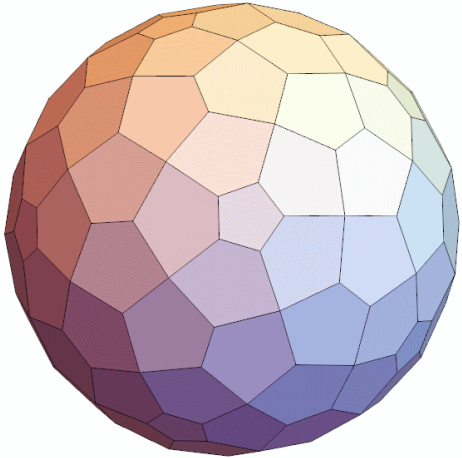
Kapitel 3

Theorie der Linearen Programmierung



Inhalt

3 Theorie der Linearen Programmierung

- Topologie
- Konvexität
- Polyeder
- Basislösungen

Norm

Definition 3.1

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1. für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$
2. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|,$$
3. für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

heißt Norm für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Diskussion Norm

- Eine Norm gibt jedem Vektor eines Vektorraums eine eindeutige Länge.
- Wegen
$$0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} + (-\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$$
folgt, dass diese Länge stets nichtnegativ ist.
- Für Vektorräume wie den $\mathbb{R}^n$ gibt es i. A. mehr als eine Norm.
- Welche Norm in der Praxis verwendet wird, hängt von den Anforderungen an den Begriff der Länge ab.

Bekannte Normen für den $\mathbb{R}^n$

- Euklidische Norm:

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Summennorm:

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

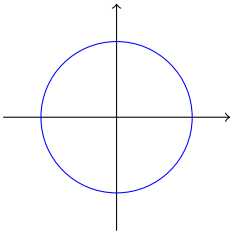
- Maximumsnorm:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

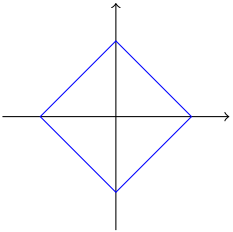
- P-Norm:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

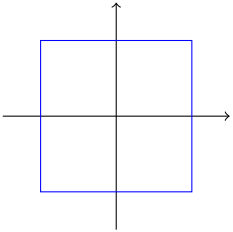
Veranschaulichung der Normen



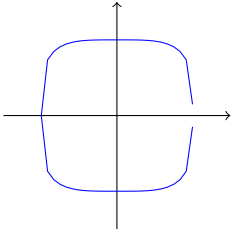
$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\|_1$



$\|\cdot\|_\infty$



$\|\cdot\|_{p=4}$

Normäquivalenz

Definition 3.2

Zwei in einem Vektorraum V definierte Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, wenn es zwei Zahlen $a, A > 0$ gibt, mit

$$a\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq A\|\mathbf{x}\|_1$$

für alle $\mathbf{x} \in V$.

Beispiel 3.3

Wir zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Einerseits gilt:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq n \cdot \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty^2$$

Beispiel 3.4

woraus folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \\
&= \sqrt{\left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2} \\
&= \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} \\
&\leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\
&= \|\mathbf{x}\|_2.
\end{aligned}$$

Fakt 3.5

Für den $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Bemerkung: Dies liegt daran, dass der $\mathbb{R}^n$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Fazit:

- Für den $\mathbb{R}^n$ ist es i. d. R. unerheblich, welche Norm wir genau betrachten.
- Wir schreiben daher in den meisten Fällen einfach $\|\cdot\|$, geben also keine spezifische Norm an.

ϵ-Umgebung

Definition 3.6

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$U_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

ϵ-Umgebung von $\mathbf{x}$.

Bemerkungen:

- Welche Norm $\| \, \|$ genau verwendet wird, spielt hier keine Rolle.
- $U_\epsilon(\mathbf{x})$ bildet anschaulich eine *n*-dimensionale (offene) Kugel mit Radius ϵ um $\mathbf{x}$.

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 3.7

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen gdw. gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in M \, \exists \epsilon > 0 \, : \, U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M.$$

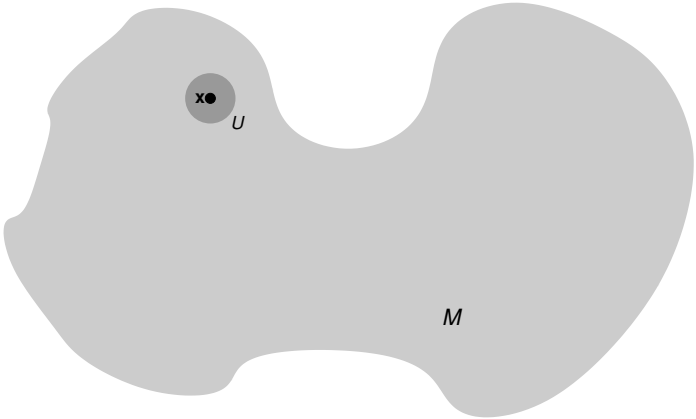
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement

$$M^C := \mathbb{R}^n \setminus M$$

von M offen ist.

