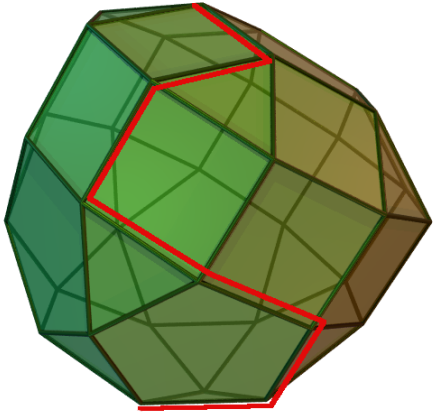
Kapitel 4

Simplexalgorithmus



Inhalt

4 Simplexalgorithmus

- Primaler Simplexalgorithmus
- Unbeschränktheit
- Vermeidung von Zyklen
- Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Grundideen

- Der Simplexalgorithmus ist das Standardverfahren zur Lösung von linearen Programmen.
- von George Bernard Dantzig in den 40ern des 20. Jahrhunderts entwickelt
- Vorgehen: versuche ausgehend von einer Startecke mit einer Ausgangsbasis durch Basisaustausch zu einer Ecke mit besserem Zielfunktionswert fortzuschreiten.
- Da es nur endlich viele Ecken gibt, erhälten wir nach endlich vielen Schritten die optimale Lösung.
- Der Basistausch geschieht dabei so sparsam wie möglich: Es wird stets genau eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht.

Fazit zu Grundideen

Konstruktion einer Folge $(\mathbf{x}^{(r)})$ von Basislösungen mit

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r+1)} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r)}$$

und Abbruch, wenn keine Verbesserung mehr möglich ist.

Beispiel für ein Simplextableau

Beispiel 4.1

Wir bleiben beim Problem des Eisverkäufers (Beispiel 3.47) und ordnen die Daten in einem Simplextableau an:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	1	1	1	0	0	0	10
x_4	5	2	0	1	0	0	30
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	-30	-25	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 4.1.

- Die Strukturvariablen x_1, x_2 sind NBV, die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 sind BV.
- Die Werte der BV ergeben sich aus den Nebenbedingungsgleichungen, die durch die Zeilen des Tableaus repräsentiert werden. Hierdurch ist eine Ecke gegeben.
- Für den Zielfunktionswert $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ wird eine neue Variable z eingeführt und die Gleichung $-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z = 0$ wird wie eine zusätzliche Nebenbedingung aufgefasst. Wir betrachten also eigentlich das Problem:

$$\begin{array}{lrcl} & \max z & & \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z & = & 0 \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

- Letzte Zeile ist Zielfunktionszeile, aufgefasst als Nebenbedingung. Der Zielfunktionswert z steht ganz rechts.

Beispiel für einen Basiswechsel

Beispiel 4.2

Im Tableau von Beispiel 4.1 verspricht x_1 den größeren Zuwachs, x_1-Spalte ist daher die Pivotspalte.

x_1 kann höchstens den Wert $30/5 = 6$ annehmen, x_4 würde dann 0. x_4-Zeile ist daher die Pivotzeile.

Wir nehmen x_1 in die Basis auf, dafür wird x_4 aus der Basis herausgenommen. Dies ist der Basisaustausch.

Pivotspalte und Pivotzeile schneiden sich im Pivotelement, hier $a_{21} = 5$. Wir teilen die Pivotzeile durch das Pivotelement. Damit entsteht

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 6$$

Aus dieser Gleichung folgt $x_1 = 6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$. Dies setzen wir in alle übrigen Gleichungen ein.

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Für die erste Zeile erhalten wir $\left(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4\right) + x_2 + x_3 = 10$. Dies ergibt $\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 4$.

Die dritte Zeile bleibt unverändert, da x_1 dort nicht auftritt.

Die Zielfunktionszeile wird zu $-30(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 25x_2 + z = 0$, also $-13x_2 + 6x_4 + z = 180$.

Jetzt können wir das neue Tableau aufstellen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	0	-13	0	6	0	1	180

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Durch Vertauschen der Spalten für x_1 und x_4 können wir das Tableau wieder in die übliche Form bringen:

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	4
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	6	-13	0	0	0	1	180

Die zugehörige Ecke ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Fortsetzung Beispiel 4.2.

