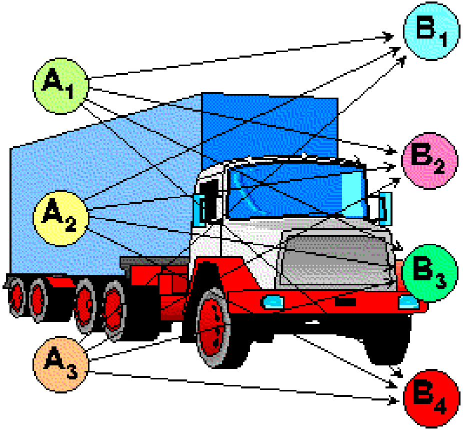
Kapitel 6

Transport- und Zuordnungsprobleme



Inhalt

Transportproblem

Definition 6.1

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

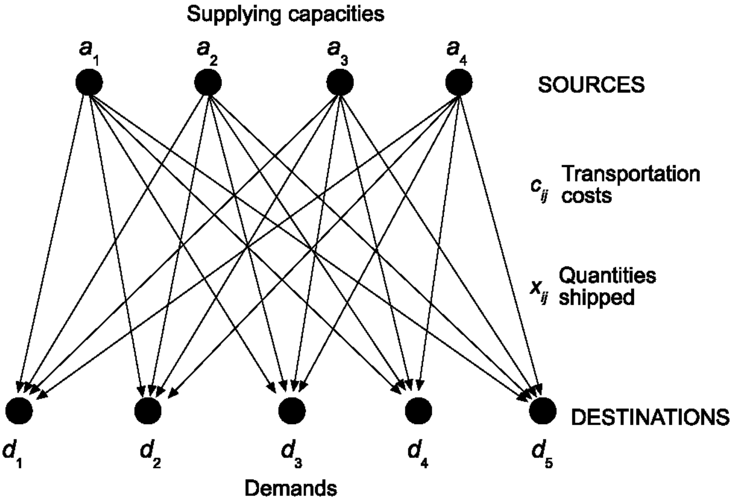
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Transportproblem.


Supplying capacities
a_1
a_2
a_3
a_4
SOURCES
c_{ij} Transportation costs
x_{ij} Quantities shipped
DESTINATIONS
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
Demands

Bemerkungen zum Transportproblem

Wir setzen ein geschlossenes Transportproblem voraus: $a_i > 0, b_j > 0$ und $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, also Gesamtangebot = Gesamtnachfrage.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir ein zusätzliches Warenhaus mit $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ und $c_{i,n+1} = 0$ ein.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir eine zusätzliche Produktionsstätte mit $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ein.

Die $c_{m+1,j}$ modellieren dann die Kosten pro ME für das mangelnde Angebot in Warenhaus j.

Anzahl Variablen: $m \cdot n$

Beispielproblem

Beispiel 6.2

Wir gehen von folgenden Kosten, Angebot und Nachfrage aus:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	1	3	50
A_2	4	5	8	70
	40	40	40	

Fortsetzung Beispiel.

Damit lautet das zugehörige Transportproblem

$$\min 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & 50 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 70 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 40 \\
 & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 40 \\
 & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = & 40
\end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.$$

Lösbarkeit des Transportproblems

Satz 6.3

Zu jedem Transportproblem existiert eine optimale Lösung.

Beweis.

Es sei

$$G = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

und

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{G}$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{G} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{G} = a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

Fortsetzung Beweis.

und

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{G} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{G} = b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Damit existiert eine zulässige Lösung.

Wegen $0 \leq x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$ ist der Zulässigkeitsbereich $\mathcal{X}$ darüberhinaus beschränkt.

Also existiert nach Satz 3.18 eine optimale Lösung.

Transportproblem in Matrixdarstellung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} &= (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \\
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & \cdots & & & & \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 1 & & 0 \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1
\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m \cdot n}
$$

genauer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq m \wedge (i-1) \cdot n < j \leq i \cdot n \\ 1 & \text{falls } m < i \leq m+n \wedge j = k \cdot n + (i-m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Begrenzungsvektor:

$$\mathbf{b} = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

Damit hat das Transportproblem in Normalform die Darstellung

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Rang der Koeffizientenmatrix

Satz 6.4

Die Matrix $\mathbf{A}$ *des Transportproblems hat den Rang* $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$.

