Lineare Optimierung

Theorie, Algorithmen und Anwendungen

Prof. Dr. Peter Becker

Fachbereich Informatik
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

Wintersemester 2021/22

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Allgemeines zur Vorlesung

Homepage:

`http://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/linopt/`

Die Vorlesung wird überwiegend folienbasiert gehalten.

Folien sind knapp gehalten (Definition, Satz, Beweis, Beispiel).

Die Folien zur Vorlesung (Skript) stehen auf der Homepage vor der Vorlesung zur Verfügung.

Übungen

In die Veranstaltung integriert. Wir werden die Zeit flexibel zwischen Vorlesung und Übung aufteilen.

Wöchentlich erscheint ein Aufgabenblatt mit Punkten, das

- eine Sollpunktzahl hat,
- in Zweiergruppen bearbeitet werden kann,
- in der folgenden Woche vor den Übungen abgegeben werden muss,
- in den Übungen besprochen wird und
- von mir bewertet wird.

Heute: Ausgabe des ersten Aufgabenblatts!

Zu erfüllende Vorleistung: $\geq$ 50% der gesamten Sollpunktzahl.

Wer die Vorleistung nicht erfüllt, wird nicht zur Prüfung zugelassen!

Lernziele

- Algorithmen zur Lösung linearer Optimierungsprobleme kennen, anwenden und in Grundzügen implementieren können,
- Eigenschaften der Algorithmen wissen, mathematisch beschreiben und beweisen können,
- in der Lage sein, praktische Problemstellungen in ein geeignetes mathematisches Modell überführen zu können und
- solch ein Modell unter Einsatz von Softwarewerkzeugen lösen können.

Inhalt

Organisatorisches und Formales

Inhaltliche Voraussetzungen:

- Mathematik aus dem Bachelor, insbesondere Lineare Algebra und Graphentheorie
- Datenstrukturen und Algorithmen
- Theoretische Informatik

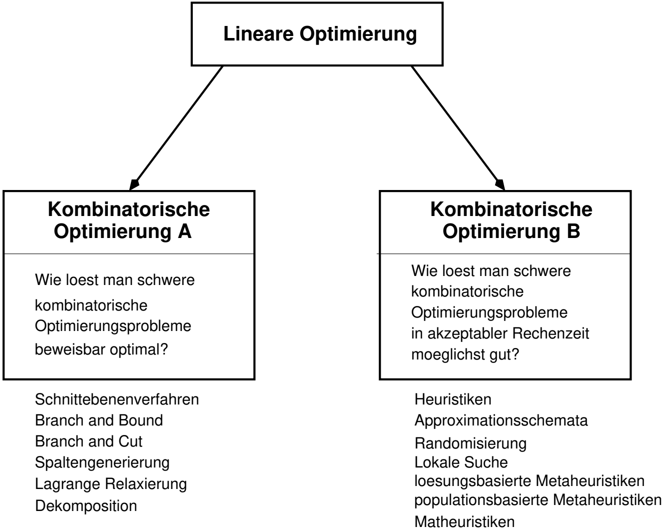
Umfang: 2V + 2Ü

Übungen/Vorleistung: $\geq$ 50% der Sollpunkte aus den Übungen

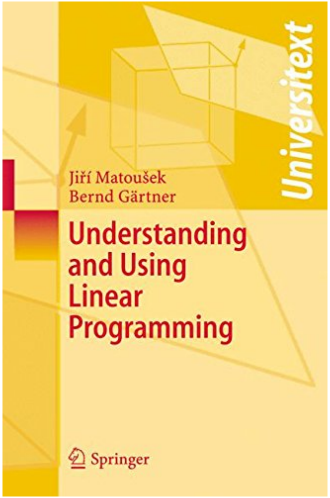
Prüfungsform: mündlich

Softwarewerkzeuge: GNU Linear Programming Kit, Gurobi

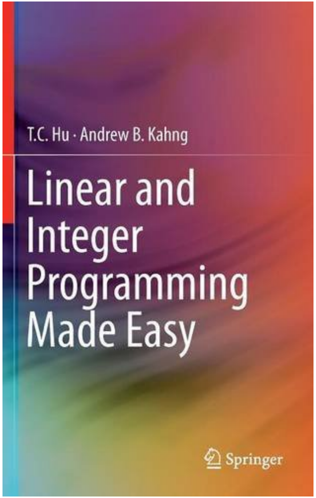
Aufbau der Masterkurse: Lineare und Kombinatorische Optimierung



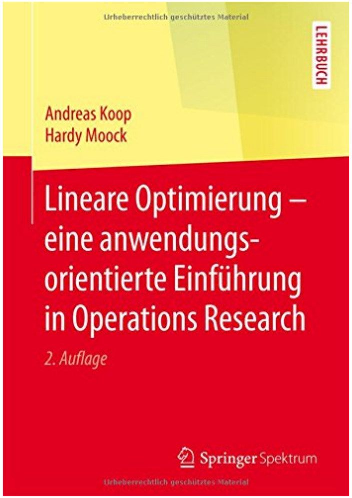
Literatur



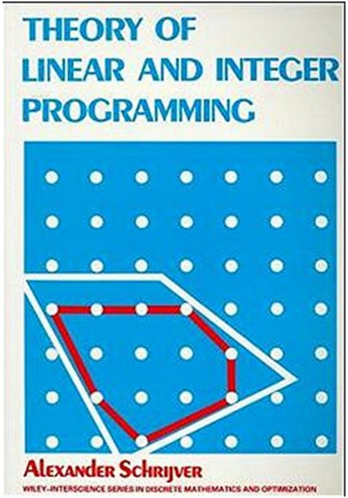
- Primärquelle
- Leitlinie:
  "Was jeder theoretische Informatiker über die Lineare Programmierung wissen sollte."
- knapp und präzise
- behandelt ebenfalls die ganzzahlige lineare Programmierung
- leider nicht als PDF in der Bibliothek verfügbar



- noch etwas knapper, aber immer noch präzise
- als PDF in der Bibliothek verfügbar



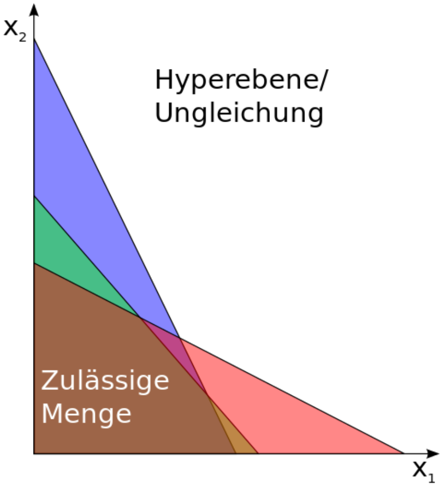
- anwendungsorientiert
- präzise, aber nicht umfassend bei den Beweisen
- als PDF in der Bibliothek verfügbar



- Klassiker zum Thema lineare und ganzzahlige Programmierung
- umfassender und tiefgehender
- weniger eingängig

Kapitel 1

Einführung und Beispiele



Inhalt

Notationen für K-Vektorraum

Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\in V$ und den Skalaren $\in K$ schreiben wir die Vektoren mit fettgedruckten lateinischen Kleinbuchstaben, z.B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j) \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Skalare nutzen wir üblicherweise griechische Kleinbuchstaben in Normalschrift, z.B.

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Vektoren teilweise auch zeilenorientiert, also $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Den Nullvektor bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$. Demgegenüber bezeichnet 0 das neutrale Element des Körpers.

In den meisten nachfolgenden Fällen verzichten wir auf die Verwendung des Multiplikationssymbols $\cdot$, sowohl bei der Multiplikation im Körper als auch bei der Multiplikation mit Skalaren. D. h.

$$\begin{aligned} \lambda\mu &:= \lambda \cdot \mu \\ \lambda\mathbf{v} &:= \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

für $\lambda, \mu \in K, \mathbf{v} \in V$.

☞ Wir bewegen uns im Folgenden ausschließlich im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Notationen für Matrizen

Die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zur Darstellung solcher Matrizen nutzen wir i. d. R. fette lateinische Großbuchstaben, z. B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Eine Nullmatrix stellen wir ebenfalls durch $\mathbf{0}$ dar. Aus dem Kontext ergibt sich, ob damit ein Nullvektor oder eine Nullmatrix gemeint ist.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$.

Einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir auch als einspaltige Matrix $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auffassen.

Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ können wir dann auch als Matrixprodukt $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ schreiben.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet

- $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ (Kleinbuchstabe mit tiefgestelltem Index) den i-ten Zeilenvektor und
- $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$ (Kleinbuchstabe mit hochgestelltem Index) den j-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$.

Also:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} .$$

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ mit $\mathbf{e}^i = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ und

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Die Matrix

$$\mathbf{E} := (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet die Einheitsmatrix.

Lineares Programm

Definition 1.1

Es seien $b_i, c_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

Ein lineares Programm (LP) ist die Aufgabe, eine lineare Zielfunktion

$$z = F(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

für Entscheidungsvariablen $x_j \in \mathbb{R}$ zu maximieren oder zu minimieren unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen der Form

$$\begin{array}{rcll} a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i & (i = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & \geq & b_i & (i = m_2 + 1, \ldots, m) \end{array}$$

und meist auch von Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel 1.2

Ein Eisverkäufer stellt stündlich bis zu 10 kg Eis der Sorten A bzw. B her.

	A	B
Verkaufspreis	80 EUR/kg	65 EUR/kg
Kosten	50 EUR/kg	40 EUR/kg
Energieaufwand	5 kWh/kg	2 kWh/kg
absetzbar	6 kg	9 kg

Es stehen höchstens 30 kWh stündlich zur Verfügung.

Entscheidungsvariablen seien die stündlich herzustellenden Mengen x_1 kg bzw. x_2 kg.

Zu maximieren sei die Differenz aus Preis und Kosten.

Modellierung für Beispiel 1.2

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 80x_1 + 65x_2 - 50x_1 - 40x_2 = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

Noch ein Beispiel-LP

Beispiel 1.3

Maximiere

$$x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Zulässige und optimale Lösung

Definition 1.4

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Vorzeichenbedingungen erfüllt, heißt zulässige Lösung eines LP.

Mit $\mathcal{X}_{LP}$ bezeichnen wir die Menge der zulässigen Lösungen, auch zulässiger Bereich genannt, eines linearen Programms LP.

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ heißt optimale Lösung eines LP, wenn es keine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ mit besserem Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x}^*)$ gibt.

$F(\mathbf{x}^*)$ heißt dann optimaler Zielfunktionswert oder kurz Maximum bzw. Minimum.

$\mathcal{X}_{LP}^*$ bezeichnet die Menge der optimalen Lösungen von LP.

Bemerkung: Wenn aus dem Kontext heraus das lineare Programm eindeutig ist, schreiben wir auch $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^*$ statt $\mathcal{X}_{LP}$ bzw. $\mathcal{X}_{LP}^*$.

Grafische Lösung linearer Programme

Wir betrachten zwei Entscheidungsvariablen x_1 und x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

ist die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \text{ und } a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

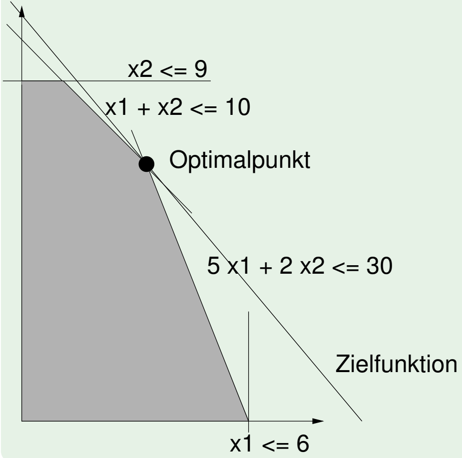
beschreiben jeweils eine Halbebene mit der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ als Rand.