Der nächste Austauschschritt liefert das Tableau:

	x_4	x_3	x_2	x_1	x_5	b_i
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{20}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{10}{3}$
x_5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{7}{3}$
z	$\frac{5}{3}$	$\frac{65}{3}$	0	0	0	$\frac{800}{3}$

Das heißt in der Ecke $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ wird das Optimum mit $z = \frac{800}{3}$ angenommen.

Fazit für Beispiel 4.2

- Wir dividieren also die Pivotzeile durch den Pivotwert.
- Zu den übrigen Zeilen addieren wir ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass in der Pivotspalte Nullen entstehen (analog zum Gaußalgorithmus).
- optionale Spaltenvertauschung, um wieder die reine kanonische Form zu erlangen
- Aus der Spalte **b** und den Basisvariablen ergibt sich die Ecke.
- Solange in der Zielfunktionszeile Koeffezienten < 0 auftreten, ist eine Verbesserung möglich.
- Der Algorithmus terminiert, wenn in der Zielfunktionszeile alle Koeffizienten ≥ 0 sind.

Kanonische Form

- Dieses Vorgehen funktioniert in der gezeigten Weise nur, wenn zu Beginn ein kanonisches Maximumproblem vorliegt, d.h. ein Problem der Form

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ u.d.N. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

  und zusätzlich $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ gilt.
- Fur dieses kanonische Maximumproblem erhalten wir mit Hilfe von m Schlupfvariablen ein Problem in kanonischer Normalform.
- Die erste Basislösung ist dann durch die Schlupfvariablen bestimmt (siehe Beispiel 4.1).
- Wegen $\mathbf{b} \geq 0$ ist diese Basislösung zulässig und stellt damit eine Ecke (die Startecke) dar.

Starttableau für kanonisches Maximumproblem

BV	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	z	$\mathbf{b}$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$\cdots$	1	0	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	1	0

Definition 4.3

Für $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ heißt solch ein Tableau primal zulässig.

Bemerkung: Da sich die Spalte z nie ändert, können wir auf diese Spalte im Tableau auch verzichten.

Primaler Simplexalgorithmus

Algorithmus 4.4

Es liege ein kanonisches Maximumproblem ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) vor mit n Variablen und m Nebenbedingungen, also n Struktur- und m Schlupfvariablen in Normalform.

Start: Ecke des Starttableaus ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit $z = 0$. Schlupfvariablen sind BV, Strukturvariablen sind NBV.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Starttableau:

	x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+s}	$\cdots$	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	$a_{n+1,1}$	$\cdots$	$a_{n+1,t}$	$\cdots$	$a_{n+1,n}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	$a_{s,1}$	$\cdots$	$a_{s,t}$	$\cdots$	$a_{s,n}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{n+m,1}$	$\cdots$	$a_{n+m,t}$	$\cdots$	$a_{n+m,n}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_t$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0

Von hier ab stehen Indices nicht für eine Spalten- oder Zeilennummer, sondern für den Variablenindex in der entsprechenden Spalte- bzw. Zeile des Simplextableaus.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Wahl der Pivotspalte: Ist die Zielfunktionszeile von der Gestalt

z	d_1	$\cdots$	d_t	$\cdots$	d_n	0	$\cdots$	0	d

mit $d_j \geq 0, (j = 1, \ldots, n)$, so liegt eine Optimallösung vor.
Andernfalls machen wir eine Spalte t mit negativem d_t zur Pivotspalte und die NBV x_t zur BV.

Wahl der Pivotzeile: Sind in der Pivotspalte alle $a_{i,t} \leq 0$, so wächst z unbeschränkt, da x_t unbeschränkt wachsen kann. Es gibt dann keine Optimallösung.

Andernfalls bestimmen wir eine Zeile s durch

$$\frac{b_s}{a_{s,t}} = \min_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_{i,t}} \text{ für } a_{i,t} > 0$$

Die NBV x_t wird BV und bekommt den Wert $\frac{b_s}{a_{s,t}}$.
Die bisherige BV x_s wird NBV und nimmt den Wert 0 an.

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Austauschschritt: Das neue Tableau lautet: Linke Hälfte:

	x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_n	
x_1	$a_{1,1} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{1,n} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,n}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_t	$\frac{a_{s,1}}{a_{s,t}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{a_{s,n}}{a_{s,t}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_m	$a_{m,1} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{m,n} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,n}$	
z	$d_1 - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$d_n - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,n}$	

Fortsetzung Algorithmus 4.4.