Beweis.

Die Summe der Zeilen 1 bis m ist gleich der Summe der Zeilen $m + 1$ bis $m + n$. Also sind die $m + n$ Zeilenvektoren linear abhängig und es folgt $r(\mathbf{A}) \leq m + n - 1$.

Andererseits sind die $m + n - 1$ Spaltenvektoren mit den Indizes

$$1, 2, \ldots, n, n + 1, 2n + 1, \ldots, (m - 1)n + 1$$

linear unabhängig, also $r(\mathbf{A}) \geq m + n - 1$.

Insgesamt folgt $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$. □

Eröffnungsverfahren

- Nach Satz 6.4 besteht eine Basislösung eines Transportproblems aus $m + n - 1$ Basisvariablen.
- Zur Konstruktion einer ersten Ecke benötigen wir daher eine zulässige Lösung mit
  - $n + m - 1$ Variablen $x_{ij} > 0$ und
  - restlichen Variablen $x_{ij} = 0$ (falls keine Entartung vorliegt).
- Wir stellen nun zwei Verfahren zur Konstruktion einer ersten zulässigen Basislösung bzw. Ecke vor:
  - Nordwesteckenregel
  - Minimale-Kosten-Regel

Transporttableau

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} B_{11} x_{11}	c_{12} B_{12} x_{12}		c_{1n} B_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} B_{21} x_{21}	c_{22} B_{22} x_{22}		c_{2n} B_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} B_{m1} x_{m1}	c_{m2} B_{m2} x_{m2}		c_{mn} B_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	z

Nordwesteckenregel

Idee:

- Man transportiere über die Verbindung ganz links oben im Tableau so viel wie möglich.
- Wird dadurch das Lager erschöpft, streiche man die erste Zeile des Tableaus, ansonsten die erste Spalte, und beginne wieder mit dem ersten Schritt.

Algorithmus zur Nordwesteckenregel

Algorithmus 6.5

$x_{ij} := 0$ für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
$z := 0$
$i := 1, j := 1$
while $i \leq m$ **and** $j \leq n$ **do**
    $x_{ij} := \min\{a_i, b_j\}$
    $z := z + c_{ij} x_{ij}$
    $a_i := a_i - x_{ij}$
    $b_j := b_j - x_{ij}$
    if $a_i = 0$ **then**
        $i := i + 1$
    else
        $j := j + 1$
    end
end

Diskussion Nordwesteckenregel

- Die tatsächlichen Kosten werden zur Auswahl der Basisvariablen nicht berücksichtigt, daher i.d.R. keine gute zulässige Lösung.
- Entartung, wenn in einer Iteration sowohl a_i als auch b_j gleich 0 werden.
  In der nächsten Iteration wird dann $x_{i+1,j}$ Basisvariable mit $x_{i+1,j} = 0$.
- In jeder Iteration wird genau eine Zeile oder Spalte "gestrichen", in letzter Iteration ist aber nur genau eine Spalte und genau eine Zeile übrig.
- Daher insgesamt $m + n - 1$ Iterationen mit der Auswahl von $m + n - 1$ Basisvariablen.
- Die B_{ij} betrachten wir erst später!

Beispiel zur Nordwesteckenregel

Beispiel 6.6

Wir gehen von Kosten, Angebot und Nachfrage gemäß Beispiel 6.2 aus.
Starttableau:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 $\quad B_{11}$	1 $\quad B_{12}$	3 $\quad B_{13}$	50
A_2	4 $\quad B_{21}$	5 $\quad B_{22}$	8 $\quad B_{23}$	70
	40	40	40	0

1. Iteration: $x_{11} = 40, a_1 = 10, b_1 = 0, z = 360$
2. Iteration: $x_{12} = 10, a_1 = 0, b_2 = 30, z = 370$
3. Iteration: $x_{22} = 30, a_2 = 40, b_2 = 0, z = 520$
4. Iteration: $x_{23} = 40, a_2 = 0, b_3 = 0, z = 840$

Fortsetzung Beispiel.