Auch $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ stellen Halbebenen dar.

Der zulässige Bereich ist der Schnitt endlich vieler Halbebenen.

Grafische Lösung zu Beispiel 1.2

Beispiel 1.5



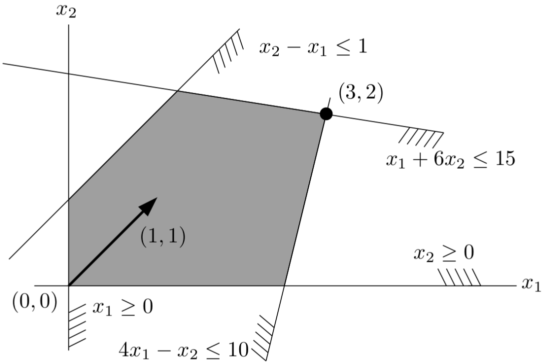
Die Zielfunktion $z = 30x_1 + 25x_2$ wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt.

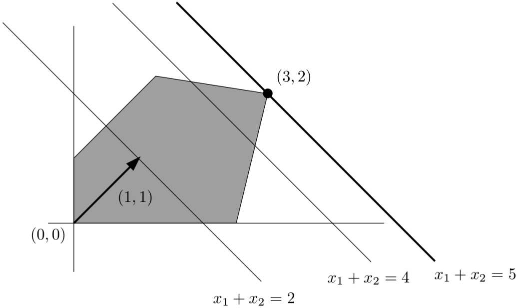
Wachsendes z bedeutet eine Verschiebung nach rechts oben.

Verschiebe nach oben, solange die Gerade durch $\mathcal{X}$ verläuft!

Optimale Lösung im Schnittpunkt der Geraden $x_1 + x_2 = 10$ und $5x_1 + 2x_2 = 30$, also $\mathbf{x}^* = (\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$ mit $z^* = \frac{800}{3}$.

Grafische Lösung zu Beispiel 1.3





Mögliche Situationen bei grafischer Lösung

(a) beschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung

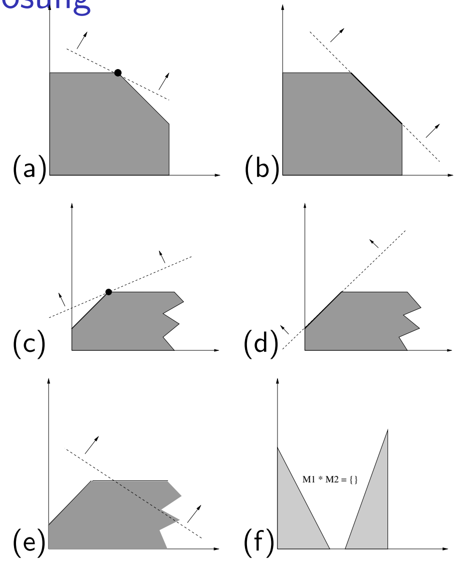
(b) beschränktes $\mathcal{X}$, nichteindeutige optimale Lösung

(c) unbeschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung

(d) unbeschränktes $\mathcal{X}$, nichteindeutige optimale Lösung

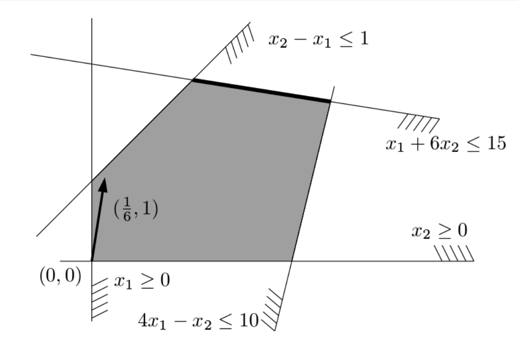
(e) unbeschränktes $\mathcal{X}$, keine optimale Lösung

(f) $\mathcal{X} = \emptyset$, keine zulässige Lösung

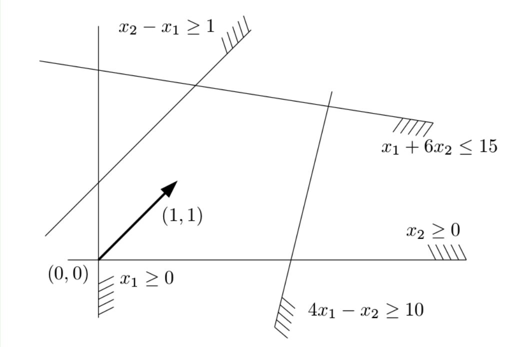


Beispiel 1.6

Beispiel 1.3 mit $\frac{1}{6}x_1 + x_2$ als Zielfunktion.



Mit $\geq$ statt $\leq$ bei zwei Ungleichungen:



Maximalflussproblem als LP

Gegeben:

- gerichteter Graph $G = (V, E)$,
- Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$ mit $s \neq t$.

Ein zulässiger Fluss ist eine Funktion $x : E \to \mathbb{R}$ mit

- $0 \leq x(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$,
- $\displaystyle\sum_{e=(w,v)\in E} x(e) = \sum_{e=(v,w)\in E} x(e)$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$.

Gesucht ist ein zulässiger Fluss mit maximalem Flusswert $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \sum_{e=(s,v)\in E} x(e) - \sum_{e=(v,s)\in E} x(e).$$

Modelliere den Fluss $x(e)$ auf Kante $e \in E$ mithilfe der Variablen x_e. Dann lautet das LP:

$$\max \sum_{e=(s,v)\in E} x_e - \sum_{e=(v,s)\in E} x_e$$

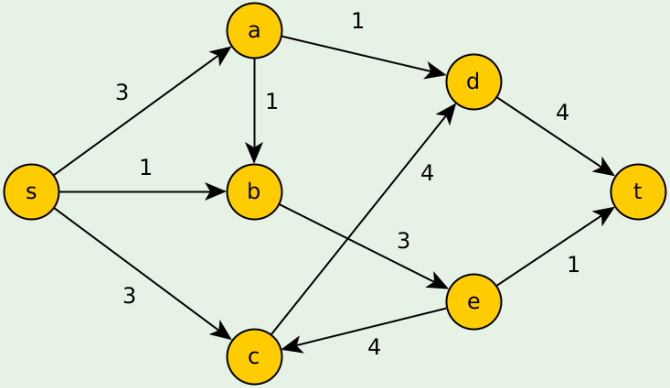
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_e &\leq c(e) && \text{für alle } e \in E \\ \sum_{e=(w,v)\in E} x_e - \sum_{e=(v,w)\in E} x_e &= 0 && \text{für alle } v \in V \setminus \{s,t\} \end{aligned}$$

sowie Vorzeichenbedingungen $x_e \geq 0$ für alle $e \in E$.

Beispiel 1.7

Wie lautet das Maximalfluss LP für den folgenden Graphen?



Lösung: Tafel ✎.

Regressionsproblem als LP

Gegeben sind Datenpunkte (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, n$.

Gesucht sind $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Summe der Abweichungen von y_i zu der Geraden $ax + b$ an den Stellen x_i minimal wird, also

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i| \longrightarrow \min .$$

- Sei $r_i = ax_i + b - y_i$ diese (vorzeichenbhaftete Abweichung).
- Damit gilt $ax_i + b - r_i = y_i$.
- Dann lautet die Zielfunktion: $\min \sum_{i=1}^{n} |r_i|$.
- Problem: Der Betrag in der Zielfunktion (weil r_i nicht vorzeichenbeschränkt ist).

- Sei $r_i = u_i - v_i$ mit $u_i \geq 0$ und $v_i \geq 0$.
- Dann lautet die Zielfunktion jetzt:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \longrightarrow \min .$$

- Die Nebenbedingungen werden damit zu:

$$x_i a + b - u_i + v_i = y_i .$$

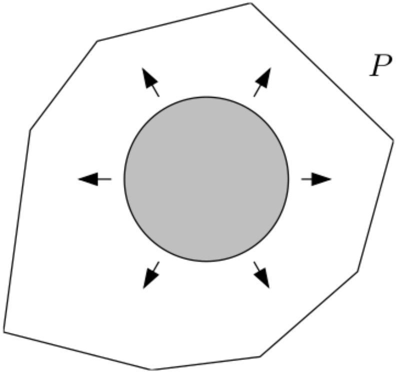
- Vorzeichenbedingungen:
  - $u_i, v_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$
  - $a, b \in \mathbb{R}$

Größter Kreis in einem konvexen Polygon

Gegeben sei ein konvexes Polygon P.

Gesucht sind Mittelpunkt und Radius eines Kreises, so dass

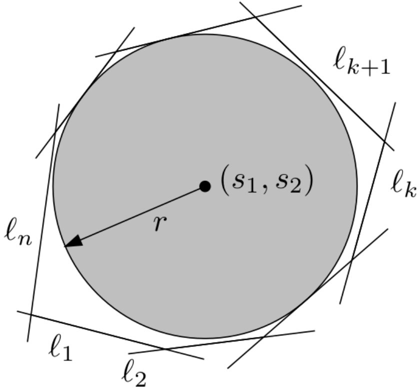
- der Kreis vollständig in P liegt und
- der Radius maximal ist.



- Wir gehen davon aus, dass keine Polygonseite vertikal (parallel zur y-Achse) ist.
- Dann können wir die i-te Polygonseite durch eine Gerade g_i mit Geradengleichung

$$y = a_i x + b_i$$

beschreiben.
- Die Indizes i seien so gewählt, dass die Geraden $g_1, \ldots, g_k$ das Polygon von unten beschränken und
- die Geraden $g_{k+1}, \ldots, g_n$ von oben.



- Es gilt
$$a_i x + b_i = y \Leftrightarrow -a_i x + y - b_i = 0 \Leftrightarrow \frac{-a_i x + y - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} = 0.$$
- Die rechte Gleichung entspricht der Hesseschen Normalform für die Gerade g_i.
- Abstand eines Punktes $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ von g_i:
$$\left| \frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} \right|.$$
- Lage: $\cdot$ (innerhalb $|\cdot|$) ≥ 0 wenn $\mathbf{s}$ überhalb von von g_i liegt, $\cdot \leq 0$ wenn unterhalb.

- Konsequenz: Damit ein Kreis mit Mittelpunkt **s** und Radius r komplett in P liegt, müssen die Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
\frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} &\geq r \qquad i = 1, \ldots, k \\
\frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} &\leq -r \qquad i = k+1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

  erfüllt sein.
- Variablen: s_1, s_2, r
- Zielfunktion: $\max r$
- Vorzeichenbedingungen: $r \geq 0$

Schnittproblem als ganzzahliges LP

Aus 3 m langen Metallstangen sollen

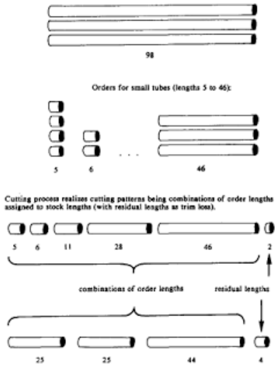
- 10 Stangen mit 1 m,
- 45 Stangen mit 2 m,
- 21 Stangen mit 1.5 m und
- 42 Stangen mit 0.9 m

Länge hergestellt werden.

Die Anzahl der dafür notwendigen 3 m Stangen soll minimiert werden.

Zunächst stellen wir alle möglichen maximale Schnittmuster auf, d.h. alle Möglichkeiten, eine 3 m Stange in die geforderten Längen zu zersägen, so dass der verbleibende Rest nicht mehr verwendbar ist.