Rechte Hälfte:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_{n+1} & \cdots & x_s & \cdots & x_{n+m} & b_i \\
\hline
 & 1 & \cdots & -\frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & b_1 - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{1,t} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & \frac{b_s}{a_{s,t}} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & \cdots & -\frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & b_m - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{m,t} \\
\hline
 & 0 & \cdots & -\frac{d_t}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & d - \frac{b_s}{a_{s,t}} d_t
\end{array}
$$

Terminierung: Wenn alle Koeffizienten der Zielfunktionszeile nichtnegative Werte haben, beschreibt das Tableau eine optimale Ecke. Rechts unten steht dann z^*.

Andernfalls vertauschen wir die Spalten, so dass das Tableau wieder kanonische Form annimmt. Wir beginnen nun wieder von vorne.

Eigenschaften des primalen Simplexalgorithmus

Satz 4.5

Das r-te Tableau beim Simplexalgorithmus sei primal zulässig. Wählen wir die Pivotspalte und die Pivotzeile gemäß Algorithmus 4.4, so ist das $(r+1)$-te Tableau wieder primal zulässig, und es gilt $z^{(r+1)} \geq z^{(r)}$.

Beweis.

Wir müssen $b_l^{(r+1)} \geq 0$ für $1 \leq l \leq m$ zeigen. Nach Algorithmus 4.4 ist dies für die Pivotzeile s erfüllt, denn es gilt

$$b_s^{(r+1)} = \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}}$$

und $a_{s,t} > 0$. Wir brauchen uns also nur noch die Zeilen $l \neq s$ anzuschauen.

Fortsetzung Beweis zu Satz 4.5.

Für $l \neq s$ gilt

$$b_l^{(r+1)} = b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t}$$

Hierbei bezeichnet t den Index der Pivotspalte.
Für $a_{l,t} \leq 0$ folgt $b_l^{(r+1)} \geq b_l^{(r)} \geq 0$. Wir müssen also nur noch den Fall $a_{l,t} > 0$ betrachten. Hier gilt nach der Regel zur Wahl der Pivotzeile

$$\frac{b_l^{(r)}}{a_{l,t}} \geq \frac{b_s}{a_{s,t}}$$

$$\Rightarrow \quad b_l^{(r)} \geq \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{l,t}$$

$$\Rightarrow \quad b_l^{(r+1)} = b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t} \geq 0$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 4.5.

Wegen $d_t^{(r)} \leq 0, b_s^{(r)} \geq 0$ und $a_{s,t} > 0$ folgt außerdem

$$z^{(r+1)} = z^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} d_t^{(r)} \geq z^{(r)}.$$

Bemerkung: Der Austauschschritt im primalen Simplexalgorithmus wird als primaler Austauschschritt bezeichnet.

Beispiel zum primalen Simplexalgorithmus

Beispiel 4.6

In einem Betrieb sind drei Maschinen vorhanden, die für die Herstellung zweier Produkte benötigt werden. Bei der Produktion müssen die Produkte auf mehreren Maschinen bearbeitet werden, wobei die folgenden Bearbeitungszeiten anfallen:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 480 Minuten. Der Ertrag pro Einheit beträgt 10 € für Produkt A und 40 € für Produkt B.

Welche Anzahl der Produkte ist täglich zu fertigen, so dass der Ertrag maximal wird?

Fortsetzung Beispiel 4.6.

Mathematische Modellierung:

x_1 produzierte Menge von Produkt A
x_2 produzierte Menge von Produkt B

LP:

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, x_2) = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 40x_1 + 24x_2 &\leq 480 \\ 24x_1 + 48x_2 &\leq 480 \\ 60x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 4.6.

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	24	1	0	0	0	480
x_4	24	48	0	1	0	0	480
x_5	0	60	0	0	1	0	480
z	-10	-40	0	0	0	1	0

2. Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	0	1	0	$-2/5$	0	288
x_4	24	0	0	1	$-4/5$	0	96
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	-10	0	0	0	$2/3$	1	320

Fortsetzung Beispiel 4.6.

3.Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360

Also ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine optimale Lösung.