Tableau nach Nordwesteckenregel:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 40	1 10	3 B_{13}	0
A_2	4 B_{21}	5 30	8 40	0
	0	0	0	840

Minimale-Kosten-Regel

- Statt die erste Möglichkeit links oben im Transporttableau wählt man unter den möglichen Variablen x_{ij} diejenige mit minimalen Kosten c_{ij}.
- Ansonsten verläuft der Algorithmus analog zur Nordwesteckenregel.
- I.d.R. erhalten wir eine bessere zulässige Basis als bei der Nordwesteckenregel, dies ist aber nicht garantiert.
- Typischer Greedy-Algorithmus: Treffe die lokal beste Entscheidung!

Algorithmus zur Minimale-Kosten-Regel

Algorithmus 6.7

$x_{ij} := 0$ für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
$I := \{1, \ldots, m\}; J := \{1, \ldots, n\}; z := 0$
while $I \neq \emptyset$ **and** $J \neq \emptyset$ **do**
    wähle i und j so, dass $c_{ij} = \min\{c_{lk} | l \in I, k \in J\}$
    $x_{ij} := \min\{a_i, b_j\}$
    $z := z + c_{ij} x_{ij}$
    $a_i := a_i - x_{ij}$
    $b_j := b_j - x_{ij}$
    if $a_i = 0$ **then**
        $I := I \setminus \{i\}$
    else
        $J := J \setminus \{j\}$
    end
end

Beispiel zur Minimale-Kosten-Regel

Beispiel 6.8

1. Iteration:

$$i = 1, j = 2, x_{12} = 40, a_1 = 10, b_2 = 0, I = \{1, 2\}, J = \{1, 3\}, z = 40$$

2. Iteration:

$$i = 1, j = 3, x_{13} = 10, a_1 = 0, b_3 = 30, I = \{2\}, J = \{1, 3\}, z = 70$$

3. Iteration:

$$i = 2, j = 1, x_{21} = 40, a_2 = 30, b_1 = 0, I = \{2\}, J = \{3\}, z = 230$$

4. Iteration:

$$i = 2, j = 3, x_{23} = 30, a_2 = 0, b_3 = 30, I = \emptyset, J = \emptyset, z = 470$$

Fortsetzung Beispiel.

Tableau nach Minimale-Kosten-Regel:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 B_{11}	1 40	3 10	0
A_2	4 40	5 B_{22}	8 30	0
	0	0	0	470

Zugeordneter bipartiter Graph

Für ein Transportproblem sei $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ die Menge der Fabriken und $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ sei die Menge der Warenhäuser.

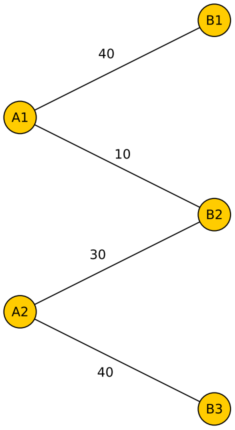
Wir ordnen nun einem Transportproblem einen bipartiten Graph $G = (V, E)$ zu mit:

- $V = A + B$ und
- $E = \{\{v, w\} | v \in A, w \in B\}$.

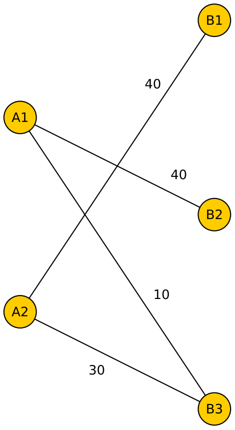
Damit können wir auch jeder Variablen x_{ij} die Kante $\{A_i, B_j\} \in E$ zuordnen.

Struktur zulässiger Basislösungen

Basislösung von Beispiel 6.6:



Basislösung von Beispiel 6.8:



Satz 6.9

Gegeben sei eine zulässige Basislösung für ein Transportproblem.