Muster	1 m	2 m	1.5 m	0.9 m
1	3	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	1	0	1
5	2	0	0	1
6	1	0	0	2
7	0	0	0	3
8	1	0	1	0
9	0	0	1	1



Variablen

$$x_i = \text{Anzahl der Stangen mit Schnittmuster } i, 1 \leq i \leq 9$$

Zielfunktion

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{cccccccccccc}
3x_1 & +x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & & +x_8 & & \geq & 10 \\
 & x_2 & & +x_4 & & & & & & \geq & 45 \\
 & & 2x_3 & & & & & +x_8 & +x_9 & \geq & 21 \\
 & & & x_4 & +x_5 & +2x_6 & +3x_7 & & +x_9 & \geq & 42
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkungen zum Schnittproblem

- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Problem: Ganzzahligkeit der x_i
- Ganzzahligkeit als weitere Nebenbedingung ist die typische Eigenschaft kombinatorischer Optimierungsprobleme.
- LP-Relaxation (LP mit Verzicht auf Ganzzahligkeit) liefert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert
- Lösungsmethoden: siehe Kapitel 7 sowie die Vorlesungen zu "Kombinatorische Optimierung"

Ganzzahliges lineares Programm

Definition 1.8

Ein lineares Programm mit zusätzlichen Bedingungen $x_i \in \mathbb{Z}$ für alle Variablen x_i heißt ganzzahliges lineares Programm (integer linear program, ILP).

Gilt $x_i \in \mathbb{Z}$ nicht für alle sondern nur für einige der Variablen, so spricht man von einem gemischt-ganzzahligen linearen Programm (mixed integer program, MIP).

Das lineare Programm, das entsteht, wenn wir in einem ILP bzw. MIP die Bedingungen für die Ganzzahligkeit weglassen, heißt LP-Relaxation.

Effiziente Lösbarkeit von LPs

LPs sind effizient lösbar.

- In der Praxis
  Es stehen leistungsfähige Programmpakete (kommerziell und Open-Source) für die Lösung von LPs mit mehreren tausend Variablen und Nebenbedingungen zur Verfügung.
- In der Theorie
  LPs können in polynomieller Zeit gelöst werden (in Bezug auf die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen).

Demgegenüber ist die ganzzahlige lineare Programmierung (in allgemeiner Form) NP-vollständig.

Lineare Algebra vs. Lineare Programmierung

	Basic problem	Algorithm	Solution set
Linear algebra	system of linear equations	Gaussian elimination	affine subspace
Linear programming	system of linear inequalities	simplex method	convex polyhedron

Maximumproblem

Definition 1.9

Ein LP der Form

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$
heißt Maximumproblem.

Kompakte Schreibweise

Mit $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können wir ein Maximumproblem auch schreiben als:

Maximiere	$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
unter den Nebenbedingungen	$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
und den Vorzeichenbedingungen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Bezeichungen:

Zielfunktionsvektor	$\mathbf{c}$
Variablenvektor	$\mathbf{x}$
Koeffizientenmatrix	$\mathbf{A}$
Begrenzungsvektor, rechte Seite	$\mathbf{b}$

Beispiel 1.2 in kompakter Schreibweise

Beispiel 1.10

Maximiere

$$(30, 25) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformung in ein Maximumproblem

Satz 1.11

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Form eines Maximumproblems formulieren.

Beweis.

- Ersetze zu minimierende Zielfunktion $z = F(\mathbf{x})$ durch zu maximierende Zielfunktion $-z = -F(\mathbf{x})$.
- Transformiere $\geq$-Nebenbedingung durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\leq$-Nebenbedingung.
- Eine Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ kann durch zwei Ungleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ und $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ ersetzt werden.
- Falls für x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ erlaubt sind, so ersetze x_j durch die zwei Variablen $x_j^+ \geq 0$ und $x_j^- \geq 0$ mit $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

$\square$

Beispiel 1.12

Wir überführen das folgende LP in ein Maximumproblem:
Minimiere

$$z = 3x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Fortsetzung Beispiel 1.12

Zunächst sorgen wir für eine Maximierung und stellen alle Nebenbedingungen als $\leq$ Nebenbedingungen dar:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq -4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -3x_1 - 2x_2 &\leq -6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 1.12

Nun wird durch $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+, x_2^- \geq 0$ die fehlende Vorzeichenbeschränkung eliminiert. Wir erhalten:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- &\leq 7 \\
-x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq -4 \\
3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 6 \\
-3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- &\leq -6 \\
x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0.
\end{aligned}$$

Normalform

Definition 1.13

Ein LP liegt in Normalform vor, wenn es die Form hat:

Maximiere	$z = F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
unter den Nebenbedingungen	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$
und Vorzeichenbedingungen	$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$

In kompakter Darstellung:

Maximiere	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$
unter den Nebenbedingungen	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
und den Vorzeichenbedingungen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

Umformung in Normalform

Satz 1.14

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Normalform formulieren.

Beweis.

Nach Satz 1.11 lässt sich zu jedem LP ein äquivalentes Maximumproblem formulieren. Es reicht daher zu zeigen, dass jedes Maximumproblem in Normalform überführt werden kann.

Hierzu führen wir für die m Ungleichungen die Schlupfvariablen $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ ein, die in der Zielfunktion mit 0 bewertet werden.

Die Variablen $x_1, \dots, x_n$ heißen Strukturvariablen.

Fortsetzung Beweis.

Die Normalform ergibt sich dann durch:

Maximiere $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0 \cdot x_j$ unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n + m).$$

In Matrixschreibweise lautet die Normalform

$$z = F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Bedingungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Kanonische Normalform

Definition 1.15

Gelten in der Matrixschreibweise für die Normalform die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & & 1 \end{array} \right),$$

so ist das LP in kanonischer Form.

Beispiel 1.16

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Für die Nebenbedingungen führen wir die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5, x_6 ein und erhalten ...

Fortsetzung Beispiel 1.16.

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_6$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 10 \\
5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 30 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 6 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 9
\end{array}$$

und $x_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, 6)$.

Fortsetzung Beispiel 1.16.

In Matrixschreibweise:

Maximiere

$$z = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

unter den Bedingungen

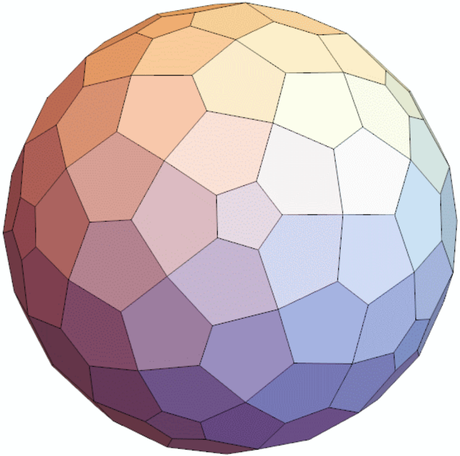
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassung

- Lineares Programm (LP): lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Nebenbedingungen eines LPs sind Gleichungen oder Ungleichungen in nicht strikter Form.
- Ganzzahliges LP, ILP: Variablen dürfen nur ganzzahlige Werte annehmen.
- Viele bekannte Probleme können als LP oder ILP formuliert werden.

Kapitel 2

Theorie der Linearen Programmierung



Inhalt

2 Theorie der Linearen Programmierung

- Topologie
- Konvexität
- Polyeder
- Basislösungen

Norm

Definition 2.1

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1. für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$
2. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|,$$
3. für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

heißt Norm für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Diskussion Norm

- Eine Norm gibt jedem Vektor eines Vektorraums eine eindeutige Länge.
- Wegen
$$0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} + (-\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$$
folgt, dass diese Länge stets nichtnegativ ist.
- Für Vektorräume wie den $\mathbb{R}^n$ gibt es i. A. mehr als eine Norm.
- Welche Norm in der Praxis verwendet wird, hängt von den Anforderungen an den Begriff der Länge ab.

Bekannte Normen für den $\mathbb{R}^n$

- Euklidische Norm:

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Summennorm:

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

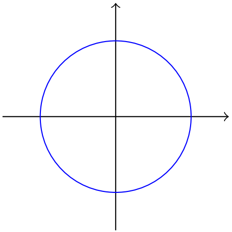
- Maximumsnorm:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

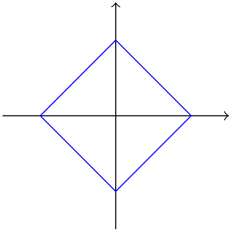
- P-Norm:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

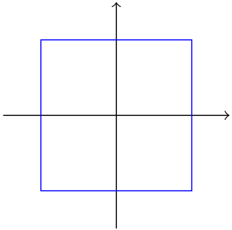
Veranschaulichung der Normen



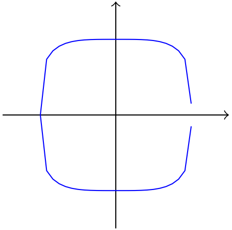
$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\|_1$



$\|\cdot\|_\infty$



$\|\cdot\|_{p=4}$

Normäquivalenz

Definition 2.2

Zwei in einem Vektorraum V definierte Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, wenn es zwei Zahlen $a, A > 0$ gibt, mit

$$a\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq A\|\mathbf{x}\|_1$$

für alle $\mathbf{x} \in V$.

Beispiel 2.3

Wir zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Einerseits gilt:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq n \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\right)^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty^2$$

Beispiel 2.4

woraus folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \\
&= \sqrt{\left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2} \\
&= \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} \\
&\leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\
&= \|\mathbf{x}\|_2.
\end{aligned}$$

Fakt 2.5

Für den $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Bemerkung: Dies liegt daran, dass der $\mathbb{R}^n$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Fazit:

- Für den $\mathbb{R}^n$ ist es i. d. R. unerheblich, welche Norm wir genau betrachten.
- Wir schreiben daher in den meisten Fällen einfach $\|\cdot\|$, geben also keine spezifische Norm an.

ϵ-Umgebung

Definition 2.6

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$U_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

ϵ-Umgebung von $\mathbf{x}$.

Bemerkungen:

- Welche Norm $\| \; \|$ genau verwendet wird, spielt hier keine Rolle.
- $U_\epsilon(\mathbf{x})$ bildet anschaulich eine n-dimensionale (offene) Kugel mit Radius ϵ um $\mathbf{x}$.

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 2.7

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen gdw. gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in M \, \exists \epsilon > 0 \; : \; U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M.$$

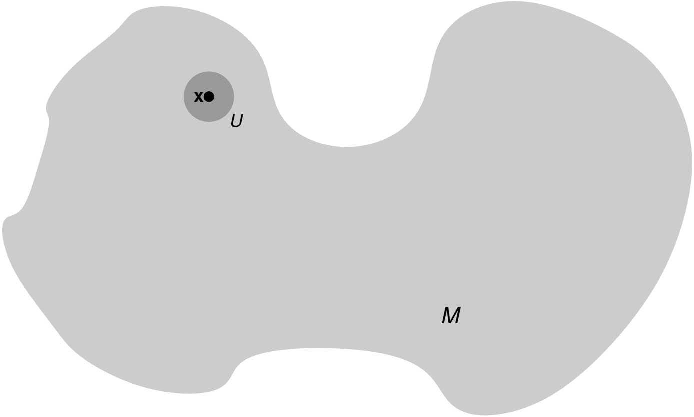
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement

$$M^C := \mathbb{R}^n \setminus M$$

von M offen ist.

Anschauliche Interpretation einer offenen Menge

Um jedes Element $\mathbf{x} \in M$ einer offenen Menge M kann man immer eine (eventuell sehr kleine) n-dimensionale Kugel $U_\epsilon(\mathbf{x})$ legen, die vollständig in M liegt.