Opportunitätskosten und Schattenpreise

Das Endtableau von Beispiel 4.6 entspricht dem LGS:

$$\begin{array}{rrrrrrr} x_3 & -\frac{5}{3}x_4 & +\frac{14}{15}x_5 & & = & 128 \\ x_1 & +\frac{1}{24}x_4 & -\frac{1}{30}x_5 & & = & 4 \\ x_2 & & +\frac{1}{60}x_5 & & = & 8 \\ & \frac{5}{12}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & +z & = & 360 \end{array}$$

Aufgelöst nach den Basisvariablen entsteht

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 128 & +\frac{5}{3}x_4 & -\frac{14}{15}x_5 \\ x_1 & = & 4 & -\frac{1}{24}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 \\ x_2 & = & 8 & & -\frac{1}{60}x_5 \\ z & = & 360 & -\frac{5}{12}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 \end{array}$$

- Maschine 2 ($x_4 = 0$) und Maschine 3 ($x_5 = 0$) sind voll ausgelastet,
- dagegen steht Maschine 1 pro Tag $x_3 = 128$ Minuten still.
- Der Gewinn würde sich um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € pro Maschinenminute bei Maschine 2 bzw. 3 verringern,
- bzw. um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € erhöhen, wenn eine Maschinenminute mehr zur Verfügung stehen würde.
- Diese Werte nennen wir Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise.
- Sie entsprechen dem entgangenen Gewinn durch die nicht mehr verfügbare Kapazität
- bzw. den Preisen, die der Hersteller bereit wäre, für eine Maschinenminute von Maschine 2 bzw. 3 zu zahlen.

Unbeschränkte LPs

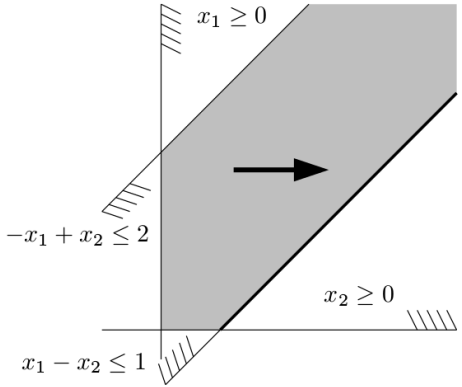
Beispiel 4.7

Wir betrachten das folgende LP:

$$\max x_1$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Fortsetzung Beispiel.

Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	1	-1	1	0	1
x_4	-1	1	0	1	2
z	-1	0	0	0	0

Tableau nach einer Iteration:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	1	-1	1	0	1
x_4	0	0	1	1	3
z	0	-1	1	0	1

In der x_2-Spalte ist kein Eintrag positiv, daher kann das für den Simplexalgorithmus erforderliche Minimum nicht gebildet werden.

Fortsetzung Beispiel.

Andere Sichtweise: Minimum $= \infty$, d. h. x_2 kann beliebig groß werden.
Dies sehen wir auch am zugehörigen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 3 \\ \hline & & -x_2 & + & x_3 & & & + & z & = & 1 \end{array}$$

Der Zielfunktionswert z ist damit unbeschränkt, das LP hat keine Lösung.

Genauer: Für ein beliebig großes $t \geq 0$ erhalten wir eine zulässige Lösung, wenn wir $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_1 = 1 + t$ und $x_4 = 3$ setzen.

Dies entspricht dem Strahl:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

Fazit zu unbeschränkten LPs

- Ein LP mit nicht leerem zulässigen Bereich ist genau dann unbeschränkt, wenn während des Simplexalgorithmus eine Pivotspalte keine positiven Werte hat.
- Aus dem Tableau kann dann ein Strahl kontruiert werden, der zulässig ist und auf dem die Zielfunktion nicht beschränkt ist.

Entartete Ecken

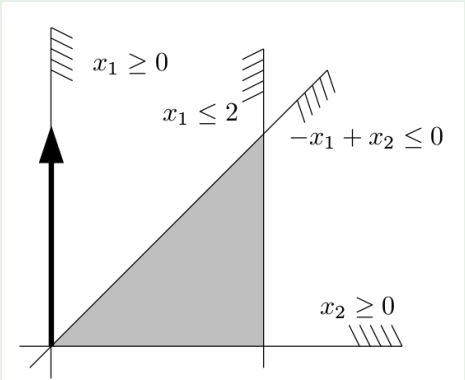
Beispiel 4.8

Wir betrachten das folgende LP:

$$\max x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Fortsetzung Beispiel.

Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	-1	1	1	0	0
x_4	1	0	0	1	2
z	0	-1	0	0	0

Pivotspalte ist x_2, Pivotzeile ist x_3, neue Basisvariable $x_2 = 0$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_2	-1	1	1	0	0
x_4	1	0	0	1	2
z	-1	0	1	0	0

Beide Tableaus entsprechen der Ecke $(0, 0, 0, 2)$, aber mit unterschiedlichen Basen.

Fortsetzung Beispiel.

Das nächste Tableau liefert die optimale Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_2	0	1	1	1	2
x_1	1	0	0	1	2
z	0	0	1	1	2

Fazit:

- Evtl. kein Übergang zu einer anderen Ecke, sondern nur zu einer anderen Basis.
- Dabei keine Verbesserung des Zielfunktionswertes.

Zyklen im Simplexalgorithmus

- Bisher haben wir nicht spezifiziert, welche Spalte beim primalen Simplexalgorithmus Pivotspalte werden soll.
- Eine übliche Wahl für die Pivotspalte s:

$$-c_s = \min\{c_j | c_j < 0\}$$

- Bei entarteten Basislösungen ist damit aber nicht garantiert, dass der Simplexalgorithmus terminiert.
- Prinzipiell möglich, wenn auch unwahrscheinlich: Es treten zyklisch immer wieder die gleichen zulässigen Basislösungen auf.

Beispiel 4.9

$$\max z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rrrrcl} 0.5x_1 & -5.5x_2 & -2.5x_3 & +9x_4 & \leq & 0 \\ 0.5x_1 & -1.5x_2 & -0.5x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & & & & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	**b**
x_5	0.5	−5.5	−2.5	9	1	0	0	0	0
x_6	0.5	−1.5	−0.5	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	1
z	−10	57	9	24	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 4.9.

Für Starttableau: Pivotspalte: x_1, Pivotzeile: x_5
Daraus können nun die nachfolgenden Basislösungen entstehen: Tafel ✎

- $BV^{(2)} = \{x_1, x_6, x_7\}$, Pivotspalte: x_2, Pivotzeile: x_6
- $BV^{(3)} = \{x_1, x_2, x_7\}$, Pivotspalte: x_3, Pivotzeile: x_1
- $BV^{(4)} = \{x_2, x_3, x_7\}$, Pivotspalte: x_4, Pivotzeile: x_2
- $BV^{(5)} = \{x_3, x_4, x_7\}$, Pivotspalte: x_5, Pivotzeile: x_5
- $BV^{(6)} = \{x_4, x_5, x_7\}$, Pivotspalte: x_6, Pivotzeile: x_4
- $BV^{(7)} = \{x_5, x_6, x_7\}$

Damit haben wir jetzt wieder das gleiche Tableau wie zu Beginn. Der Simplexalgorithmus würde nicht terminieren.
Alle Basislösungen beschreiben die gleiche Ecke!

Maßnahmen zur Vermeidung von Zyklen

Maßnahmen sind nur dann notwendig, wenn wir nicht zu einer neuen Ecke kommen.

- Protokollierung der Indexmenge der Basisvariablen.
  Tritt die gleiche Basislösung wieder auf, führen wir ein Backtracking durch, d.h. wählen eine andere Möglichkeit für die Pivotzeile oder -spalte.
- Die Bland'sche Anti-Zyklusregel garantiert Zyklenfreiheit:
  Wähle bei jedem Basiswechsel für die Pivotspalte und die Pivotzeile den jeweils kleinstmöglichen Index.

Beispiel 4.10 (Bland'sche Antizyklusregel)

Das 6-te Tableau von Beispiel 4.9 lautet:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	0
x_4	0.5	-1.5	-0.5	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	1
z	-22	93	21	0	0	-24	0	1	0

Statt x_6 wählen wir x_1 als Pivotspalte und damit x_4 als Pivotzeile. Dann lautet das neue Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	0	-4	-2	8	1	-1	0	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0	0
x_7	0	3	1	-2	0	-2	1	0	1
z	0	27	-1	44	0	20	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 4.10.

Damit haben zwar keine neue Ecke, aber eine neue Basislösung. Nun wird x_3 die Pivotspalte und x_7 die Pivotzeile. Es entsteht:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	0	2	0	4	1	-5	2	0	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	0	1
z	0	30	0	42	0	18	1	1	1

und damit ist das LP gelöst.

Lösung allgemeiner linearer Programme

Bisher: Für Anwendung des Simplexalgorithmus muss eine primal (oder eine dual zulässige) Basislösung vorliegen.

