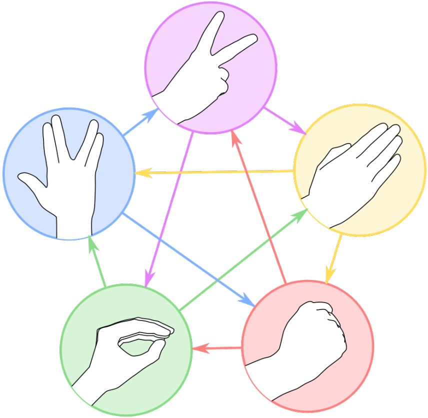
Kapitel 7

Anwendung: Spieltheorie



Inhalt

Colonel-Blotto-Spiel

- Colonel Blotto und sein Gegner kämpfen um drei Gebirgspässe.
- Jedem der beiden stehen fünf Regimente zur Verfügung.
- Derjenige, der mehr Regimente zu einem Gebirgspass schickt, gewinnt diesen.
  Bei gleicher Anzahl gibt es ein Unentschieden.
- Die Schlacht gewinnt derjenige, der mehr Gebirgspässe gewinnt.
  Ein Unentschieden ist auch möglich.

Vorgehen von Colonel Blotto

- Colonel Blotto teilt seine fünf Regimente in drei Gruppen auf.
- Eine Aufteilung in drei Gruppen beschreiben wir durch ein 3-Tupel (r_1, r_2, r_3) mit
  - $r_1 + r_2 + r_3 = 5$ und
  - $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3$.
- Danach wird jeder Gruppe zufällig gleichverteilt ein Gebirgspass zugeordnet.
- Der Gegner geht in gleicher Weise vor.
- Die möglichen Aufteilungen der Regimente bezeichnen wir als Strategien.
- Strategien ✎

Bewertung der Strategien

- Durch die Strategien von Colonel Blotto und seinem Gegner sind Erfolgswahrscheinlichkeiten gegeben.
- Beispiel:
  - Colonel Blotto wählt die Strategie $(1, 2, 2)$ und
  - sein Gegener $(0, 0, 5)$.
  - Erfolgswahrscheinlichkeit für Colonel Blotto $= 1$ und
  - für seinen Gegner $= 0$.
- Weiteres Beispiel: Wählt Colonel Blotto $(0, 2, 3)$, dann beträgt seine Erfolgswahrscheinlichkeit $1/3$, die des Gegners 0. ✎
- Bewertung einer Strategie:

$$\text{Erfolgswahrscheinlichkeit Blotto} - \text{Erfolgswahrscheinlichkeit Gegner}$$

Auszahlungsmatrix (payoff matrix)

Die Auszahlungsmatrix für das Colonel-Blotto-Spiel (aus Sicht von Colonel Blotto):

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & \text{Gegner} & & \\
 & (0,0,5) & (0,1,4) & (0,2,3) & (1,1,3) & (1,2,2) \\
\hline
(0,0,5) & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & -1 \\
(0,1,4) & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\
\text{Blotto } (0,2,3) & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
(1,1,3) & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\
(1,2,2) & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0
\end{array}
$$

Wie sieht die Auszahlungsmatrix aus Sicht des Gegners aus?

Es handelt sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel.

Minimax-Strategie

Welche Strategie soll Colonel Blotto wählen?

- Colonel Blotto kennt nicht die Strategie seines Gegners.
- Sein Gegner könnte einen Spion eingeschleust haben, der die Strategie von Colonel Blotto verrät.

Regel:

☞ Wähle die Strategie, welche den schlechtesten Fall maximiert.
hier: Maximum der Zeilenminima

- Also wählt Colonel Blotto $(0, 2, 3)$.
- Der Gegner verfährt analog: Minimum der Spaltenmaxima.
Also wählt der Gegner ebenfalls $(0, 2, 3)$.

Nash-Gleichgewicht

Die gewählten Strategien bilden ein Nash-Gleichgewicht.

- Sattelpunkt: Zeilenminimum und Spaltenmaximum
- Kein Spieler kann sich durch eine andere Strategiewahl verbessern, wenn der Gegenspieler bei seiner Wahl bleibt.
- Folgerung: Kein Spieler bereut im Nachhinein seine Wahl.

Problem:

- Nicht jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat ein Nash-Gleichgewicht.