Beispiel 2.8

Die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 < 5\}$ ist offen.
Begründung: Mit $\mathbf{a}^T = (1, 2, -3)$ ist M darstellbar als

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{a}^T\mathbf{x} < 5\}.$$

Wähle für ein beliebiges $\mathbf{x} \in M$

$$\epsilon = \frac{5 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|} > 0.$$

Zu zeigen: $\mathbf{y} \in U_\epsilon(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{a}^T\mathbf{y} < 5$.

Fortsetzung Beispiel.

Sei $\mathbf{y} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^T\mathbf{y} &= \mathbf{a}^T(\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})) \\
&= \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{a}^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
&\leq \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\
&< \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \|\mathbf{a}\|\epsilon \\
&= \mathbf{a}^T\mathbf{x} + (5 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Damit ist die Menge $M^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5\}$ abgeschlossen.

Bemerkungen

- Offen ist nicht das Gegenteil von abgeschlossen. Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.
  Beispiel: $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$
- $\emptyset$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.
- $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Schnitt von abgeschlossenen Mengen

Lemma 2.9

Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

Beweis.

Tafel ✎.

Bemerkungen:

- Lemma 2.9 gilt auch für abzählbar unendlich viele abgeschlossene Mengen.
- Gilt eine analoge Aussage auch für offene Mengen?

Lemma 2.10

Jede Nebenbedingung und jede Vorzeichenbedingung eines linearen Programms definiert eine abgeschlossene Menge.

Beweis.

- Für $\geq$-Nebenbedingungen analog zu Beispiel 2.8 mit

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} < b_i\}.$$

- Für $\leq$-Nebenbedingungen analog mit $>$ statt $<$.
- Für $=$-Bedingungen: Darstellbar als Schnitt von $\leq$- und $\geq$-Bedingungen und damit wieder abgeschlossen (siehe Lemma 2.9).
- Für Vorzeichenbeschränkung der Variablen x_i:

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | {\mathbf{e}^i}^T \mathbf{x} < 0\}.$$

□

Konsequenzen für die Menge der zulässigen Lösungen

Folgerung 2.11

Für jedes lineare Programm LP ist die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen abgeschlossen.

Beweis.

- Jede Vorzeichenbedingung $x_i \geq 0$ definiert eine abgeschlossene Menge.
- Jede Nebenbedingung, sowohl in $\leq$-, $=$- oder $\geq$-Form, definiert eine abgeschlossene Menge.
- $\mathcal{X}_{LP}$ ist somit der Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Mengen.
- Mit Lemma 2.9 folgt die Aussage.

Inneres, Rand und Äußeres einer Menge

Definition 2.12

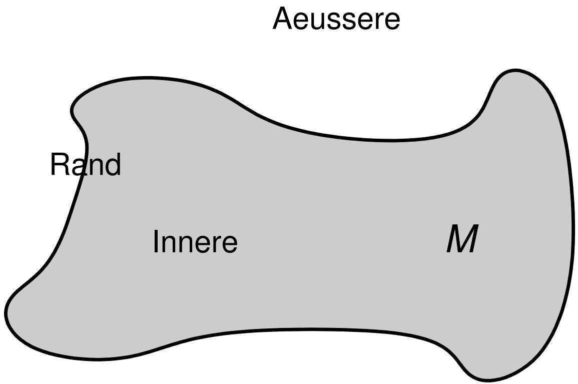
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt von M gdw. ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M$.
- M° bezeichnet die Menge der inneren Punkte von M (das Innere von M).
- $\mathbf{x}$ ist ein äußerer Punkt, gdw. $\mathbf{x}$ innerer Punkt von M^C ist. Die Menge der äußeren Punkte von M ist das Äußere von M.
- $\mathbf{x}$ heißt Randpunkt von M gdw. für alle $\epsilon > 0$ gilt: $U_\epsilon(\mathbf{x})$ enthält
  - ein $\mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} \notin M$ und
  - ein $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z} \in M$.

  ∂M bezeichnet die Menge der Randpunkte und heißt Rand von M.
- $\overline{M} := M \cup \partial M$ bildet den Abschluss von M.

Für jede Menge M kann der $\mathbb{R}^n$ disjunkt zerlegt werden in

- das Innere,
- das Äußere und
- den Rand von M.



Lemma 2.13

- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann offen, wenn* $M = M^\circ$ *gilt.*
- *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $M = \overline{M}$ *gilt.*
- $(M^C)^\circ = (\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = (\overline{M})^C$
- $\overline{M^C} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus M} = \mathbb{R}^n \setminus M^\circ = (M^\circ)^C$

Lemma 2.14

Es sei $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *der Zielfunktionsvektor eines linearen Programms* LP*. Dann gilt*

$$\mathcal{X}^*_{LP} \cap \mathcal{X}^\circ_{LP} = \emptyset$$

d. h., optimale Lösungen können nicht im Inneren von $\mathcal{X}_{LP}$ *auftreten.*

Folgerung 2.15

$$\mathcal{X}^*_{LP} \subseteq \partial \mathcal{X}_{LP}$$

Beweis.

O. B. d. A. sei LP ein Maximumproblem.

Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{LP}^{\circ}$, d. h. es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{X}_{LP}$.

Wähle $\alpha := \frac{\epsilon}{2\|\mathbf{c}\|} > 0$. Damit gilt $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \alpha\mathbf{c} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$ und damit $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_{LP}$.

Es ergibt sich

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\mathbf{c}^T\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha\|\mathbf{c}\|_2^2.$$

Wegen $\alpha\|\mathbf{c}\|_2^2 > 0$ folgt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} > \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Damit kann $\mathbf{x}$ keine optimale Lösung sein.

Beschränkte und kompakte Mengen

Definition 2.16

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- M heißt beschränkt, wenn ein $\beta \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|\mathbf{x}\| \leq \beta$ für alle $\mathbf{x} \in M$.
- M heißt kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel 2.17

Der offene Einheitskreis $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ ist beschränkt, denn es gilt $\|\mathbf{x}\|_2 < 1$ für alle $\mathbf{x} \in M$. Da M offen ist, handelt es sich aber nicht um eine kompakte Menge.

Der abgeschlossene Einheitskreis $\overline{M}$ ist dagegen kompakt.

Bemerkung: Wenn der zulässige Bereich $\mathcal{X}_{LP}$ eines linearen Programms LP beschränkt ist, dann ist er auch kompakt.

Existenz von Extremwerten

Satz 2.18 (Weierstraß)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge und es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- *Ist M kompakt, dann ist die Funktion f auf M beschränkt und es existieren Minimum und Maximum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach unten beschränkt, dann existiert das Minimum für f.*
- *Ist M abgeschlossen und f auf M nach oben beschränkt, dann existiert das Maximum für f.*

Beispiel 2.19

Es sei $M = [-1, 5] \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Das Minimum liegt bei $\frac{3}{2}$, das Maximum bei 5.
Für das offene Intervall $M = (-1, 5)$ existiert für f dagegen nur das Minimum.

Es sei $M = (2, 7) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = 2x - 3$. Dann existieren weder Minimum noch Maximum.
Für $M = (-\infty, 5]$ existiert das Maximum, aber kein Minumum.

Konsequenz für lineare Programme

Folgerung 2.20

(i) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und beschränkt, dann existiert eine optimale Lösung.*

(ii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und die Zielfunktion auf auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben beschränkt, dann existiert für Maximierungsprobleme eine optimale Lösung.*

(iii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ nichtleer und die Zielfunktion auf auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach unten beschränkt, dann existiert für Minimierungsprobleme eine optimale Lösung.*

- für (i) vgl. Folie 27, Fälle (a) und (b)
- für (ii) vgl. Folie 27, Fälle (c) und (d)

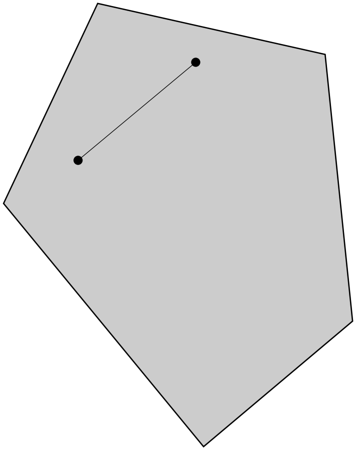
Konvexität

Definition 2.21

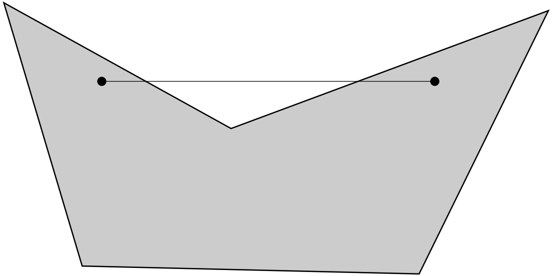
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex gdw. für je zwei Punkte Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M.$$

Konvexe Menge

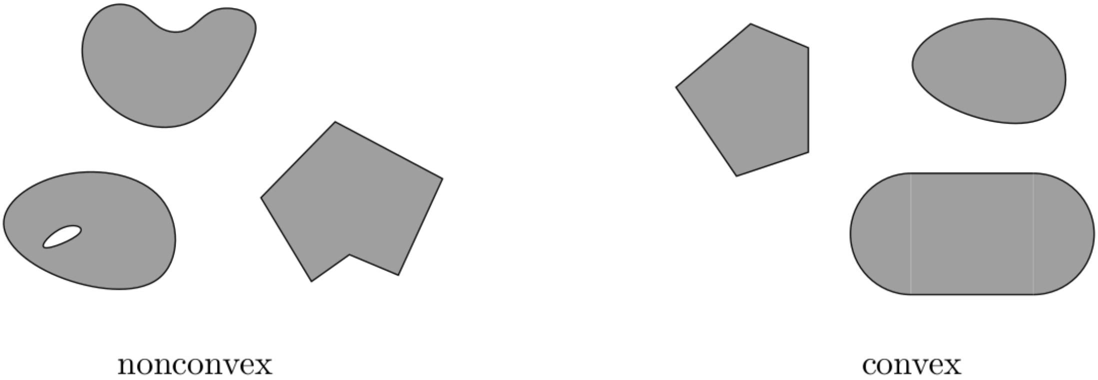


konvexe Menge



nicht konvexe Menge

Konvexe Menge



Schnitt konvexer Mengen

Lemma 2.22

Der Schnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.

Beweis.

Es seien $M_1, \ldots, M_n$ konvexe Mengen und es gelte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n M_i$. Dann gilt für ein beliebiges $\lambda \in [0, 1]$:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, wegen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n M_i$.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, weil alle M_i konvex.
- Daraus folgt $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^n M_i$.
- Also ist die Menge $\bigcap_{i=1}^n M_i$ konvex.

Konvexkombination

Definition 2.23

Es seien $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ seien nichtnegative reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

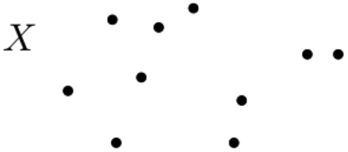
- Dann heißt $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}$ Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.
- Gilt sogar $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$, so heißt $\mathbf{x}$ echte Konvexkombination von $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$.

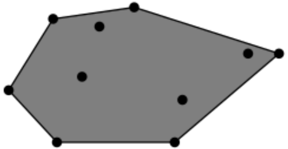
Konvexe Hülle

Definition 2.24

Die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält, d.h.

$$\mathrm{conv}(M) = \bigcap_{\substack{M \subseteq K \\ K \text{ konvex}}} K$$





the convex hull of X

Konvexe Hülle = Menge aller Konvexkombinationen

Lemma 2.25

Die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ *ist gleich der konvexen Hülle dieser Punkte, d. h.*

$$\operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}^{(i)} \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Beweis.

"$\supseteq$": Induktion über r.
$r = 1$: offensichtlich.
$r = 2$: Folgt direkt aus der Konvexität der konvexen Hülle.
$r - 1 \to r$: Sei $r \geq 3$ und

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \lambda_r \mathbf{x}^{(r)}$$

eine Konvexkombination.