Anschauliche Interpretation einer offenen Menge

Um jedes Element $\mathbf{x} \in M$ einer offenen Menge M kann man immer eine (eventuell sehr kleine) n-dimensionale Kugel $U_\epsilon(\mathbf{x})$ legen, die vollständig in M liegt.



Beispiel 3.8

Die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 < 5\}$ ist offen.
Begründung: Mit $\mathbf{a}^T = (1, 2, -3)$ ist M darstellbar als

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{a}^T\mathbf{x} < 5\}.$$

Wähle für ein beliebiges $\mathbf{x} \in M$

$$\epsilon = \frac{5 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|} > 0.$$

Zu zeigen: $\mathbf{y} \in U_\epsilon(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{a}^T\mathbf{y} < 5$.

Fortsetzung Beispiel.

Sei $\mathbf{y} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{y} &= \mathbf{a}^T(\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})) \\ &= \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{a}^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &\leq \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &< \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \|\mathbf{a}\|\epsilon \\ &= \mathbf{a}^T\mathbf{x} + (5 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Damit ist die Menge $M^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5\}$ abgeschlossen.

Bemerkungen

- Offen ist nicht das Gegenteil von abgeschlossen. Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.
  Beispiel: $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$
- $\emptyset$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.
- $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Schnitt von abgeschlossenen Mengen

Lemma 3.9

Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

Beweis.

Tafel ✎.

Bemerkungen:

- Lemma 3.9 gilt auch für abzählbar unendlich viele abgeschlossene Mengen.
- Gilt eine analoge Aussage auch für offene Mengen?

Lemma 3.10

Jede Nebenbedingung und jede Vorzeichenbedingung eines linearen Programms definiert eine abgeschlossene Menge.

Beweis.

- Für $\geq$-Nebenbedingungen analog zu Beispiel 3.8 mit

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} < b_i\}.$$

- Für $\leq$-Nebenbedingungen analog mit $>$ statt $<$.
- Für $=$-Bedingungen: Darstellbar als Schnitt von $\leq$- und $\geq$-Bedingungen und damit wieder abgeschlossen (siehe Lemma 3.9).
- Für Vorzeichenbeschränkung der Variablen x_i:

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{e}^{i\,T} \mathbf{x} < 0\}.$$

□

Konsequenzen für die Menge der zulässigen Lösungen

Folgerung 3.11

Für jedes lineare Programm LP ist die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen abgeschlossen.

Beweis.

- Jede Vorzeichenbedingung $x_i \geq 0$ definiert eine abgeschlossene Menge.
- Jede Nebenbedingung, sowohl in $\leq$-, $=$- oder $\geq$-Form, definiert eine abgeschlossene Menge.
- $\mathcal{X}_{LP}$ ist somit der Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Mengen.
- Mit Lemma 3.9 folgt die Aussage.

Inneres, Rand und Äußeres einer Menge

Definition 3.12

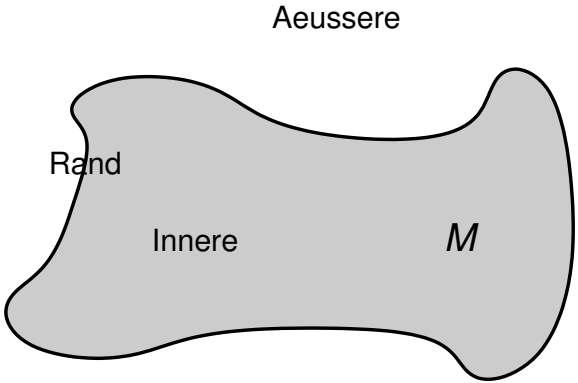
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt von M gdw. ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M$.
- M° bezeichnet die Menge der inneren Punkte von M (das Innere von M).
- $\mathbf{x}$ ist ein äußerer Punkt, gdw. $\mathbf{x}$ innerer Punkt von M^C ist. Die Menge der äußeren Punkte von M ist das Äußere von M.
- $\mathbf{x}$ heißt Randpunkt von M gdw. für alle $\epsilon > 0$ gilt: $U_\epsilon(\mathbf{x})$ enthält
  - ein $\mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} \notin M$ und
  - ein $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z} \in M$.

  ∂M bezeichnet die Menge der Randpunkte und heißt Rand von M.
- $\overline{M} := M \cup \partial M$ bildet den Abschluss von M.

Für jede Menge M kann der $\mathbb{R}^n$ disjunkt zerlegt werden in

- das Innere,
- das Äußere und
- den Rand von M.