Dann bilden die Kanten der Basisvariablen im zugeordneten bipartiten Graphen einen Baum.

Beweis.

Angenommen, eine Teilmenge der Basisvariablen bildet im zugeordneten bipartiten Graphen einen Kreis der Länge $2k$. O.B.d.A. sei dies der Kreis $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, \ldots, A_k, B_k, A_1)$ mit den Basisvariablen $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{kk}, x_{1k}$.

Wir bilden nun eine Linearkombination der Spaltenvektoren dieser Basisvariablen von der Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt:

- Für eine Kante (A_i, B_i) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i,i)}$ den Koeffizienten 1,
- für eine Kante (B_i, A_{i+1}) und die Kante (B_k, A_1) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i+1,i)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(1,k)}$ den Koeffizienten -1.

Fortsetzung Beweis.

Dann bildet diese Linearkombination den Vektor $\mathbf{0}$, die Spaltenvektoren sind also linear abhängig. Widerspruch zu Basislösung!

Also müssen die Kanten der Basisvariablen einen kreisfreien Untergraphen bilden.

Da der bipartite Graph aber

- $m + n$ Knoten und
- eine Basislösung $n + m - 1$ Variablen (also Kanten)

hat, müssen die Variablen der Kanten einen Baum bilden (vgl. Graphentheorie, Satz 1.42 (5)).

Netzwerk-Simplexalgorithmus

Fragestellungen/Aufgaben:

- Bewertung der Nicht-Basisvariablen (NBV) x_{ij} mit Schattenpreisen B_{ij}
- Auswahl einer Nicht-Basisvariablen
- Auswahl einer Basisvariablen (BV), die zur Nicht-Basisvariablen wird
- Anpassung des Tableaus

Satz 6.9 bildet die Basis, um diese Fragestellungen zu lösen.

Bestimmung der Schattenpreise

Es sei x_{ij} eine NBV.

- Schattenpreis: Wie würden sich die Kosten ändern, wenn wir 1 ME von A_i nach B_j schicken würden?
- In der Basislösung gibt es gemäß Satz 6.9 genau einen Weg W von A_i nach B_j.
- Nehmen wir die Kante für x_{ij} hinzu, entsteht genau ein Kreis.
- Transportieren wir 1 ME von A_i nach B_j über die Kante von x_{ij}, müssen wir auf dem Weg W von A_i nach B_j die Transportmengen wie folgt anpassen:
  - von A_k zu B_l: 1 ME weniger
  - von B_l zu A_k: 1 ME mehr

- Damit können wir die Schattenpreise bestimmen:

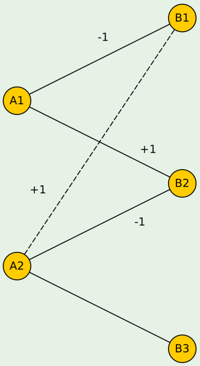
$$B_{ij} = c_{ij} + \sum_{(B_l, A_k) \in W} c_{kl} - \sum_{(A_k, B_l) \in W} c_{kl}$$

- Für $B_{ij} < 0$ lohnt es sich, die Variable x_{ij} in die Basis aufzunehmen.
- Analog zum Simplexalgorithmus können wir die NBV mit kleinstem B_{ij} als neue BV wählen.
- Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV, dann ist die Lösung optimal.

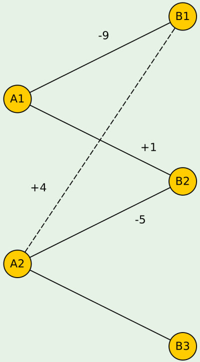
Beispiel zur Berechnung der Schattenpreise

Beispiel 6.10

Mengenänderung für x_{21} in Basislösung von Beispiel 6.6:



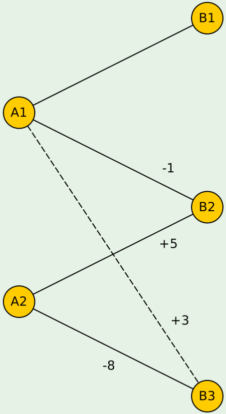
Schattenpreis B_{21} für Variable x_{21}:



$$B_{21} = 4 + 1 - 9 - 5 = -9$$

Fortsetzung Beispiel.