Fortsetzung Beweis.

Gilt $\lambda_r = 1$, dann folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$, damit $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(r)}$ und somit $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.
Gilt $\lambda_r < 1$, dann definieren wir

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_r} \text{ für } i = 1, \ldots, r-1.$$

Damit ist

$$\mathbf{x}' = \lambda'_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \lambda'_{r-1} \mathbf{x}^{(r-1)}$$

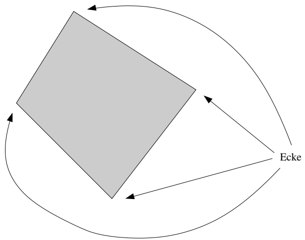
eine Konvexkombination. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $\mathbf{x}' \in \operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.
Wegen $\mathbf{x} = (1 - \lambda_r)\mathbf{x}' + \lambda_r \mathbf{x}^{(r)}$ folgt wiederum $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}\})$.

"$\subseteq$": Es genügt zu zeigen, dass die Menge der Konvexkombinationen selbst konvex ist. Tafel ✎.

Ecke

Definition 2.26

Es $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.
Ein Punkt $\mathbf{z} \in M$ heißt Ecke (oder auch Extremalpunkt) von M, wenn sich $\mathbf{z}$ nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in M$ darstellen lässt.



Frage: Wie viele Ecken hat ein abgeschlossener/offener Kreis?

Äquivalente Eckencharakterisierung

Lemma 2.27

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $\mathbf{x} \in M$.

Dann gilt:

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke von } M \quad \Longleftrightarrow \quad M \setminus \{\mathbf{x}\} \text{ ist konvex.}$$

Interpretation: Die Ecken von M sind genau die Punkte von M, die man herausnehmen kann, ohne die Konvexität zu verlieren.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Hyperebene und Halbraum

Definition 2.28

Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$$

Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Mengen

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq c\}$$

bzw.

$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c\}$$

heißen zu H gehöriger positiver Halbraum bzw. negativer Halbraum.

Unterraum

Fakt 2.29

Hyperebenen sind affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ *mit Dimension* $n-1$.

Definition 2.30

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Unterraum, wenn U (mit den Verknüpfungen des $\mathbb{R}^n$) selbst wieder ein Vektorraum ist.

Satz 2.31

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein Unterraum des* $\mathbb{R}^n$, *wenn gilt:*

1. $U \neq \emptyset$
2. *Für alle* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ *gilt:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
3. *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in U$ *gilt:* $\alpha\mathbf{v} \in U$.

Affiner Unterraum

Definition 2.32

Es sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt eine Menge der Form

$$\mathbf{v} + U := \{\mathbf{v} + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}$$

affiner Unterraum.

Bemerkungen zu affinen Unterräumen

- Ein affiner Unterraum ist ein Unterraum, der um den Vektor $\mathbf{v}$ verschoben ist.
- Im $\mathbb{R}^3$ sind Geraden oder Ebenen affine Unterräume der Dimension 1 bzw. 2.
  Wenn die Geraden bzw. Ebenen durch den Ursprung gehen, sind es Unterräume.
- Die Dimension eines affinen Unterraums $\mathbf{v} + U$ ist die Dimension von U.
- $U = \{\mathbf{0}\}$ ist ein Unterraum der Dimension 0.
  Dementsprechend ist für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\{\mathbf{v}\}$ ein affiner Unterraum der Dimension 0.
- Gelegentlich wird auch $\emptyset$ als affiner Unterraum betrachtet, mit der Dimension -1.

Konvexität von Hyperbenen und Halbräumen

Lemma 2.33

Hyperebenen und Halbräume sind konvexe Mengen.

Beweis.

Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ und $\lambda \in [0, 1]$, jeweils beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{y} \\ &= \lambda c + (1-\lambda)c \\ &= c \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in H$$

also ist H konvex.
Analog beweist man die Konvexität von H^+ und H^-. $\square$

Konvexität und LP-Lösungen

Folgerung 2.34

Es gilt:

- *Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung zulässigen Lösungen ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist konvex.*
- *Die Menge $\mathcal{X}^*_{LP}$ der optimalen Lösungen eines LP ist konvex.*

Beweis.

Folgt aus Lemma 2.22, Lemma 2.33 und der Linearität der Zielfunktion. $\square$

Polytop und Polyeder

Definition 2.35

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lässt, heißt konvexes Polyeder.

Ein beschränktes konvexes Polyeder ist ein konvexes Polytop.

Folgerung 2.36

Die Menge $\mathcal{X}_{LP}$ der zulässigen Lösungen eines LP ist ein konvexes Polyeder.

Dimension von Polyedern

Definition 2.37

Die Dimension eines konvexen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste Dimension eines affinen Unterraums U mit $P \subseteq U$.

Satz 2.38

Die Dimension eines konvexen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ergibt sich durch das größte d, für das $d+1$ Vektoren

$$\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(d)} \in P$$

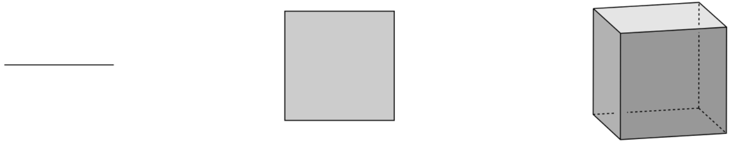
existieren, so dass die Vektoren

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(d)} - \mathbf{x}^{(0)}$$

linear unabhängig sind.

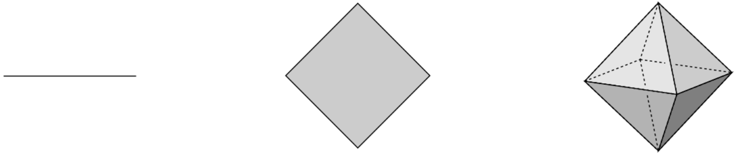
Beispiele für Polyeder in verschiedenen Dimensionen

- Der n-dimensionale Würfel $[-1, 1]^n$.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

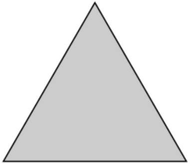
- Das n-dimensionale Kreuzpolytop $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq 1\}$.



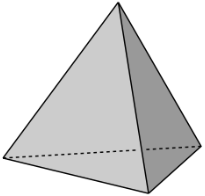
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

- Das *n*-dimensionale Simplex $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\, x_1, \ldots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$.

$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Ecke eines Polyeders

Satz 2.39

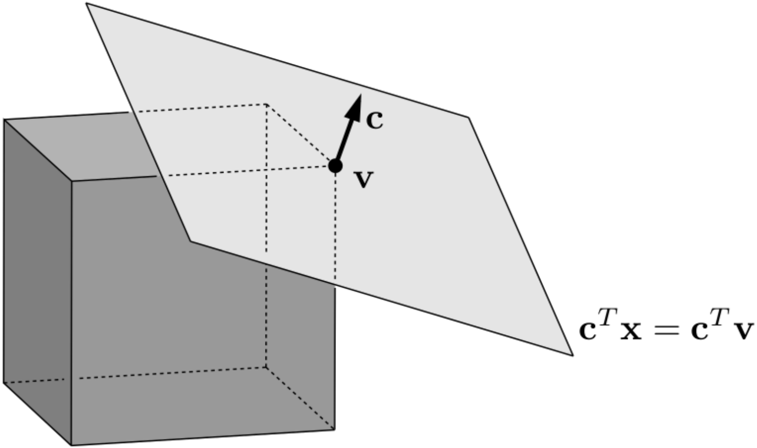
Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polyeder.

Ein Punkt $\mathbf{v} \in P$ ist genau dann Ecke von P, wenn ein Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass gilt:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{v} > \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in P \setminus \mathbf{v}.$$

Bemerkungen:

- Die Hyperebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}\}$ tangiert P in $\mathbf{v}$.
- Für die lineare Funktion $f(x) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ist $\mathbf{v}$ eine eindeutige Maximalstelle auf P.


c
v
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}$

n-dimensionale Seiten von Polyedern

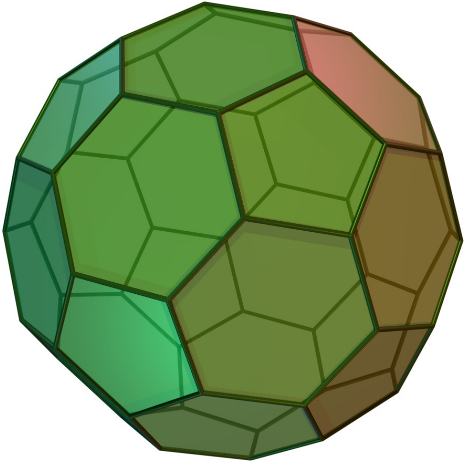
Definition 2.40

Es sei P ein konvexes Polyeder.

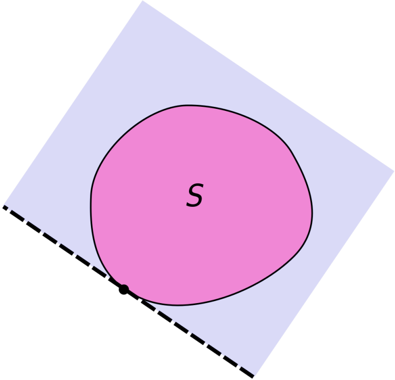
Eine Menge $F \subseteq P$ heißt k-dimensionale Seite (face) von P, wenn

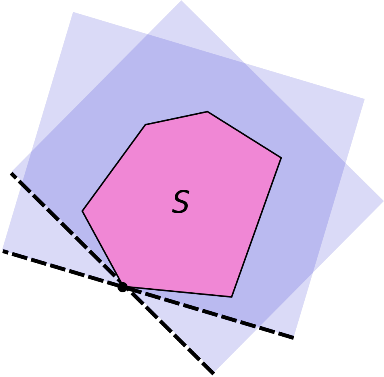
- F die Dimension k hat,
- ein Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ existiert mit
  - $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ für alle $\mathbf{x} \in F$ und
  - $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < z$ für alle $\mathbf{x} \in P \setminus F$.

Die Ebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z\}$ heißt dann Stützhyperbene (supporting hyperplane) von P.



Stützhyperebene





Bemerkungen zu *n*-dimensionalen Seiten

- Seiten sind auch wieder Polyeder.
- Eine Ecke ist eine Seite mit Dimension 0.
- Eine Kante ist eine Seite der Dimension 1.
- Eine Seite, die nicht als Teilmenge in einer anderen Seite enthalten ist, heißt Facette.

Kompakte konvexe Mengen haben Ecken

Satz 2.41

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und konvex.

Dann hat M mindestens eine Ecke.

Beweis.

- Wir betrachten die Funktion $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$.
- $\| \, \|_2$ ist eine stetige Funktion, M ist kompakt.
- Mit dem Satz von Weierstraß (siehe 2.18) folgt, dass das Maximum für $\| \, \|_2$ auf M existiert. Sei $\mathbf{x}^*$ eine Maximumsstelle.

Annahme: $\mathbf{x}^*$ ist keine Ecke, d. h. es existieren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ mit $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$ und $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*$. $\square$

Fortsetzung Beweis.

- Es folgt $\mathbf{x}^* = \mathbf{z} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ und damit

$$
\begin{aligned}
{\mathbf{x}^*}^T \mathbf{x}^* &= \left(\mathbf{z}^T + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z})^T\right)\left(\mathbf{z} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\right) \\
&= \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z}) + \frac{1}{4}(\mathbf{y} - \mathbf{z})^T(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\
&= \|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

- Weil $\mathbf{x}^*$ Maximumsstelle folgt auch

$$
\|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = {\mathbf{x}^*}^T \mathbf{x}^* = \|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z}).
$$

  Daraus folgt $0 \leq \frac{1}{4}\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 + \mathbf{z}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ und somit

$$
\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 \geq 4\mathbf{z}^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}).
$$

Fortsetzung Beweis.