Lemma 3.13

- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann offen, wenn* $M = M^\circ$ *gilt.*
- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $M = \overline{M}$ *gilt.*
- $(M^C)^\circ = (\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = (\overline{M})^C$
- $\overline{M^C} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus M} = \mathbb{R}^n \setminus M^\circ = (M^\circ)^C$

Lemma 3.14

Es sei $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *der Zielfunktionsvektor eines linearen Programms LP. Dann gilt*

$$\mathcal{X}_{LP}^{*} \cap \mathcal{X}_{LP}^{\circ} = \emptyset$$

d. h., optimale Lösungen können nicht im Inneren von $\mathcal{X}_{LP}$ *auftreten.*

Folgerung 3.15

$$\mathcal{X}_{LP}^{*} \subseteq \partial \mathcal{X}_{LP}$$

Beweis.

O. B. d. A. sei LP ein Maximumproblem.

Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{LP}^{\circ}$, d. h. es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{X}_{LP}$.

Wähle $\alpha := \frac{\epsilon}{2\|\mathbf{c}\|} > 0$. Damit gilt $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \alpha\mathbf{c} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$ und damit $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_{LP}$.

Es ergibt sich

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}^T\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\|\mathbf{c}\|_2^2.$$

Wegen $\alpha\|\mathbf{c}\|_2^2 > 0$ folgt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} > \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Damit kann $\mathbf{x}$ keine optimale Lösung sein.

Beschränkte und kompakte Mengen

Definition 3.16

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- M heißt beschränkt, wenn ein $\beta \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|\mathbf{x}\| \leq \beta$ für alle $\mathbf{x} \in M$.
- M heißt kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel 3.17

Der offene Einheitskreis $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ ist beschränkt, denn es gilt $\|\mathbf{x}\|_2 < 1$ für alle $\mathbf{x} \in M$. Da M offen ist, handelt es sich aber nicht um eine kompakte Menge.

Der abgeschlossene Einheitskreis $\overline{M}$ ist dagegen kompakt.

Bemerkung: Wenn der zulässige Bereich $\mathcal{X}_{LP}$ eines linearen Programms LP beschränkt ist, dann ist er auch kompakt.

Existenz von Extremwerten

Satz 3.18 (Weierstraß)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge und es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- *Ist M kompakt, dann ist die Funktion f auf M beschränkt und es existieren Minimum und Maximum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach unten beschränkt, dann existiert das Minimum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach oben beschränkt, dann existiert das Maximum für f.*

Beispiel 3.19

Es sei $M = [-1, 5] \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Das Minimum liegt bei $\frac{3}{2}$, das Maximum bei 5.
Für das offene Intervall $M = (-1, 5)$ existiert für f dagegen nur das Minimum.

Es sei $M = (2, 7) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = 2x - 3$. Dann existieren weder Minimum noch Maximum.
Für $M = (-\infty, 5]$ existiert das Maximum, aber kein Minumum.

Konsequenz für lineare Programme

Folgerung 3.20

(i) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und beschränkt, dann existiert eine optimale Lösung.*

(ii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und die Zielfunktion auf auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben beschränkt, dann existiert für Maximierungsprobleme eine optimale Lösung.*

(iii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und die Zielfunktion auf auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach unten beschränkt, dann existiert für Minimierungsprobleme eine optimale Lösung.*

- für (i) vgl. Folie 26, Fälle (a) und (b)
- für (ii) vgl. Folie 26, Fälle (c) und (d)

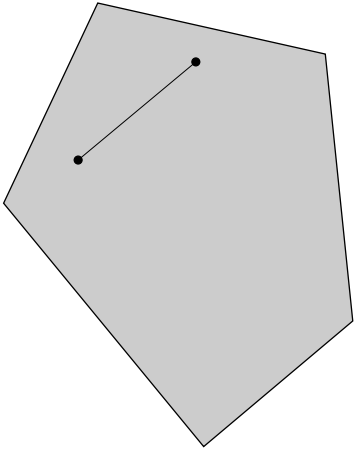
Konvexität

Definition 3.21

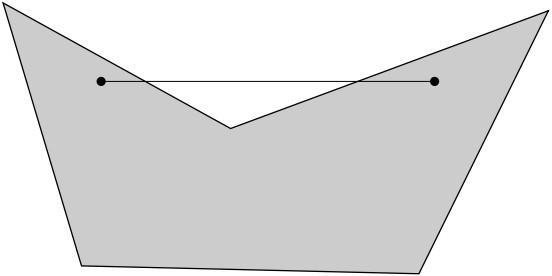
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex gdw. für je zwei Punkte Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M.$$