Für allgemeine lineare Programme können wir dies direkt nicht gewährleisten.

Im Folgenden: Wir leiten nun eine Methode her, mit der zu jedem LP, dass eine optimale Lösung hat, eine solche berechnet werden kann.

Allgemeine Form

Wir gehen von einem LP mit n Variablen und m Nebenbedingungen aus. Die Zielfunktion habe die Gestalt

$$\text{min oder max} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

und Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für einige oder alle } j = 1, \ldots, n.$$

Anforderungen für primalen Simplex

- zu maximierende Zielfunktion
- nur Gleichheitsbedingungen
- Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen
- ein nichtnegativer Vektor auf der rechten Seite
- ein primal zulässiges Ausgangstableau in kanonischer Form, d.h. mit m Einheitsvektoren, die eine Basis bilden

Zielfunktion, rechte Seite, Vorzeichenbeschränkung

(1) Falls eine zu minimierende Zielfunktion vorliegt, multipliziere diese mit -1 und maximiere $-z$.

(2) Multipliziere alle Gleichungen und Ungleichungen der Nebenbedingungen mit $b_i < 0$ mit dem Faktor -1.

(3) Ersetze jede nicht vorzeichenbeschränkte Variable x_j durch zwei vorzeichenbeschränkte Variablen $x'_j \geq 0$ und $x''_j \geq 0$ mit $x_j = x'_j - x''_j$.

Damit hat das lineare Programm die Gestalt:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m_1 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \text{für } i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i \quad \text{für } i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m_1 + m_2 + m_3
\end{aligned}$$

wobei $b_i \geq 0$ gilt und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Bemerkungen:

- n ist die Anzahl der Variablen nach Schritt (1) bis (3).
- m_1, m_2, m_3 bezeichnet dabei die Anzahl der $\leq$-, $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.
- $m := m_1 + m_2 + m_3$

Erzeuge Normalform

(4) Wandle jede $\leq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

(5) Wandle jede $\geq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

Alle Schlupfvariablen x_{n+i} sind vorzeichenbeschränkt, also $x_{n+i} \geq 0$. Jetzt haben wir Normalform, aber keine kanonische Normalform und damit noch kein primal zulässiges Tableau.

Künstliche Variablen

(6) Addiere zu jeder ursprünglichen (nach Schritt (3)) $\geq$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + y_k = b_i$$

(7) Addiere zu jeder ursprünglichen $=$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_k = b_i$$

Jetzt haben wir ein Simplextableau in kanonischer Form mit der Basislösung

- $x_{m+i} = b_i$
  für die x_{m+i} von ursprünglichen $\leq$-Nebenbedingungen und
- $y_k = b_k$
  für die ursprünglichen $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.

Problem: Nur wenn für alle künstlichen Variablen $y_k = 0$ gilt, ist dieses LP äquivalent zum ursprünglichen LP.

Zweite Zielfunktion

(8) Bilde aus den künstlichen Variablen die zusätzliche Zielfunktion

$$\min Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} y_k$$

Entsteht bei der Minimierung $Y = 0$, dann wird die Erweiterung nivelliert und wir haben eine zulässige Basislösung.

(9) Multipliziere die zusätzliche Zielfunktion mit dem Faktor -1, um eine Maximierung zu erhalten.

$$\max y = -Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} -y_k$$

(10) Löse alle Gleichungen mit künstlichen Variablen nach diesen auf

$$y_k = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{m+i} \right)$$

bzw.

$$y_k = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

und ersetze sie in der zweiten Zielfunktion durch die gewonnenen Ausdrücke.
Dieser Schritt dient dazu, die Koeffizienten der y_k in der Zielfunktionszeile zu 0 werden zu lassen, damit ein primal zulässiges Tableau vorliegt.

Insgesamt haben wir jetzt ein primal zulässiges Simplextableau vorliegen.

Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Algorithmus 4.11

Bearbeite das durch die Schritte (1) bis (10) aufgestellte Tableau in zwei Phasen:

1. Eröffnungsphase
   Maximiere die Zielfunktion $y = -Y$ mit Hilfe des primalen Simplexalgorithmus.
   Transformiere dabei die ursprüngliche Zielfunktion z stets mit.
   - Gilt für das Optimum $y < 0$, dann existiert keine zulässige Lösung für das ursprüngliche LP.
   - Gilt $y = 0$, dann streiche die Zeile mit der zweiten Zielfunktion und die künstlichen Variablen und fahre mit Phase 2 fort.
2. Optimierungsphase
   Maximiere die erste Zielfunktion mit dem primalen Simplex-Algorithmus.