- Es gilt aber auch $\mathbf{x}^* = \mathbf{y} + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{y})$ und analog zur Vorseite zeigt man damit

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \geq -4\mathbf{y}^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}).$$

- Addition der Ungleichungen ergibt

$$2\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \geq 4(\mathbf{z} - \mathbf{y})^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = 4\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

- Aus der Ungleichung folgt $\mathbf{z} = \mathbf{y} = \mathbf{x}^*$. Widerspruch!

Ecken und optimale Lösungen

Satz 2.42

Gegeben sei ein LP als Maximumproblem mit $\mathcal{X}_{LP} \neq \emptyset$.

(i) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ beschränkt, so nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$ an.*

(ii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ unbeschränkt, aber die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben beschränkt, so nimmt $F(\mathbf{x})$ das Maximum in mindestens einer Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$ an.*

(iii) *Ist $\mathcal{X}_{LP}$ unbeschränkt und $F(\mathbf{x})$ auf $\mathcal{X}_{LP}$ nach oben unbeschränkt, so hat das LP keine Lösung.*

vgl. Folie 27

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Beweis von (i).

- Gemäß Folgerung 2.20 existiert eine optimale Lösung. Sei z^* der zugehörige Zielfunktionswert.
- $\mathcal{X}^*_{LP}$ ist als Teilmenge von $\mathcal{X}_{LP}$ ebenfalls beschränkt, außerdem konvex (Folgerung 2.34) und nichtleer.
- Wir können $\mathcal{X}^*_{LP}$ darstellen als $\mathcal{X}^*_{LP} = \mathcal{X}_{LP} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z^*\}$.
  Beide Mengen der rechten Seite sind abgeschlossen und somit auch $\mathcal{X}^*_{LP}$ (Folgerung 2.11 und Lemma 2.9).
- Nach Satz 2.41 hat $\mathcal{X}^*_{LP}$ eine Ecke $\mathbf{x}^*$.
- $\mathbf{x}^*$ ist nun auch eine Ecke von $\mathcal{X}_{LP}$. Begründung:
  - Gilt $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$, dann folgt $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}^*_{LP}$, ansonsten wäre $\mathbf{x}^*$ nicht optimal.
  - In $\mathcal{X}^*_{LP}$ folgt aus $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$ aber $\mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{x}^*$ (weil dort Ecke).

$\square$

Basis

Definition 2.43

Gegeben sei ein LP in der Normalform mit m als Rang der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heißt Basislösung gdw. $n - m$ Komponenten x_i gleich Null und die zu den restlichen Variablen gehörenden Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ linear unabhängig sind.
- Eine Basislösung, die zulässig ist ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), heißt zulässige Basislösung.
- Die m linear unabhängigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ einer (zulässigen) Basislösung heißen Basisvektoren, die zugehörigen Variablen x_j Basisvariablen (BV).
- Alle übrigen Spaltenvektoren heißen Nichtbasisvektoren, die zugehörigen Variablen Nichtbasisvariablen (NBV).
- Die Menge aller Basisvariablen x_j einer Basislösung bezeichnet man als Basis.

Algebraische Charakterisierung von Ecken

Satz 2.44

$\mathbf{x}$ *ist genau dann eine zulässige Basislösung eines LP, wenn* $\mathbf{x}$ *Ecke von* $\mathcal{X}_{LP}$ *ist.*

Beweis.

"$\Rightarrow$": Es sei $\mathbf{x}$ eine zulässige Basislösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dann gibt es m linear unabhängige Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_m}$ von $\mathbf{A}$ mit

$$x_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

Annahme: $\mathbf{x}$ ist keine Ecke von $\mathcal{X}$. Dann existieren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ und ein $0 < \lambda < 1$, so dass gilt

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$$

Fortsetzung Beweis.

Aus $\mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \lambda > 0, (1-\lambda) > 0$ und $x_j = 0$ für $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ folgt $y_j, z_j = 0$ für $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$.
Andererseits gilt $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$, also $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ und damit sowohl

$$y_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + y_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

als auch

$$z_{i_1}\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + z_{i_m}\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{b}$$

Es folgt

$$(y_{i_1} - z_{i_1})\mathbf{a}^{i_1} + \cdots + (y_{i_m} - z_{i_m})\mathbf{a}^{i_m} = \mathbf{0}$$

Da die $\mathbf{a}^{i_k}$ linear unabhängig sind, folgt $y_{i_k} = z_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, m$ und damit $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.
Widerspruch!

Fortsetzung Beweis.

"$\Leftarrow$": Es sei $\mathbf{x}$ Ecke von $\mathcal{X}$. Für den trivialen Fall $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und wir können m linear unabhängige Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ auswählen. $\mathbf{x}$ ist damit eine zulässige Basislösung.
Es sei also $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit

$$\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \mathbf{a}^{i_j} = \mathbf{b}$$

und $x_{i_j} > 0$.
Annahme: Die Vektoren $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_k}$ sind linear abhängig. Dann gäbe es eine nicht triviale Linearkombination

$$y_1 \mathbf{a}^{i_1} + \cdots + y_k \mathbf{a}^{i_k} = \mathbf{0}$$

Für hinreichend kleines ϵ gilt dann

$$\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Fortsetzung Beweis.

Damit sind die Vektoren $\mathbf{x} \pm \epsilon\mathbf{y}$ zulässig und es folgt

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y})$$

Dies bedeutet wiederum, dass $\mathbf{x}$ keine Ecke ist. Widerspruch!

Folgerung 2.45

$\mathcal{X}_{LP}$ hat nur endlich viele Ecken.

Ecken-Algorithmus

Algorithmus 2.46

Gegeben sei ein LP in Normalform mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Für $N := \binom{n}{m}$ seien $B_1, B_2, \ldots, B_N$ die m-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Für eine Menge $B_k = \{j_1, \ldots, j_m\}$ bezeiche $\mathbf{A}_{B_k} = (\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Matrix, die aus den Spaltenvektoren j_1 bis j_m von $\mathbf{A}$ besteht.

Der Vektor $\mathbf{x}_{B_k}$ ist der entsprechende Variablenvektor dessen Komponenten einen Index aus B_k haben.

Fortsetzung Algorithmus 2.46.

1. $k := 1, z^* := -\infty$
2. Erzeuge $B_k, \mathbf{A}_{B_k}$ und $\mathbf{x}_{B_k}$.
3. Falls $r(\mathbf{A}_{B_k}) < m$ dann weiter mit 6.
4. Löse das LGS $\mathbf{A}_{B_k}\mathbf{x}_{B_k} = \mathbf{b}$. Es sei $\mathbf{x}$ die Basislösung zur Lösung dieses LGS. Falls $\mathbf{x}$ nicht zulässig ist, weiter mit 6.
5. Falls $\mathbf{c}^T\mathbf{x} > z^*$, setze $z^* := \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}$.
6. $k := k + 1$. Falls $k \leq N$ gehe zu 2, sonst STOP!

Bemerkungen zum Ecken-Algorithmus

- Wenn χ_{LP} nichtleer und beschränkt ist, dann liefert der Ecken-Algorithmus eine Lösung $\mathbf{x}^*$ mit Zielfunktionswert z^*.
- Die Bestimmung des Rang von $\mathbf{A}_{B_k}$ in Schritt 3 und die Lösung des LGS in Schritt 4 kann mit dem Gaußschen Algorithmus oder der Cramer-Regel erfolgen.
- Der Algorithmus hat keine praktische Bedeutung und ist nur für kleine n und m durchführbar.

Beispiel zum Eckenalgorithmus

Beispiel 2.47

Wir greifen das Beispiel mit dem Eisverkäufer (Beispiel 1.2 bzw. 1.5) wieder auf.
Maximiere $z = F(\mathbf{x}) = 30x_1 + 25x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Man beachte: Die redundante Nebenbedingung $x_1 \leq 6$ wurde weggelassen.

Fortsetzung Beispiel 2.47.

Man erhält $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene Spaltenmengen für die Matrix $\mathbf{A}$:

$$B_1 = \{1,2,3\}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ ergibt } x_3 < 0$$

$$B_2 = \{1,2,4\}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F(\mathbf{x}) = 255$$

$$B_3 = \{1,2,5\}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel 2.47.

$$B_4 = \{1,3,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

$$B_5 = \{1,3,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 180$

$$B_6 = \{1,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_4 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 2.47.

$$B_7 = \{2,3,4\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F(\mathbf{x}) = 225$

$$B_8 = \{2,3,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_3 < 0$$

$$B_9 = \{2,4,5\}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ liefert } x_5 < 0$$

Fortsetzung Beispiel 2.47.

$$B_{10} = \{3,4,5\} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ Ecke } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F(\mathbf{x}) = 0$$

Für die Ecke $\begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ wird der maximale Zielfunktionswert

$z = F(\mathbf{x}) = 266\frac{2}{3}$ angenommen.

Entartete Ecken

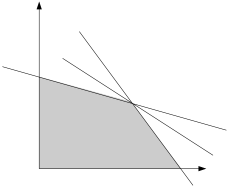
Wenn m der Rang von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist, sind im Normalfall genau m Koordinaten einer Ecke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ positiv, die übrigen Null.

Definition 2.48

Gegeben sei ein LP in Normalform mit Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und es gelte $r(\mathbf{A}) = m$.

Eine Ecke $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{LP}$ heißt entartet (degeneriert) gdw. weniger als m Koordinaten von $\mathbf{x}$ positiv sind.

Bemerkung: Bei entarteten Ecken ist das System der linear unabhängigen Spalten von $\mathbf{A}$ nicht eindeutig bestimmt.



Beispiel zu entarteten Ecken

Beispiel 2.49

Wir untersuchen das LP vom Einsverkäufer (Beispiele 1.2, 1.16 und 2.47), diesmal inklusive der redundanten Nebenbedingung $x_1 \leq 6$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir betrachten die Basis mit der Spaltenindexmenge $\{1, 3, 4, 6\}$. Hierzu gehört das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich

$$x_6 = 9, \quad x_1 = 6, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 4$$

also ist die Ecke $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ entartet.

Fortsetzung Beispiel.

Die gleiche Ecke ergibt sich für die Spaltenindexmenge $\{1, 3, 5, 6\}$ und dem zugehörigen LGS:

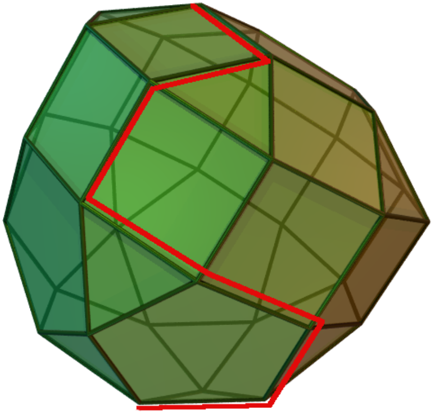
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Konvexität, Ecken
- Der zulässige Bereich eines LP ist stets abgeschlossen und konvex.
- Wenn es eine optimale Lösung gibt, dann auch stets eine, die eine Ecke ist.
- Ecke $\Leftrightarrow$ zulässige Basislösung
- Berechenbar, aber nicht effizient: Ermittlung aller Ecken bzw. aller zulässigen Basislösungen durch eindeutig lösbare LGS

Kapitel 3

Simplexalgorithmus



Inhalt

3 Simplexalgorithmus

- Primaler Simplexalgorithmus
- Unbeschränktheit
- Vermeidung von Zyklen
- Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Grundideen

- Der Simplexalgorithmus ist das Standardverfahren zur Lösung von linearen Programmen.
- von George Bernard Dantzig in den 40ern des 20. Jahrhunderts entwickelt
- Vorgehen: versuche ausgehend von einer Startecke mit einer Ausgangsbasis durch Basisaustausch zu einer Ecke mit besserem Zielfunktionswert fortzuschreiten.
- Da es nur endlich viele Ecken gibt, erhälten wir nach endlich vielen Schritten die optimale Lösung.
- Der Basistausch geschieht dabei so sparsam wie möglich: Es wird stets genau eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable ausgetauscht.