Stein-Papier-Schere

Zwei Spieler: Alice und Bob

Auszahlungsmatrix aus Sicht von Alice:

		Bob		
		Stein	Papier	Schere
	Stein	0	-1	1
Alice	Papier	1	0	-1
	Schere	-1	1	0

Fazit für Stein-Papier-Schere

- Stein-Papier-Schere hat kein Nash-Gleichgewicht.
- Es existiert kein Eintrag in der Auszahlungsmatrix, der sowohl Zeilenminimum als auch Spaltenmaximum ist.
- Bei einer Niederlage oder einem Unentschieden hätte eine andere Strategiewahl zu einem besseren Ergebnis geführt.

Konsequenz:

- Wir verzichten auf die feste Auswahl einer Strategie (reine Strategie) und gehen zu gemischten Strategien über.

Gemischte Strategien

- Wir gehen immer von zwei Spielern aus: Alice und Bob.
- Alice stehen m reine Strategien zur Verfügung, Bob n reine Strategien.

Definition 7.1

Eine gemischte Strategie eines Spielers ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Menge seiner reinen Strategien.

Wir stellen eine gemischte Strategie für Alice als Vektor $\mathbf{x}$ dar, mit

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Eine gemischte Strategie für Bob ist eine Vektor $\mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Beispiel 7.2

Bei Stein-Papier-Schere hat Alice drei reine Strategien zur Auswahl. Sei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bedeutung der gemischten Strategie:

- Alice führt ein Zufallsexperiment durch.
- Die Komponenten von $\mathbf{x}$ sind die Wahrscheinlichkeiten für die reinen Strategien Stein, Papier, Schere.
- Alice spielt dann die zufällig ausgewählte reine Strategie.

Erwarteter Gewinn

- Gegeben seien gemischte Strategien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ für Alice bzw. Bob.
- Gegeben sei eine Auszahlungsmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, die den Gewinn von Alice beschreibt.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
E(\text{Gewinn von Alice}) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} P(\text{Alice wählt } i, \text{Bob wählt } j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} P(\text{Alice wählt } i) \cdot P(\text{Bob wählt } j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Beispiel 7.3

Alice spielt die Strategie $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ aus Beispiel 7.2.

Bob spielt $\mathbf{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$
\begin{aligned}
E(\text{Gewinn von Alice}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Bewertung gemischter Strategien

- Alice: maximiere den schlechtesten Fall

$$\beta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y}$$

  Damit beschreibt $\beta(\mathbf{x})$ die Bewertung der Strategie $\mathbf{x}$ von Alice.
- Alice wird dann $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x})$ bilden.
- Bewertung der Strategie $\mathbf{y}$ von Bob:

$$\alpha(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y}$$

- Bob wird dann $\min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$ bilden.
- Als Extremwerte über kompakte, abgeschlossene Mengen sind $\beta(\mathbf{x})$ und $\alpha(\mathbf{y})$ wohldefiniert.

Beispiel 7.4

Alice spielt wieder $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{x}) &= \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} \\
&= \min_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \min_{\mathbf{y}} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Die zugehörige Strategie von Bob ist $\mathbf{y} = (1, 0, 0)$.

Nash-Gleichgewicht für gemischte Strategien

Definition 7.5

Ein Paar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ von gemischten Strategien heißt gemischtes Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Wir werden gleich sehen, dass ein Nash-Gleichgewicht die folgenden Eigenschaften hat:

- $\tilde{\mathbf{x}}$ ist die beste Strategie für Alice, wenn Bob $\tilde{\mathbf{y}}$ wählt und
- $\tilde{\mathbf{y}}$ ist die beste Strategie für Bob, wenn Alice $\tilde{\mathbf{x}}$ wählt.

Beispiel 7.6

Die Strategien

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = (1, 0, 0)$$

bilden kein Nash-Gleichgewicht.

Zwar ist $\mathbf{y}$ die beste Strategie für Bob, wenn Alice $\mathbf{x}$ spielt, aber nicht umgekehrt.

Spielt Bob $\mathbf{y}$, dann ist die beste Strategie für Alice $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$.