Bemerkung

- In der Eröffnungsphase nähert man sich schrittweise einer Ecke der Menge $\mathcal{X}$ der zulässigen Lösungen.
- In der Optimierungsphase bestimmt man ausgehend von der gefundenen Ecke aus der Eröffnungsphase eine optimale Lösung des LP.

Beispiel: Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Beispiel 4.12

Wir betrachten das folgende LP:

$$\min Z = -x_1 - 2x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & \text{(II)} \\ x_1 & - & x_2 & = & -3 & \text{(III)} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

(1)

$$\max z = -Z = x_1 + 2x_2$$

Fortsetzung Beispiel.

(2) Wir multiplizieren (III) mit -1 und erhalten die neue Gleichung (III):

$$-x_1 + x_2 = 3$$

(3) entfällt, alle Variablen sind vorzeichenbeschränkt

(4,5) Wir führen für (I) und (II) Schlupfvariablen ein:

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 & \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & = & 2 & \text{(II)} \end{array}$$

(6,7) Künstliche Variablen für (II) und (III):

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & + & y_1 & = & 2 & \text{(II)} \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & y_2 & = & 3 & \text{(III)} \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

(8) Zusätzliche Zielfunktion:

$$\min Y = y_1 + y_2$$

(9) Optimierungsrichtung der zusätzlichen Zielfunktion herumdrehen:

$$\max y = -Y = -y_1 - y_2$$

(10) Wir lösen (II) und (III) nach y_1 bzw. y_2 auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & = & 2 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ y_2 & = & 3 & + & x_1 & - & x_2 & & \end{array}$$

und setzen die Terme der rechten Seiten in die Zielfunktion ein. Hierdurch entsteht

$$y = -5 + x_1 + 2x_2 - x_4$$

Fortsetzung Beispiel.

Damit können wir das 1. Tableau für die Eröffnungsphase aufstellen:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
x_3	1	1	1	0	0	0	8
y_1	2	1	0	-1	1	0	2
y_2	-1	1	0	0	0	1	3
z	-1	-2	0	0	0	0	0
y	-1	-2	0	1	0	0	-5

Wir maximieren y und wählen dazu x_2 als Pivotspalte. Damit ist y_1 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
x_3	-1	0	1	1	-1	0	6
x_2	2	1	0	-1	1	0	2
y_2	-3	0	0	1	-1	1	1
z	3	0	0	-2	2	0	4
y	3	0	0	-1	2	0	-1

Man beachte, dass auch die Zeile für die ursprüngliche Zielfunktion angepasst wurde.
Jetzt bleibt nur x_4 als Pivotspalte, dann ist y_2 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

3. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
x_3	2	0	1	0	0	-1	5
x_2	-1	1	0	0	0	1	3
x_4	-3	0	0	1	-1	1	1
z	-3	0	0	0	0	2	6
y	0	0	0	0	1	1	0

Damit ist die Eröffnungsphase abgeschlossen und wir haben mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Startecke für die Optimierungsphase.

Fortsetzung Beispiel.

Wir streichen die künstlichen Variablen und die zusätzliche Zielfunktionszeile und erhalten damit das 1. Tableau der Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	2	0	1	0	5
x_2	-1	1	0	0	3
x_4	-3	0	0	1	1
z	-3	0	0	0	6

Es liegt noch keine optimale Lösung vor.
Pivotspalte wird x_1, Pivotzeile x_3.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	1/2	0	5/2
x_2	0	1	1/2	0	11/2
x_4	0	0	3/2	1	17/2
z	0	0	3/2	0	27/2

Damit terminiert der Zweiphasen-Simplexalgorithmus.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ ist eine optimale Lösung des originären LP,

mit Zielfunktionswert $Z = -\frac{27}{2}$.

Zusammenfassung

- Primaler Simplexalgorithmus für LPs in kanonischer Maximumsform.
- Start mit zulässiger Basislösung bzw. Ecke, pro Iteration ein Basisaustausch.
- Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise bewerten die knappen Ressourcen.
- Vermeidung von Zyklen z.B. mit der Bland'schen Anti-Zyklusregel.
- Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus zur Lösung allgemeiner linearer Programme.