Fazit zu Grundideen

Konstruktion einer Folge $(\mathbf{x}^{(r)})$ von Basislösungen mit

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r+1)} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(r)}$$

und Abbruch, wenn keine Verbesserung mehr möglich ist.

Beispiel für ein Simplextableau

Beispiel 3.1

Wir bleiben beim Problem des Eisverkäufers (Beispiel 2.47) und ordnen die Daten in einem Simplextableau an:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	1	1	1	0	0	0	10
x_4	5	2	0	1	0	0	30
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	-30	-25	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 3.1.

- Die Strukturvariablen x_1, x_2 sind NBV, die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 sind BV.
- Die Werte der BV ergeben sich aus den Nebenbedingungsgleichungen, die durch die Zeilen des Tableaus repräsentiert werden. Hierdurch ist eine Ecke gegeben.
- Für den Zielfunktionswert $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ wird eine neue Variable z eingeführt und die Gleichung $-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z = 0$ wird wie eine zusätzliche Nebenbedingung aufgefasst. Wir betrachten also eigentlich das Problem:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \max z & & \\
\text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z & = & 0 \\
 & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

- Letzte Zeile ist Zielfunktionszeile, aufgefasst als Nebenbedingung. Der Zielfunktionswert z steht ganz rechts.

Beispiel für einen Basiswechsel

Beispiel 3.2

Im Tableau von Beispiel 3.1 verspricht x_1 den größeren Zuwachs, x_1-Spalte ist daher die Pivotspalte.

x_1 kann höchstens den Wert $30/5 = 6$ annehmen, x_4 würde dann 0. x_4-Zeile ist daher die Pivotzeile.

Wir nehmen x_1 in die Basis auf, dafür wird x_4 aus der Basis herausgenommen. Dies ist der Basisaustausch.

Pivotspalte und Pivotzeile schneiden sich im Pivotelement, hier $a_{21} = 5$. Wir teilen die Pivotzeile durch das Pivotelement. Damit entsteht

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 6$$

Aus dieser Gleichung folgt $x_1 = 6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$. Dies setzen wir in alle übrigen Gleichungen ein.

Fortsetzung Beispiel 3.2.

Für die erste Zeile erhalten wir $\left(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4\right) + x_2 + x_3 = 10$. Dies ergibt $\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 4$.

Die dritte Zeile bleibt unverändert, da x_1 dort nicht auftritt.

Die Zielfunktionszeile wird zu $-30(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 25x_2 + z = 0$, also $-13x_2 + 6x_4 + z = 180$.

Jetzt können wir das neue Tableau aufstellen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	0	-13	0	6	0	1	180

Fortsetzung Beispiel 3.2.

Durch Vertauschen der Spalten für x_1 und x_4 können wir das Tableau wieder in die übliche Form bringen:

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	z	**b**
x_3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	4
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	9
z	6	-13	0	0	0	1	180

Die zugehörige Ecke ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Fortsetzung Beispiel 3.2.

Der nächste Austauschschritt liefert das Tableau:

	x_4	x_3	x_2	x_1	x_5	b_i
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{20}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{10}{3}$
x_5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{7}{3}$
z	$\frac{5}{3}$	$\frac{65}{3}$	0	0	0	$\frac{800}{3}$

Das heißt in der Ecke $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ wird das Optimum mit $z = \frac{800}{3}$ angenommen.

Fazit für Beispiel 3.2

- Wir dividieren also die Pivotzeile durch den Pivotwert.
- Zu den übrigen Zeilen addieren wir ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass in der Pivotspalte Nullen entstehen (analog zum Gaußalgorithmus).
- optionale Spaltenvertauschung, um wieder die reine kanonische Form zu erlangen
- Aus der Spalte $\mathbf{b}$ und den Basisvariablen ergibt sich die Ecke.
- Solange in der Zielfunktionszeile Koeffezienten < 0 auftreten, ist eine Verbesserung möglich.
- Der Algorithmus terminiert, wenn in der Zielfunktionszeile alle Koeffizienten ≥ 0 sind.

Kanonische Form

- Dieses Vorgehen funktioniert in der gezeigten Weise nur, wenn zu Beginn ein kanonisches Maximumproblem vorliegt, d.h. ein Problem der Form

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ u.d.N. } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

  und zusätzlich $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ gilt.
- Fur dieses kanonische Maximumproblem erhalten wir mit Hilfe von m Schlupfvariablen ein Problem in kanonischer Normalform.
- Die erste Basislösung ist dann durch die Schlupfvariablen bestimmt (siehe Beispiel 3.1).
- Wegen $\mathbf{b} \geq 0$ ist diese Basislösung zulässig und stellt damit eine Ecke (die Startecke) dar.

Starttableau für kanonisches Maximumproblem

BV	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	z	$\mathbf{b}$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$\cdots$	1	0	b_m
z	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	1	0

Definition 3.3

Für $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ heißt solch ein Tableau primal zulässig.

Bemerkung: Da sich die Spalte z nie ändert, können wir auf diese Spalte im Tableau auch verzichten.

Primaler Simplexalgorithmus

Algorithmus 3.4

Es liege ein kanonisches Maximumproblem ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) vor mit n Variablen und m Nebenbedingungen, also n Struktur- und m Schlupfvariablen in Normalform.

Start: Ecke des Starttableaus ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit $z = 0$. Schlupfvariablen sind BV, Strukturvariablen sind NBV.

Fortsetzung Algorithmus 3.4.

Starttableau:

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_t & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+s} & \cdots & x_{n+m} & b_i \\
\hline
x_{n+1} & a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,t} & \cdots & a_{n+1,n} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_s & a_{s,1} & \cdots & a_{s,t} & \cdots & a_{s,n} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n+m} & a_{n+m,1} & \cdots & a_{n+m,t} & \cdots & a_{n+m,n} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_m \\
\hline
z & -c_1 & \cdots & -c_t & \cdots & -c_n & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
$$

Von hier ab stehen Indices nicht für eine Spalten- oder Zeilennummer, sondern für den Variablenindex in der entsprechenden Spalte- bzw. Zeile des Simplextableaus.

Fortsetzung Algorithmus 3.4.

Wahl der Pivotspalte: Ist die Zielfunktionszeile von der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccccc|ccc|c} \hline z & d_1 & \cdots & d_t & \cdots & d_n & 0 & \cdots & 0 & d \end{array}$$

mit $d_j \geq 0, (j = 1, \ldots, n)$, so liegt eine Optimallösung vor.
Andernfalls machen wir eine Spalte t mit negativem d_t zur Pivotspalte und die NBV x_t zur BV.

Wahl der Pivotzeile: Sind in der Pivotspalte alle $a_{i,t} \leq 0$, so wächst z unbeschränkt, da x_t unbeschränkt wachsen kann. Es gibt dann keine Optimallösung.

Andernfalls bestimmen wir eine Zeile s durch

$$\frac{b_s}{a_{s,t}} = \min_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_{i,t}} \text{ für } a_{i,t} > 0$$

Die NBV x_t wird BV und bekommt den Wert $\frac{b_s}{a_{s,t}}$.
Die bisherige BV x_s wird NBV und nimmt den Wert 0 an.

Fortsetzung Algorithmus 3.4.

Austauschschritt: Das neue Tableau lautet: Linke Hälfte:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_t & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & a_{1,1} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} - \frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_t & \frac{a_{s,1}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{s,n}}{a_{s,t}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_m & a_{m,1} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{m,n} - \frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} a_{s,n} & \\
\hline
z & d_1 - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,1} & \cdots & 0 & \cdots & d_n - \frac{d_t}{a_{s,t}} a_{s,n} &
\end{array}
$$

Fortsetzung Algorithmus 3.4.

Rechte Hälfte:

$$
\cdots
\begin{array}{|ccccc|c}
x_{n+1} & \cdots & x_s & \cdots & x_{n+m} & b_i \\
\hline
1 & \cdots & -\frac{a_{1,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & b_1 - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{1,t} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \frac{1}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & \frac{b_s}{a_{s,t}} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\frac{a_{m,t}}{a_{s,t}} & \cdots & 1 & b_m - \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{m,t} \\
\hline
0 & \cdots & -\frac{d_t}{a_{s,t}} & \cdots & 0 & d - \frac{b_s}{a_{s,t}} d_t
\end{array}
$$

Terminierung: Wenn alle Koeffizienten der Zielfunktionszeile nichtnegative Werte haben, beschreibt das Tableau eine optimale Ecke. Rechts unten steht dann z^*.

Andernfalls vertauschen wir die Spalten, so dass das Tableau wieder kanonische Form annimmt. Wir beginnen nun wieder von vorne.

Eigenschaften des primalen Simplexalgorithmus

Satz 3.5

Das r-te Tableau beim Simplexalgorithmus sei primal zulässig. Wählen wir die Pivotspalte und die Pivotzeile gemäß Algorithmus 3.4, so ist das $(r+1)$-te Tableau wieder primal zulässig, und es gilt $z^{(r+1)} \geq z^{(r)}$.

Beweis.

Wir müssen $b_l^{(r+1)} \geq 0$ für $1 \leq l \leq m$ zeigen. Nach Algorithmus 3.4 ist dies für die Pivotzeile s erfüllt, denn es gilt

$$b_s^{(r+1)} = \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}}$$

und $a_{s,t} > 0$. Wir brauchen uns also nur noch die Zeilen $l \neq s$ anzuschauen.

Fortsetzung Beweis zu Satz 3.5.

Für $l \neq s$ gilt

$$b_l^{(r+1)} = b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t}$$

Hierbei bezeichnet t den Index der Pivotspalte.
Für $a_{l,t} \leq 0$ folgt $b_l^{(r+1)} \geq b_l^{(r)} \geq 0$. Wir müssen also nur noch den Fall $a_{l,t} > 0$ betrachten.
Hier gilt nach der Regel zur Wahl der Pivotzeile

$$\begin{aligned} & \frac{b_l^{(r)}}{a_{l,t}} \geq \frac{b_s}{a_{s,t}} \\ \Rightarrow \quad & b_l^{(r)} \geq \frac{b_s}{a_{s,t}} a_{l,t} \\ \Rightarrow \quad & b_l^{(r+1)} = b_l^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} a_{l,t} \geq 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 3.5.

Wegen $d_t^{(r)} \leq 0$, $b_s^{(r)} \geq 0$ und $a_{s,t} > 0$ folgt außerdem

$$z^{(r+1)} = z^{(r)} - \frac{b_s^{(r)}}{a_{s,t}} d_t^{(r)} \geq z^{(r)}.$$

Bemerkung: Der Austauschschritt im primalen Simplexalgorithmus wird als primaler Austauschschritt bezeichnet.

Beispiel zum primalen Simplexalgorithmus

Beispiel 3.6

In einem Betrieb sind drei Maschinen vorhanden, die für die Herstellung zweier Produkte benötigt werden. Bei der Produktion müssen die Produkte auf mehreren Maschinen bearbeitet werden, wobei die folgenden Bearbeitungszeiten anfallen:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 480 Minuten. Der Ertrag pro Einheit beträgt 10 € für Produkt A und 40 € für Produkt B.