Schattenpreis B_{13} für Variable x_{13}:



$$B_{13} = 3 + 5 - 1 - 8 = -1$$

- Auswahl von x_{21} als neue BV
- entspricht Pivotspalte in primalem Simplex
- bleibt:
  - Pivotzeile?
  - Anpassung?

Anpassung der Basislösung

- Auf einer Kante von A_k nach B_l können wir die Transportmenge um nicht mehr als x_{kl} reduzieren.
- Damit fehlt in Warenhaus B_l eine Kapazität von x_{kl}, die nun von Fabrik k' über die Kante von $x_{k'l}$ geliefert werden muss. usw.
- Für die ausgewählte NBV x_{ij} setzen wir:

$$x_{ij} = \Delta = \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$$

- Eine BV $x_{i'j'}$, für die das Minimum angenommen wird, wird zur NBV.
- Für alle Kanten $(A_k, B_l) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} - \Delta$$

- Für alle Kanten $(B_l, A_k) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} + \Delta$$

- Zielfunktionswert:

$$z = z + \Delta \cdot B_{ij}$$

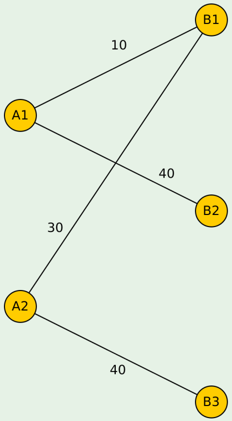
Beispiel 6.11

Für die Basislösung von Beispiel 6.6 und die neue BV x_{21} ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
x_{21} &= \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} \\
&= \min\{40, 30\} = 30 \\
x_{22} &= 30 - 30 = 0 \\
x_{12} &= 10 + 30 = 40 \\
x_{11} &= 40 - 30 = 10 \\
z &= 840 - 30 \cdot 9 = 570
\end{aligned}
$$

x_{22} wird also NBV.

Die neue Basislösung:



Stepping-Stone-Methode

Algorithmus 6.12

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.
2. Suche für alle NBV x_{ij} im zugeordneten bipartiten Graphen den Weg W_{ij} von A_i nach B_j und bestimme damit die Schattenpreise

$$B_{ij} := c_{ij} + \sum_{(B_l, A_k) \in W_{ij}} c_{kl} - \sum_{(A_k, B_l) \in W_{ij}} c_{kl}.$$

3. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP! Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

Fortsetzung Algorithmus.

4. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist eine BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.
5. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**
   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**
   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$
6. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.
   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel zur Stepping-Stone-Methode

- Nach dem Eröffnungsverfahren setzen wir im Tableau wieder die Originalwerte für a_i und b_j ein.
- Dies dient nur der besseren Übersicht, denn die Werte werden im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt.

Beispiel 6.13

Gegeben seien Kosten, Angebot und Nachfrage wie in Beispiel 6.2.
Die Nordwesteckenregel und Beispiel 6.10 liefern:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 40	1 10	3 $\quad -1$	50
A_2	4 $\quad -9$	5 30	8 40	70
	40	40	40	840

Also $i = 2, j = 1$ mit $B_{21} = -9$.

Fortsetzung Beispiel.

W ist (A_2, B_2, A_1, B_1).
$x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$
$i' = 2, j' = 2$

$x_{22} = 0, x_{11} = 10, x_{12} = 40$
$z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

NBV sind jetzt: $\{x_{13}, x_{22}\}$

Weg von A_1 nach B_3: (A_1, B_1, A_2, B_2)
$B_{13} = 3 + 4 - 9 - 8 = -10$
Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_1, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 9 - 4 - 1 = 9$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 10	1 40	3 -10	50
A_2	4 30	5 9	8 40	70
	40	40	40	570

Fortsetzung Beispiel.