Ein Nash-Gleichgewicht bilden die Strategien

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \tilde{\mathbf{y}}.$$

Begründung: ✎

Worst-case-optimale Strategien

Definition 7.7

Eine Strategie $\tilde{\mathbf{x}}$ heißt worst-case-optimal für Alice, wenn

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x})$$

gilt. Analog heißt eine Strategie $\tilde{\mathbf{y}}$, für die

$$\alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$$

gilt, worst-case-optimal für Bob.

- Annahme von Alice: Wenn sie $\mathbf{x}$ wählt, wählt Bob die zu $\mathbf{x}$ ungünstigste Strategie (aus Sicht von Alice).
- Also wählt Alice eine Strategie, die für diesen Worst-Case am besten ist.

Lemma 7.8

1. *Für zwei gemischte Strategien* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *gilt*

$$\beta(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \leq \alpha(\mathbf{y})$$

   und damit auch

$$\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y}).$$

2. *Wenn ein Strategiepaar* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *ein gemischtes Nash-Gleichgewicht bildet, dann sind* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *worst-case-optimal.*
3. *Gilt für die Strategien* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *die Gleichung*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}),$$

   dann bildet das Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.*

Beweis.

1. Es gilt
$$\mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} \le \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} \ge \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} = \beta(\mathbf{x}).$$

2. Für alle $\mathbf{x}$ gilt gemäß (1): $\beta(\mathbf{x}) \le \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$.

   Wegen $\alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \beta(\tilde{\mathbf{x}})$ folgt $\beta(\mathbf{x}) \le \beta(\tilde{\mathbf{x}})$.

   Damit ist ist $\tilde{\mathbf{x}}$ worst-case-optimal.

   Beweis für $\alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ analog.

3. Aus
$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$
   folgt mit (1):
$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$
   Damit bildet das Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ ein Nash-Gleichgewicht.

Minimax-Theorem für Zwei-Personen-Nullsummenspiele

Satz 7.9

Für jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel existieren worst-case-optimale Strategien, die mithilfe eines LPs effzient ermittelt werden können.

Wenn $\tilde{\mathbf{x}}$ *eine worst-case-optimale Strategie für Alice ist und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *eine für Bob, dann ist* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und die Zahl*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

ist identisch für alle worst-case-optimalen Strategien $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$*.*

Definition 7.10

Der Wert $\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}}$, also der erwartete Gewinn für Alice in jedem Nash-Gleichgewicht, heißt der Wert des Spiels.

Folgerung 7.11

Ein Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *bildet genau dann ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, wenn* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *worst-case-optimal sind.*

Beweis.

Folgt aus Satz 7.9 und Lemma 7.8 (2).

Bemerkungen zum Minimax-Theorem

- Wenn Alice eine worst-case-optimale Strategie wählt, ist ihr erwarteter Gewinn mindestens so groß wie der Wert des Spiels, egal wie Bob sich entscheidet.
- Spielt Bob worst-case-optimal, kann Alice aber auch keinen größeren erwarteten Gewinn erzielen.
- Selbst wenn die Strategien dem Gegner bekannt sind, ist keine Verbesserung möglich.
- Konsequenz aus dem Minimax-Theorem:

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y}$$

Beweis des Minimax-Theorems

Beweis von Satz 7.9

Das folgende LP liefert eine beste Strategie für Bob zu einer festen Strategie $\mathbf{x}$ von Alice.

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y} \\ \text{u.d.N.} & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

Der Zielfunktionswert entspricht dann $\beta(\mathbf{x})$.

Um eine worst-case-optimale Strategie für Alice zu finden, müssen wir nun $\beta(\mathbf{x})$ maximieren. Wie?

Das duale LP (Übungsaufgabe) lautet:

$$\begin{array}{ll} \max & x_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Fortsetzung Beweis.

Das duale LP hat nur eine Variable ($x_1, \ldots, x_m$ sind fest). Der optimale Zielfunktionswert des dualen Programms stimmt mit dem des primalen, also $\beta(\mathbf{x})$, überein (Dualitätstheorem).

Um nun $\beta(\mathbf{x})$ über alle gemischten Strategien $\mathbf{x}$ von Alice zu maximieren, definieren wir das folgende LP (*):

$$\begin{array}{ll} \max & x_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Für eine optimale Lösung $(\tilde{x}_0, \tilde{\mathbf{x}})$ dieses LP gilt

$$\tilde{x}_0 = \beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}).$$

Fortsetzung Beweis.

