_1 - 5x_2 &= 16 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Berechnung der Determinante)

(a) Berechnen Sie für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det(\mathbf{A})$ mit Hilfe der Leibniz-Formel.

(b) Für $z \in \mathbb{R}$ seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} z-5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von z hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ genau eine bzw. keine oder unendlich viele Lösungen?

Hinweis: Nutzen Sie die Sätze 2.25 und 2.11.

Aufgabe 4 (Java-Methode zur Berechnung der Determinante)

Implementieren Sie eine Java-Methode, die für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Determinante $\det(A)$ nach der Leibniz-Formel berechnet.

Hinweise:

- Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie eine Permutation $\sigma \in S_n$ repräsentieren. Für die einfache Behandlung in Java bietet es sich an, die Permutationen nicht auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ sondern auf der Menge $\{0, \ldots, n-1\}$ operieren zu lassen.
- Als nächstes sollten Sie sich ein Verfahren überlegen, mit dem Sie alle Permutationen $\sigma \in S_n$ erzeugen können. Im Idealfall berechnen Sie dabei auch jeweils das Signum der erzeugten Permutation.

  Aus softwaretechnischer Sicht bietet es sich an, die Erzeugung der Permutationen mit Hilfe des Entwurfsmusters Iterator zu kapseln.
- Wenn Sie die beiden ersten Punkte erfüllt haben, brauchen Sie nur noch eine Schleife für die Iteration über die Permutationen $\sigma \in S_n$, wobei Sie im Innern der Schleife den Ausdruck

$$\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

berechnen.

Hinweise zur Erzeugung aller Permutationen $\sigma \in S_n$:

- Erzeugen Sie die Permutationen in aufsteigender lexikographischer Ordnung, also von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$ bis zu $\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Zu einer Permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(0) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$
berechnen Sie die lexikographisch folgende Permutation μ wie folgt:

  1. Ermitteln Sie den größten Index j mit $\sigma(j) < \sigma(j+1)$.
  2. Für $i = 1, \ldots, j-1$ ergibt sich $\mu(i) = \sigma(i)$.
  3. Es sei $\sigma(k)$ das kleinste Element aus $\sigma(j+1), \ldots, \sigma(n-1)$, das größer als $\sigma(j)$ ist. Setze $\mu(j) = \sigma(k)$.
  4. Weise die Werte $\sigma(j), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(n-1)$ in aufsteigend sortierter Reihenfolge $\mu(j+1)$ bis $\mu(n-1)$ zu.

- Beispiel: Wir wollen den lexikographischen Nachfolger zu $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ermitteln.

  1. $j = 0$
  2. Wegen $j = 0$ leere Schleife.
  3. $k = 1$ und $\sigma(k) = \sigma(1) = 3$. Also $\mu(0) = \sigma(1) = 3$.
  4. $\mu(1) = 0, \mu(2) = 1, \mu(2) = 2$, also
$$\mu = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Besprechung der Übungsaufgaben am 15. April 2015 in der Veranstaltung.