Also $i = 1, j = 3$ mit $B_{13} = -10$.
W ist (A_1, B_1, A_2, B_3).
$x_{13} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$
$i' = 1, j' = 1$
$x_{11} = 0, x_{23} = 30, x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$
NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{22}\}$
Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_3, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 8 - 3 - 4 = 10$
Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_3, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 3 - 8 - 1 = -1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 40	3 10	50
A_2	4 40	5 -1	8 30	70
	40	40	40	470

Fortsetzung Beispiel.

Also $i = 2, j = 2$ mit $B_{22} = -1$.
W ist (A_2, B_3, A_1, B_2).
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$
$i' = 2, j' = 3$
$x_{23} = 0, x_{12} = 10, x_{13} = 40, z =$
$470 - 30 \cdot 1 = 440$
NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{23}\}$
Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_2, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 5 - 1 - 4 = 9$
Weg von A_2 nach B_3: (A_2, B_2, A_1, B_3)
$B_{23} = 8 + 1 - 5 - 3 = 1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 10	3 40	50
A_2	4 40	5 30	8 1	70
	40	40	40	440

Dies ist die optimale Lösung!

Vergleich zum Simplexalgorithmus

Beispiel 6.14

Wir stellen für die Basislösung von Beispiel 6.6 das Simplextableau auf.
Hierzu drücken wir die BVs $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$ durch die NBVs x_{13}, x_{21} aus.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 40 \\ \Rightarrow \quad x_{11} &= 40 - x_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 50 \\ \Rightarrow \quad x_{12} &= 50 - x_{11} - x_{13} \\ \Rightarrow \quad x_{12} &= 50 - (40 - x_{21}) - x_{13} \\ \Rightarrow \quad x_{12} &= 10 + x_{21} - x_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} &= 40 \\ \Rightarrow \quad x_{23} &= 40 - x_{13} \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\begin{aligned} & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\ \Rightarrow \quad & x_{22} = 70 - x_{23} - x_{21} \\ \Rightarrow \quad & x_{22} = 70 - (40 - x_{13}) - x_{21} \\ \Rightarrow \quad & x_{22} = 30 + x_{13} - x_{21} \end{aligned}$$

Wir setzen die Gleichungen in die Zielfunktion ein:

$$\begin{aligned} & 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8_{23} \\ = \quad & 9(40 - x_{21}) + (10 + x_{21} - x_{13}) + 3x_{13} + 4x_{21} \\ & \qquad + 5(30 + x_{13} - x_{21}) + 8(40 - x_{13}) \\ = \quad & 360 - 9x_{21} + 10 + x_{21} - x_{13} + 3x_{13} + 4x_{21} \\ & \qquad + 150 + 5x_{13} - 5x_{21} + 320 - 8x_{13} \\ = \quad & 840 - x_{13} - 9x_{21} \end{aligned}$$

Also lautet die Zielfunktion $\quad z = \min 840 - x_{13} - 9x_{21}$

bzw. $\quad -z = \max -840 + x_{13} + 9x_{21}$

Fortsetzung Beispiel.

Damit können wir das Starttableau aufstellen:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
x_{11}	1	0	0	1	0	0	40
x_{12}	0	1	1	-1	0	0	10
x_{22}	0	0	-1	1	1	0	30
x_{23}	0	0	1	0	0	1	40
$-z$	0	0	-1	-9	0	0	-840

Man beachte: Die Schattenpreise in der Zielfunktionszeile sind identisch mit den Schattenpreisen aus den Beispielen 6.10 und 6.13.

Im weiteren Verlauf: Basislösungen, Zielfunktionswerte und Schattenpreise ebenfalls identisch zu Beispiel 6.13.

Duales Problem

Lemma 6.15

Das zum Transportproblem duale Problem lautet:

$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

und

$$u_i, v_j \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

Anwendung der Dualitätssätze

Es sei $F(\mathbf{x})$ die Zielfunktion des primalen und $D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ des dualen Transportproblems.