Analog können wir ein LP (**) aufstellen, um die worst-case-optimale Strategie für Bob zu berechnen.

$$\begin{array}{ll} \min & y_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Für eine optimale Lösung $(\tilde{y}_0, \tilde{\mathbf{y}})$ gilt dann

$$\tilde{y}_0 = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y}).$$

Damit sind $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$ worst-case-optimale Strategien. Die beiden LPs (*) und (**) sind dual zueinander (Beweis ist Übungsaufgabe). Damit folgt:

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Eine Stein-Papier-Schere-Variante

Beispiel 7.12

Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen in der Zeit, in der sie keine Geschenke austragen müssen, Stein-Papier-Schere. Allerdings kann der Osterhase mit seiner Pfote nicht die Geste für Schere zeigen, weshalb er stets nur die reinen Strategien Stein oder Papier spielt.

Die Auszahlungsmatrix lautet somit:

		Osterhase	
		Stein	Papier
Weihnachtsmann	Stein	0	-1
	Papier	1	0
	Schere	-1	1

Nash-Gleichgewicht?
Wert des Spiels?

Fortsetzung Beispiel.

Wir analysieren das Spiel mithilfe der LPs aus dem Beweis des Minimax-Theorems.

LP für den Weihnachtsmann:

$$\max x_0$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & x_2 & - & x_3 & - & x_0 & \geq & 0 \\
-x_1 & & & + & x_3 & - & x_0 & \geq & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Optimale Lösung: $(\tilde{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Wie kann man schon an der Auszahlungsmatrix erkennen, dass sich Stein für den Weihnachtsmann nicht lohnt?

Fortsetzung Beispiel.

LP für den Osterhasen:

$$\min y_0$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & -y_2 & - & y_0 & \leq & 0 \\
y_1 & & & - & y_0 & \leq & 0 \\
-y_1 & + & y_2 & - & y_0 & \leq & 0 \\
y_1 & + & y_2 & & & = & 1 \\
 & & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Optimale Lösung: $(\tilde{y}_0, \tilde{\mathbf{y}}) = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Der Weihnachtsmann gewinnt im Mittel $\frac{1}{3}$ = Wert des Spiels.

Noch ein Spiel

Beispiel 7.13

Alice und Bob wählen eine natürliche Zahl zwischen 1 und 6. Anschließend werden die Zahlen verglichen.

- Alice und Bob haben die gleiche Zahl gewählt: unentschieden.
- Die Differenz der Zahlen ist gleich 1: Der Spieler mit der kleineren Zahl erhält 2 € vom anderen Spieler.
- Die Differenz der Zahlen ist mindestens 2: Der Spieler mit der größeren Zahl erhält 1 € vom anderen Spieler.

Auszahlungsmatrix?

Nash-Gleichgewicht?

Wert des Spiels?

Fortsetzung Beispiel.

- Auszahlungsmatrix: ✎ Tafel
  Für die Auszahlungsmatrix gilt: $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^T$.
- LPs: Homepage
- Nash-Gleichgewicht:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}} = \left(0, \frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

  Die Gleichheit der worst-case-optimalen Strategien ist eine Folge der Symmetrie der Auszahlungsmatrix.
- Wert des Spiels: 0

Beispiel 7.14

Bob kennt sich nicht aus in der Spieltheorie und nutzt daher für das Spiel des vorangegangenen Beispiels die gemischte Strategie

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Wie soll Alice spielen, um den erwarteten Gewinn zu maximieren?

Zugehöriges LP?

Wie hoch ist dann der erwartete Gewinn?

Zusammenfassung

- Grundlegende Strategie: Maximiere den schlechtesten Fall
- Nash-Gleichgewicht bei reinen Strategien: Zeilenminimum = Spaltenmaximum
  Problem: Nash-Gleichgewicht muss nicht existieren.
- gemischte Strategie: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die reinen Strategien
- Minimax-Theorem: Jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.
- Berechnung der worst-case-optimalen Strategien (Nash-Gleichgewicht) mithilfe von LPs
- Theoretischer Hintergrund: Dualität

Kombinatorische Optimierung

1. Totale Unimodularität
2. Komplexität
3. Schnittebenenverfahren
4. Branch-and-Bound
5. Branch-and-Cut
6. Heuristiken und Approximation