Konvexe Menge

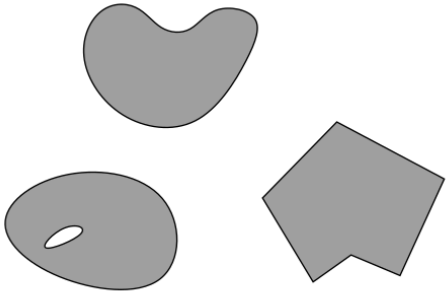


konvexe Menge

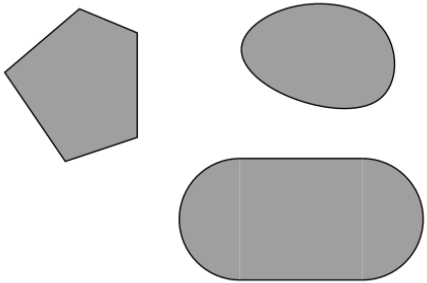


nicht konvexe Menge

Konvexe Menge



nonconvex



convex

Schnitt konvexer Mengen

Lemma 3.22

Der Schnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.

Beweis.

Es seien $M_1, \ldots, M_n$ konvexe Mengen und es gelte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Dann gilt für ein beliebiges $\lambda \in [0, 1]$:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, wegen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, weil alle M_i konvex.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$.
- Also ist die Menge $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ konvex.

Konvexkombination

Definition 3.23

Es seien $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ seien nichtnegative reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

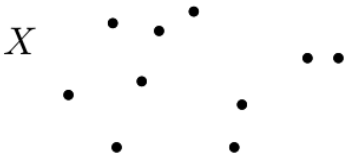
- Dann heißt $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}$ Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.
- Gilt sogar $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$, so heißt $\mathbf{x}$ echte Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.

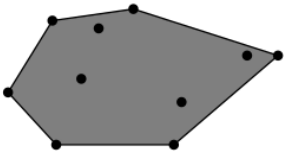
Konvexe Hülle

Definition 3.24

Die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält, d.h.

$$\text{conv}(M) = \bigcap_{\substack{M \subseteq K \\ K \text{ konvex}}} K$$





the convex hull of X

Konvexe Hülle = Menge aller Konvexkombinationen

Lemma 3.25

Die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ ist gleich der konvexen Hülle dieser Punkte, d. h.

$$\operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}^{(i)} \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Beweis.

"$\supseteq$": Induktion über r.

$r = 1$: offensichtlich.

$r = 2$: Folgt direkt aus der Konvexität der konvexen Hülle.

$r - 1 \to r$: Sei $r \geq 3$ und

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \lambda_r \mathbf{x}^{(r)}$$

eine Konvexkombination.

Fortsetzung Beweis.

Gilt $\lambda_r = 1$, dann folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$, damit $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(r)}$ und somit $\mathbf{x} \in \text{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.
Gilt $\lambda_r < 1$, dann definieren wir

$$\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_r} \text{ für } i = 1, \ldots, r-1.$$

Damit ist

$$\mathbf{x}' = \lambda_1' \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \lambda_{r-1}' \mathbf{x}^{(r-1)}$$

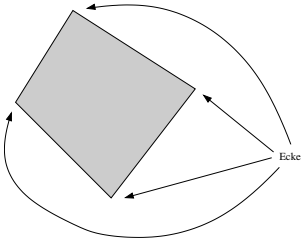
eine Konvexkombination. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $\mathbf{x}' \in \text{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.
Wegen $\mathbf{x} = (1 - \lambda_r)\mathbf{x}' + \lambda_r \mathbf{x}^{(r)}$ folgt wiederum $\mathbf{x} \in \text{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.

"$\subseteq$": Es genügt zu zeigen, dass die Menge der Konvexkombinationen selbst konvex ist. Tafel ✎.

Ecke

Definition 3.26

Es $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.
Ein Punkt $\mathbf{z} \in M$ heißt Ecke (oder auch Extremalpunkt) von M, wenn sich $\mathbf{z}$ nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ darstellen lässt.



Frage: Wie viele Ecken hat ein abgeschlossener/offener Kreis?

Äquivalente Eckencharakterisierung

Lemma 3.27

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $\mathbf{x} \in M$.

Dann gilt:

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke von } M \iff M \setminus \{\mathbf{x}\} \text{ ist konvex.}$$

Interpretation: Die Ecken von M sind genau die Punkte von M, die man herausnehmen kann, ohne die Konvexität zu verlieren.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Hyperebene und Halbraum

Definition 3.28

Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$$

Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Mengen

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq c\}$$

bzw.

$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c\}$$

heißen zu H gehöriger positiver Halbraum bzw. negativer Halbraum.

Unterraum

Fakt 3.29

Hyperebenen sind affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $n-1$.

Definition 3.30

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Unterraum, wenn U (mit den Verknüpfungen des $\mathbb{R}^n$) selbst wieder ein Vektorraum ist.