- Sind $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ optimal, dann gilt

  $$F(\mathbf{x}) = D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

  siehe Satz 5.23

- $\mathbf{x} = (x_{ij})$ sowie $\mathbf{u} = (u_i)$ und $\mathbf{v} = (v_j)$ sind genau dann optimal, wenn gilt

  $$x_{ij} > 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

  siehe Satz 5.24

Effizienterer Solver durch Ausnutzung der Dualität

Gegeben sei eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$:

- Finde Belegung der Variablen u_i und v_j, so dass gilt:

$$x_{ij} \text{ ist BV } \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

- Wenn außerdem $u_i + v_j \leq c_{ij}$ für alle NBV gilt, dann ist die Basislösung optimal.
- Ansonsten wähle NBV x_{ij} mit dem kleinsten (negativen) Wert für

$$B_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

  und tausche sie gegen eine BV aus.
  Diese Gleichung folgt aus Satz 5.25.

Wie werden die u_i und v_j bestimmt?

- Ausgehend von einer Basislösung $\mathbf{x}$ stellt man das LGS

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$

  auf.
- Anzahl der Variablen: $n + m$
  Anzahl der Gleichungen: $n + m - 1$
- Setze eine Variable auf 0, z.B. $u_1 = 0$.
  Löse die restlichen Gleichungen sukzessive.
- Die Basislösung bildet einen Baum. Das LGS kann also entlang der Kanten des Baumes gelöst werden.

Beispiel 6.16

Wir bestimmen u_i und v_j für die Basis von Beispiel 6.6. Das LGS lautet:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_2 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Wir setzen $u_1 = 0$. Damit folgt:

$$v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = 4, v_3 = 4$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} B_{13} &= 3 - 0 - 4 = -1 \\ B_{21} &= 4 - 4 - 9 = -9 \end{aligned}$$

Dies sind genau die Schattenpreise aus den Beispielen 6.10, 6.13 und 6.14.

Die u-v-Methode

Algorithmus 6.17

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.
2. Setze $u_1 = 0$ und löse damit das LGS

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$

3. Berechne für alle NBV x_{ij}: $B_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j$
4. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP! Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

Fortsetzung Algorithmus.

5. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist die BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.
6. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**
   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**
   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$
7. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.
   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel für die u-v-Methode

Beispiel 6.18

Wir setzen einfach Beispiel 6.16 fort.

$i = 2, j = 1$

$W = (A_2, B_2, A_1, B_1), x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$

$x_{22} = 0, x_{11} = 10, x_{12} = 40, z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

BVs: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}$

LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = -5, v_3 = 13$

Schattenpreise:

$B_{13} = 3 - 0 - 13 = -10$

$B_{22} = 5 - (-5) - 1 = 9$

Fortsetzung Beispiel.

$i = 1, j = 3$
$W = (A_1, B_1, A_2, B_3)$
$x_{13} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$
$x_{11} = 0, x_{23} = 30, x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$
BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 5, v_1 = -1$
Schattenpreise:
$B_{11} = 9 - 0 - (-1) = 10$
$B_{22} = 5 - 5 - 1 = -1$

Fortsetzung Beispiel.

$i = 2, j = 2$
$W = (A_2, B_3, A_1, B_2)$
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$
$x_{23} = 0, x_{12} = 10, x_{13} = 40, z = 470 - 30 \cdot 1 = 440$
BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_2 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 4, v_1 = 0$
Schattenpreise:
$B_{11} = 9 - 0 - 0 = 9$
$B_{23} = 8 - 4 - 3 = 1$

Damit ist die aktuelle Basislösung optimal!

Zuordnungsproblem

Definition 6.19

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

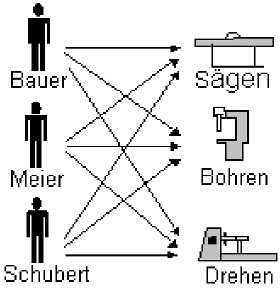
und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Zuordnungsproblem.

Bemerkungen:

- Man beachte: Keine Stetigkeit für die Entscheidungsvariablen x_{ij}
- Ein Optimierungsproblem, bei dem die Entscheidungsvariablen nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen, heißt kombinatorisches Optimierungsproblem.