Satz 3.31

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$
2. *Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ gilt: $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.*
3. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in U$ gilt: $\alpha\mathbf{v} \in U$.*

Affiner Unterraum

Definition 3.32

Es sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt eine Menge der Form

$$\mathbf{v} + U := \{\mathbf{v} + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}$$

affiner Unterraum.

Bemerkungen zu affinen Unterräumen

- Ein affiner Unterraum ist ein Unterraum, der um den Vektor $\mathbf{v}$ verschoben ist.
- Im $\mathbb{R}^3$ sind Geraden oder Ebenen affine Unterräume der Dimension 1 bzw. 2.
  Wenn die Geraden bzw. Ebenen durch den Ursprung gehen, sind es Unterräume.
- Die Dimension eines affinen Unterraums $\mathbf{v} + U$ ist die Dimension von U.
- $U = \{\mathbf{0}\}$ ist ein Unterraum der Dimension 0.
  Dementsprechend ist für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\{\mathbf{v}\}$ ein affiner Unterraum der Dimension 0.
- Gelegentlich wird auch $\emptyset$ als affiner Unterraum betrachtet, mit der Dimension -1.

Konvexität von Hyperbenen und Halbräumen

Lemma 3.33

Hyperebenen und Halbräume sind konvexe Mengen.

Beweis.

Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ und $\lambda \in [0,1]$, jeweils beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{y} \\ &= \lambda c + (1-\lambda)c \\ &= c \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in H$$

also ist H konvex.
Analog beweist man die Konvexität von H^+ und H^-. □

Konvexität und LP-Lösungen

Folgerung 3.34

Es gilt:

- *Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung zulässigen Lösungen ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}^*_{LP}$ der optimalen Lösungen eines LP ist konvex.*

Beweis.

Folgt aus Lemma 3.22, Lemma 3.33 und der Linearität der Zielfunktion. □

Polytop und Polyeder

Definition 3.35

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lässt, heißt konvexes Polyeder.

Ein beschränktes konvexes Polyeder ist ein konvexes Polytop.

Folgerung 3.36

Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist ein konvexes Polyeder.

Dimension von Polyedern

Definition 3.37

Die Dimension eines konvexen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste Dimension eines affinen Unterraums U mit $P \subseteq U$.

Satz 3.38

Die Dimension eines konvexen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ergibt sich durch das größte d, für das $d+1$ Vektoren

$$\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(d)} \in P$$

existieren, so dass die Vektoren

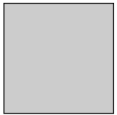
$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(d)} - \mathbf{x}^{(0)}$$

linear unabhängig sind.

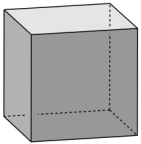
Beispiele für Polyeder in verschiedenen Dimensionen

- Der n-dimensionale Würfel $[-1, 1]^n$.

$n = 1$



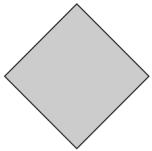
$n = 2$



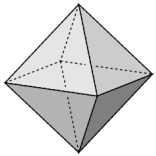
$n = 3$

- Das n-dimensionale Kreuzpolytop $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq 1\}$.

$n = 1$



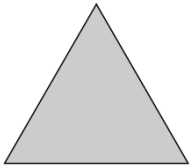
$n = 2$



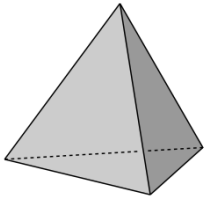
$n = 3$

- Das n-dimensionale Simplex $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, x_1, \ldots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}$.

$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Ecke eines Polyeders

Satz 3.39

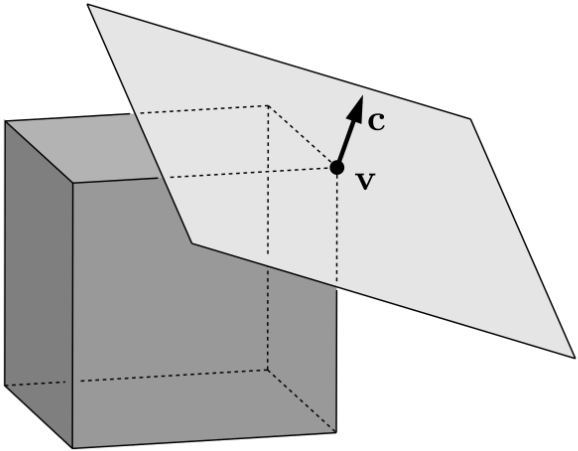
Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polyeder.

Ein Punkt $\mathbf{v} \in P$ ist genau dann Ecke von P, wenn ein Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass gilt:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{v} > \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in P \setminus \mathbf{v}.$$

Bemerkungen:

- Die Hyperebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}\}$ tangiert P in $\mathbf{v}$.
- Für die lineare Funktion $f(x) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ist $\mathbf{v}$ eine eindeutige Maximalstelle auf P.



$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}$$

n-dimensionale Seiten von Polyedern

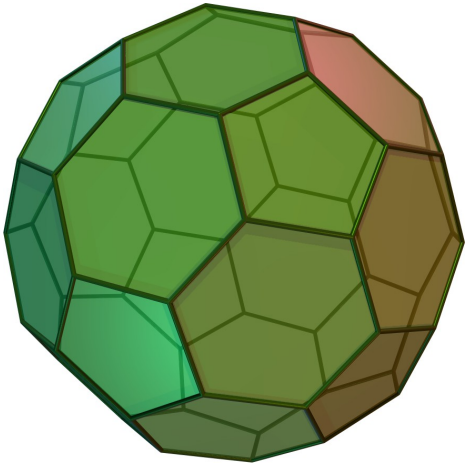
Definition 3.40

Es sei P ein konvexes Polyeder.

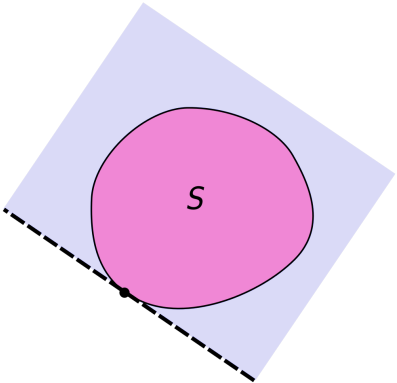
Eine Menge $F \subseteq P$ heißt k-dimensionale Seite (face) von P, wenn

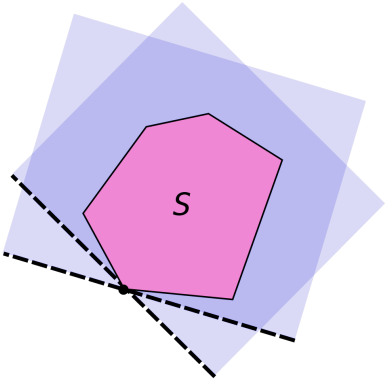
- F die Dimension k hat,
- ein Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ existiert mit
  - $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ für alle $\mathbf{x} \in F$ und
  - $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < z$ für alle $\mathbf{x} \in P \setminus F$.

Die Ebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z\}$ heißt dann Stützhyperbene (supporting hyperplane) von P.



Stützhyperebene





Bemerkungen zu n-dimensionalen Seiten

- Seiten sind auch wieder Polyeder.
- Eine Ecke ist eine Seite mit Dimension 0.
- Eine Kante ist eine Seite der Dimension 1.
- Eine Seite, die nicht als Teilmenge in einer anderen Seite enthalten ist, heißt Facette.

Kompakte konvexe Mengen haben Ecken

Satz 3.41

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und konvex.

Dann hat M mindestens eine Ecke.

Beweis.

- Wir betrachten die Funktion $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$.
- $\| \ \|_2$ ist eine stetige Funktion, M ist kompakt.
- Mit dem Satz von Weierstraß (siehe 3.18) folgt, dass das Maximum für $\| \ \|_2$ auf M existiert. Sei $\mathbf{x}^*$ eine Maximumsstelle.

Annahme: $\mathbf{x}^*$ ist keine Ecke, d. h. es existieren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ mit $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$ und $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*$. □

Fortsetzung Beweis.

- Es folgt $\mathbf{x}^* = \mathbf{z} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}^* &= \left(\mathbf{z}^T + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{z})^T\right)\left(\mathbf{z} + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{z})\right) \\ &= \mathbf{z}^T\mathbf{z} + \mathbf{z}^T(\mathbf{y}-\mathbf{z}) + \frac{1}{4}(\mathbf{y}-\mathbf{z})^T(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\ &= \|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y}-\mathbf{z}). \end{aligned}$$

- Weil $\mathbf{x}^*$ Maximumsstelle folgt auch

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}^* = \|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y}-\mathbf{z}).$$

Daraus folgt $0 \leq \frac{1}{4}\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y}-\mathbf{z})$ und somit

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_2^2 \geq 4\mathbf{z}^T(\mathbf{z}-\mathbf{y}).$$

Fortsetzung Beweis.

- Es gilt aber auch $\mathbf{x}^* = \mathbf{y} + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{y})$ und analog zur Vorseite zeigt man damit

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \geq -4\mathbf{y}^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}).$$

- Addition der Ungleichungen ergibt

$$2\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \geq 4(\mathbf{z} - \mathbf{y})^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = 4\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

- Aus der Ungleichung folgt $\mathbf{z} = \mathbf{y} = \mathbf{x}^*$. Widerspruch!

Ecken und optimale Lösungen

Satz 3.42

Gegeben sei ein LP als Maximumproblem mit $\mathcal{X}_{LP} \neq \emptyset$.