Zuordnungsproblem als Transportproblem

- Das Zuordnungsproblem kann als Spezialfall des Transportproblems betrachtet und z. B. mit der Stepping-Stone-Methode optimal gelöst werden.
- Setze hierzu im Transportproblem $m = n$, sowie $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Damit sind die Nebenbedingungen des Zuordnungsproblems modelliert.
- Die Zielfunktion ist dann für beide Probleme identisch.
- Wegen $x_{ij} \leq \max\{a_i, b_j\}$ folgt aus dem Begrenzungsvektor $x_{ij} \leq 1$. Damit ist $0 \leq x_{ij} \leq 1$ keine zusätzliche Einschränkung gegenüber dem Transportproblem.
- Wir werden im Folgenden zeigen: Falls a_i und b_j ganzzahlig sind, liefert der Simplexalgorithmus für das Transportproblem nur ganzzahlige Lösungen.
- Damit gilt für eine so ermittelte optimale Lösung stets $x_{ij} \in \{0, 1\}$, sie ist also zulässig für das Zuordnungsproblem.
- Größe einer zulässigen Basislösung: $2n - 1$

Ecken des Zuordnungsproblems

Definition 6.20

Ein Zuordnungsproblem mit den Vorzeichenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

statt $x_{ij} \in \{0, 1\}$ heißt relaxiertes Zuordnungproblem.

Beispiel 6.21

Wir betrachten ein relaxiertes Zuordnungproblem mit Kostenmatrix

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Dann sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) \\
&= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{y} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ und} \\
\mathbf{z} &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

optimale Lösungen.
Wegen

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$$

ist aber **z** keine Ecke und würde damit vom Simplexalgorithmus niemals als optimale Lösung ermittelt.

Ganzzahligkeit der Ecken beim Zuordnungsproblem

Satz 6.22

Für jedes relaxierte Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Für ein relaxiertes Zuordnungsproblem der Größe $n \times n$ gilt also

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke } \Rightarrow \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n \times n}$$

Beweis.

Induktion über n.
$n = 1$: $x_{11} = 1$ ist die einzige zulässige und damit optimale Lösung.
$n - 1 \to n$: Es sei $\mathbf{x}$ Ecke eines relaxierten $n \times n$-Zuordnungsproblems.
Fall 1: Es existieren $1 \leq i, j \leq n$ mit $x_{ij} = 1$.
Dann streiche aus dem Zuordnungsproblem Zeile i und Spalte j und aus $\mathbf{x}$ alle entsprechenden Komponenten. Der Restvektor von $\mathbf{x}$ muss dann eine Ecke des $(n-1) \times (n-1)$ Zuordnungsproblems sein, das nach I.V. nur ganzzahlige Ecken hat.

Fortsetzung Beweis.

Fall 2: Es existiert kein i, j mit $x_{ij} = 1$.

Damit folgt $0 \leq x_{ij} < 1$ für alle i, j.

Wegen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ für alle i folgt: Für jedes i gibt es mindestens zwei Variablen $x_{ij} > 0$.

Damit existieren mindestens $2n$ Variablen $x_{ij} > 0$.

Widerspruch, denn eine Ecke $\mathbf{x}$ und damit eine zulässige Basislösung hat nur $2n - 1$ BVs.

Folgerung 6.23

Wir können Zuordnungsprobleme mit dem Simplexalgorithmus optimal lösen.

Konsequenz

Wir können Zuordnungsprobleme lösen, indem wir

- zum relaxierten Problem übergehen und
- das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus lösen.

In der Vorlesung "Kombinatorische Optimierung" untersuchen wir,

- für welche weiteren kombinatorischen Probleme solch ein Vorgehen möglich ist, bzw.
- welche Bedingungen hinreichend für ganzzahlige Ecken sind.

Zusammenfassung

- Transportproblem und Zuordnungsproblem lösen: Stepping-Stone-Methode
- Effizienterer Algorithmus unter Ausnutzung der Dualität: u-v-Methode
- Diese kombinatorischen Methoden sind analog zum Simplexalgorithmus.
- Startecke: Nordwesteckenregel oder Minimale-Kosten-Regel
- ganzzahlige Ecken beim Zuordnungsproblem