(i) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ beschränkt, so nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$ an.*

(ii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ unbeschränkt, aber die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben beschränkt, so nimmt $F(\mathbf{x})$ das Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$ an.*

(iii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ unbeschränkt und $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben unbeschränkt, so hat das LP keine Lösung.*

vgl. Folie 26

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Beweis von (i).

- Gemäß Folgerung 3.20 existiert eine optimale Lösung. Sei z^* der zugehörige Zielfunktionswert.
- $\mathcal{X}_{LP}^*$ ist als Teilmenge von $\mathcal{X}_{LP}$ ebenfalls beschränkt, außerdem konvex (Folgerung 3.34) und nichtleer.
- Wir können $\mathcal{X}_{LP}^*$ darstellen als $\mathcal{X}_{LP}^* = \mathcal{X}_{LP} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z^*\}$.
  Beide Mengen der rechten Seite sind abgeschlossen und somit auch $\mathcal{X}_{LP}^*$ (Folgerung 3.11 und Lemma 3.9).
- Nach Satz 3.41 hat $\mathcal{X}_{LP}^*$ eine Ecke $\mathbf{x}^*$.
- $\mathbf{x}^*$ ist nun auch eine Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$. Begründung:
  - Gilt $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$, dann folgt $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}_{LP}^*$, ansonsten wäre $\mathbf{x}^*$ nicht optimal.
  - In $\mathcal{X}_{LP}^*$ folgt aus $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$ aber $\mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{x}^*$ (weil dort Ecke).

□

Basis

Definition 3.43

Gegeben sei ein LP in der Normalform mit m als Rang der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ heißt Basislösung gdw. $n - m$ Komponenten x_i gleich Null und die zu den restlichen Variablen gehörenden Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ linear unabhängig sind.
- Eine Basislösung, die zulässig ist ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), heißt zulässige Basislösung.
- Die m linear unabhängigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ einer (zulässigen) Basislösung heißen Basisvektoren, die zugehörigen Variablen x_j Basisvariablen (BV).
- Alle übrigen Spaltenvektoren heißen Nichtbasisvektoren, die zugehörigen Variablen Nichtbasisvariablen (NBV).
- Die Menge aller Basisvariablen x_j einer Basislösung bezeichnet man als Basis.

Algebraische Charakterisierung von Ecken

Satz 3.44

x *ist genau dann eine zulässige Basislösung eines LP, wenn* **x** *Ecke von* $\mathcal{X}_{LP}$ *ist.*

Beweis.

"$\Rightarrow$": Es sei **x** eine zulässige Basislösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dann gibt es m linear unabhängige Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_m}$ von **A** mit

$$x_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

Annahme: **x** ist keine Ecke von $\mathcal{X}$. Dann existieren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ und ein $0 < \lambda < 1$, so dass gilt

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$$

Fortsetzung Beweis.

Aus $\mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \lambda > 0, (1-\lambda) > 0$ und $x_j = 0$ für $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ folgt $y_j, z_j = 0$ für $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$.
Andererseits gilt $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$, also $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ und damit sowohl

$$y_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + y_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

als auch

$$z_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + z_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

Es folgt

$$(y_{i_1} - z_{i_1})\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + (y_{i_m} - z_{i_m})\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{0}$$

Da die $\mathbf{a}^{i_k}$ linear unabhängig sind, folgt $y_{i_k} = z_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, m$ und damit $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.
Widerspruch!

Fortsetzung Beweis.

"$\Leftarrow$": Es sei $\mathbf{x}$ Ecke von $\mathcal{X}$. Für den trivialen Fall $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und wir können m linear unabhängige Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ auswählen. $\mathbf{x}$ ist damit eine zulässige Basislösung.
Es sei also $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit

$$\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \mathbf{a}^{i_j} = \mathbf{b}$$

und $x_{i_j} > 0$.
Annahme: Die Vektoren $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_k}$ sind linear abhängig. Dann gäbe es eine nicht triviale Linearkombination

$$y_1 \mathbf{a}^{i_1} + \cdots + y_k \mathbf{a}^{i_k} = \mathbf{0}$$

Für hinreichend kleines ϵ gilt dann

$$\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Fortsetzung Beweis.

Damit sind die Vektoren $\mathbf{x} \pm \epsilon\mathbf{y}$ zulässig und es folgt

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y})$$

Dies bedeutet wiederum, dass $\mathbf{x}$ keine Ecke ist. Widerspruch!

Folgerung 3.45

$\mathcal{X}_{LP}$ hat nur endlich viele Ecken.

Ecken-Algorithmus

Algorithmus 3.46

Gegeben sei ein LP in Normalform mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Für $N := \binom{n}{m}$ seien $B_1, B_2, \ldots, B_N$ die m-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Für eine Menge $B_k = \{j_1, \ldots, j_m\}$ bezeiche $\mathbf{A}_{B_k} = (\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Matrix, die aus den Spaltenvektoren j_1 bis j_m von $\mathbf{A}$ besteht.

Der Vektor $\mathbf{x}_{B_k}$ ist der entsprechende Variablenvektor dessen Komponenten einen Index aus B_k haben.

Fortsetzung Algorithmus 3.46.

1. $k := 1, z^* := -\infty$
2. Erzeuge $B_k, \mathbf{A}_{B_k}$ und $\mathbf{x}_{B_k}$.
3. Falls $r(\mathbf{A}_{B_k}) < m$ dann weiter mit 6.
4. Löse das LGS $\mathbf{A}_{B_k}\mathbf{x}_{B_k} = \mathbf{b}$. Es sei $\mathbf{x}$ die Basislösung zur Lösung dieses LGS. Falls $\mathbf{x}$ nicht zulässig ist, weiter mit 6.
5. Falls $\mathbf{c}^T\mathbf{x} > z^*$, setze $z^* := \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}$.
6. $k := k + 1$. Falls $k \leq N$ gehe zu 2, sonst STOP!

Bemerkungen zum Ecken-Algorithmus

- Wenn χ_{LP} nichtleer und beschränkt ist, dann liefert der Ecken-Algorithmus eine Lösung $\mathbf{x}^*$ mit Zielfunktionswert z^*.
- Die Bestimmung des Rang von $\mathbf{A}_{B_k}$ in Schritt 3 und die Lösung des LGS in Schritt 4 kann mit dem Gaußschen Algorithmus oder der Cramer-Regel erfolgen.
- Der Algorithmus hat keine praktische Bedeutung und ist nur für kleine n und m durchführbar.

Beispiel zum Eckenalgorithmus

Beispiel 3.47

Wir greifen das Beispiel mit dem Eisverkäufer (Beispiel 1.2 bzw. 1.5) wieder auf.
Maximiere $z = F(\mathbf{x}) = 30x_1 + 25x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Man beachte: Die redundante Nebenbedingung $x_1 \leq 6$ wurde weggelassen.

Fortsetzung Beispiel 3.47.

Man erhält $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene Spaltenmengen für die Matrix $\mathbf{A}$:

$$B_1 = \{1,2,3\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ ergibt } x_3 < 0$$

$$B_2 = \{1,2,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 255$

$$B_3 = \{1,2,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel 3.47.

$$B_4 = \{1,3,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

$$B_5 = \{1,3,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 180$

$$B_6 = \{1,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_4 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 3.47.

$$B_7 = \{2,3,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 225$

$$B_8 = \{2,3,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{liefert } x_3 < 0$$

$$B_9 = \{2,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{liefert } x_5 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 3.47.

$$B_{10} = \{3,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 0$

Für die Ecke $\begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ wird der maximale Zielfunktionswert

$z = F(\mathbf{x}) = 266\frac{2}{3}$ angenommen.

Entartete Ecken

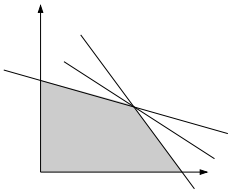
Wenn m der Rang von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist, sind im Normalfall genau m Koordinaten einer Ecke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ positiv, die übrigen Null.

Definition 3.48

Gegeben sei ein LP in Normalform mit Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und es gelte $r(\mathbf{A}) = m$.

Eine Ecke $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{LP}$ heißt entartet (degeneriert) gdw. weniger als m Koordinaten von $\mathbf{x}$ positiv sind.

Bemerkung: Bei entarteten Ecken ist das System der linear unabhängigen Spalten von $\mathbf{A}$ nicht eindeutig bestimmt.



Beispiel zu entarteten Ecken

Beispiel 3.49

Wir untersuchen das LP vom Einsverkäufer (Beispiele 1.2, 1.16 und 3.47), diesmal inklusive der redundanten Nebenbedingung $x_1 \leq 6$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir betrachten die Basis mit der Spaltenindexmenge $\{1, 3, 4, 6\}$. Hierzu gehört das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich

$$x_6 = 9, \quad x_1 = 6, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 4$$

also ist die Ecke $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ entartet.

Fortsetzung Beispiel.

Die gleiche Ecke ergibt sich für die Spaltenindexmenge $\{1, 3, 5, 6\}$ und dem zugehörigen LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Konvexität, Ecken
- Der zulässige Bereich eines LP ist stets abgeschlossen und konvex.
- Wenn es eine optimale Lösung gibt, dann auch stets eine, die eine Ecke ist.
- Ecke $\Leftrightarrow$ zulässige Basislösung
- Berechenbar, aber nicht effizient: Ermittlung aller Ecken bzw. aller zulässigen Basislösungen durch eindeutig lösbare LGS