Welche Anzahl der Produkte ist täglich zu fertigen, so dass der Ertrag maximal wird?

Fortsetzung Beispiel 3.6.

Mathematische Modellierung:

x_1 produzierte Menge von Produkt A
x_2 produzierte Menge von Produkt B

LP:

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, x_2) = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} 40x_1 + 24x_2 & \leq & 480 \\ 24x_1 + 48x_2 & \leq & 480 \\ 60x_2 & \leq & 480 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 3.6.

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	24	1	0	0	0	480
x_4	24	48	0	1	0	0	480
x_5	0	60	0	0	1	0	480
z	-10	-40	0	0	0	1	0

2. Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	40	0	1	0	$-2/5$	0	288
x_4	24	0	0	1	$-4/5$	0	96
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	-10	0	0	0	$2/3$	1	320

Fortsetzung Beispiel 3.6.

3.Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360

Also ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine optimale Lösung.

Opportunitätskosten und Schattenpreise

Das Endtableau von Beispiel 3.6 entspricht dem LGS:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & x_3 & -\frac{5}{3}x_4 & +\frac{14}{15}x_5 & & = & 128 \\
x_1 & & & +\frac{1}{24}x_4 & -\frac{1}{30}x_5 & & = & 4 \\
 & x_2 & & & +\frac{1}{60}x_5 & & = & 8 \\
 & & & \frac{5}{12}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & +z & = & 360
\end{array}
$$

Aufgelöst nach den Basisvariablen entsteht

$$
\begin{array}{ccrcc}
x_3 & = & 128 & +\frac{5}{3}x_4 & -\frac{14}{15}x_5 \\
x_1 & = & 4 & -\frac{1}{24}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 \\
x_2 & = & 8 & & -\frac{1}{60}x_5 \\
z & = & 360 & -\frac{5}{12}x_4 & -\frac{1}{3}x_5
\end{array}
$$

- Maschine 2 ($x_4 = 0$) und Maschine 3 ($x_5 = 0$) sind voll ausgelastet,
- dagegen steht Maschine 1 pro Tag $x_3 = 128$ Minuten still.
- Der Gewinn würde sich um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € pro Maschinenminute bei Maschine 2 bzw. 3 verringern,
- bzw. um $\frac{5}{12}$ € bzw. $\frac{1}{3}$ € erhöhen, wenn eine Maschinenminute mehr zur Verfügung stehen würde.
- Diese Werte nennen wir Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise.
- Sie entsprechen dem entgangenen Gewinn durch die nicht mehr verfügbare Kapazität
- bzw. den Preisen, die der Hersteller bereit wäre, für eine Maschinenminute von Maschine 2 bzw. 3 zu zahlen.

Unbeschränkte LPs

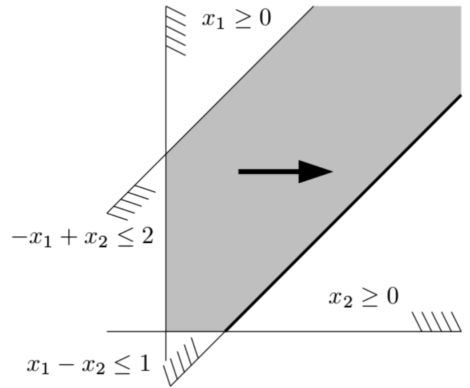
Beispiel 3.7

Wir betrachten das folgende LP:

$$\max x_1$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Fortsetzung Beispiel.

Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	1	-1	1	0	1
x_4	-1	1	0	1	2
z	-1	0	0	0	0

Tableau nach einer Iteration:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	1	-1	1	0	1
x_4	0	0	1	1	3
z	0	-1	1	0	1

In der x_2-Spalte ist kein Eintrag positiv, daher kann das für den Simplexalgorithmus erforderliche Minimum nicht gebildet werden.

Fortsetzung Beispiel.

Andere Sichtweise: Minimum $= \infty$, d. h. x_2 kann beliebig groß werden.
Dies sehen wir auch am zugehörigen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 3 \\
\hline
 & & -x_2 & + & x_3 & & & + & z & = & 1
\end{array}$$

Der Zielfunktionswert z ist damit unbeschränkt, das LP hat keine Lösung.

Genauer: Für ein beliebig großes $t \geq 0$ erhalten wir eine zulässige Lösung, wenn wir $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_1 = 1 + t$ und $x_4 = 3$ setzen.

Dies entspricht dem Strahl:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

Fazit zu unbeschränkten LPs

- Ein LP mit nicht leerem zulässigen Bereich ist genau dann unbeschränkt, wenn während des Simplexalgorithmus eine Pivotspalte keine positiven Werte hat.
- Aus dem Tableau kann dann ein Strahl kontruiert werden, der zulässig ist und auf dem die Zielfunktion nicht beschränkt ist.

Entartete Ecken

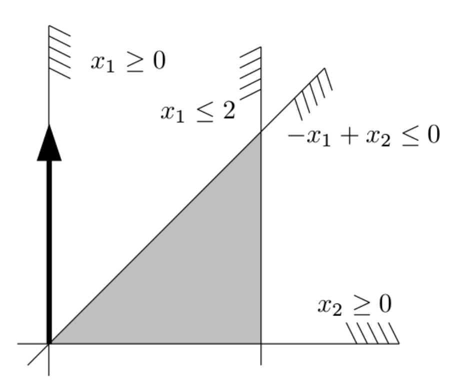
Beispiel 3.8

Wir betrachten das folgende LP:

$$\max x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Fortsetzung Beispiel.

Das Starttableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	-1	1	1	0	0
x_4	1	0	0	1	2
z	0	-1	0	0	0

Pivotspalte ist x_2, Pivotzeile ist x_3, neue Basisvariable $x_2 = 0$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_2	-1	1	1	0	0
x_4	1	0	0	1	2
z	-1	0	1	0	0

Beide Tableaus entsprechen der Ecke $(0, 0, 0, 2)$, aber mit unterschiedlichen Basen.

Fortsetzung Beispiel.

Das nächste Tableau liefert die optimale Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_2	0	1	1	1	2
x_1	1	0	0	1	2
z	0	0	1	1	2

Fazit:

- Evtl. kein Übergang zu einer anderen Ecke, sondern nur zu einer anderen Basis.
- Dabei keine Verbesserung des Zielfunktionswertes.

Zyklen im Simplexalgorithmus

- Bisher haben wir nicht spezifiziert, welche Spalte beim primalen Simplexalgorithmus Pivotspalte werden soll.
- Eine übliche Wahl für die Pivotspalte s:

$$-c_s = \min\{c_j | c_j < 0\}$$

- Bei entarteten Basislösungen ist damit aber nicht garantiert, dass der Simplexalgorithmus terminiert.
- Prinzipiell möglich, wenn auch unwahrscheinlich: Es treten zyklisch immer wieder die gleichen zulässigen Basislösungen auf.

Beispiel 3.9

$$\max z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rrrrcl} 0.5x_1 & -5.5x_2 & -2.5x_3 & +9x_4 & \leq & 0 \\ 0.5x_1 & -1.5x_2 & -0.5x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & & & & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	**b**
x_5	0.5	−5.5	−2.5	9	1	0	0	0	0
x_6	0.5	−1.5	−0.5	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	1
z	−10	57	9	24	0	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 3.9.

Für Starttableau: Pivotspalte: x_1, Pivotzeile: x_5

Daraus können nun die nachfolgenden Basislösungen entstehen: Tafel ✎

- $BV^{(2)} = \{x_1, x_6, x_7\}$, Pivotspalte: x_2, Pivotzeile: x_6
- $BV^{(3)} = \{x_1, x_2, x_7\}$, Pivotspalte: x_3, Pivotzeile: x_1
- $BV^{(4)} = \{x_2, x_3, x_7\}$, Pivotspalte: x_4, Pivotzeile: x_2
- $BV^{(5)} = \{x_3, x_4, x_7\}$, Pivotspalte: x_5, Pivotzeile: x_5
- $BV^{(6)} = \{x_4, x_5, x_7\}$, Pivotspalte: x_6, Pivotzeile: x_4
- $BV^{(7)} = \{x_5, x_6, x_7\}$

Damit haben wir jetzt wieder das gleiche Tableau wie zu Beginn. Der Simplexalgorithmus würde nicht terminieren.

Alle Basislösungen beschreiben die gleiche Ecke!

Maßnahmen zur Vermeidung von Zyklen

Maßnahmen sind nur dann notwendig, wenn wir nicht zu einer neuen Ecke kommen.

- Protokollierung der Indexmenge der Basisvariablen.
  Tritt die gleiche Basislösung wieder auf, führen wir ein Backtracking durch, d.h. wählen eine andere Möglichkeit für die Pivotzeile oder -spalte.
- Die Bland'sche Anti-Zyklusregel garantiert Zyklenfreiheit:
  Wähle bei jedem Basiswechsel für die Pivotspalte und die Pivotzeile den jeweils kleinstmöglichen Index.

Beispiel 3.10 (Bland'sche Antizyklusregel)

Das 6-te Tableau von Beispiel 3.9 lautet:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	0
x_4	0.5	-1.5	-0.5	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	1
z	-22	93	21	0	0	-24	0	1	0

Statt x_6 wählen wir x_1 als Pivotspalte und damit x_4 als Pivotzeile. Dann lautet das neue Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	0	-4	-2	8	1	-1	0	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0	0
x_7	0	3	1	-2	0	-2	1	0	1
z	0	27	-1	44	0	20	0	1	0

Fortsetzung Beispiel 3.10.

Damit haben zwar keine neue Ecke, aber eine neue Basislösung. Nun wird x_3 die Pivotspalte und x_7 die Pivotzeile. Es entsteht:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\mathbf{b}$
x_5	0	2	0	4	1	-5	2	0	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	0	1
z	0	30	0	42	0	18	1	1	1

und damit ist das LP gelöst.

Lösung allgemeiner linearer Programme

Bisher: Für Anwendung des Simplexalgorithmus muss eine primal (oder eine dual zulässige) Basislösung vorliegen.

Für allgemeine lineare Programme können wir dies direkt nicht gewährleisten.

Im Folgenden: Wir leiten nun eine Methode her, mit der zu jedem LP, dass eine optimale Lösung hat, eine solche berechnet werden kann.

Allgemeine Form

Wir gehen von einem LP mit n Variablen und m Nebenbedingungen aus. Die Zielfunktion habe die Gestalt

$$\text{min} \;\; \text{oder} \;\; \text{max} \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} b_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

und Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für einige oder alle } j = 1, \ldots, n.$$

Anforderungen für primalen Simplex

- zu maximierende Zielfunktion
- nur Gleichheitsbedingungen
- Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen
- ein nichtnegativer Vektor auf der rechten Seite
- ein primal zulässiges Ausgangstableau in kanonischer Form, d.h. mit m Einheitsvektoren, die eine Basis bilden

Zielfunktion, rechte Seite, Vorzeichenbeschränkung

(1) Falls eine zu minimierende Zielfunktion vorliegt, multipliziere diese mit -1 und maximiere $-z$.

(2) Multipliziere alle Gleichungen und Ungleichungen der Nebenbedingungen mit $b_i < 0$ mit dem Faktor -1.

(3) Ersetze jede nicht vorzeichenbeschränkte Variable x_j durch zwei vorzeichenbeschränkte Variablen $x_j' \geq 0$ und $x_j'' \geq 0$ mit $x_j = x_j' - x_j''$.

Damit hat das lineare Programm die Gestalt:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m_1 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \text{für } i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i \quad \text{für } i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m_1 + m_2 + m_3
\end{aligned}$$

wobei $b_i \geq 0$ gilt und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Bemerkungen:

- n ist die Anzahl der Variablen nach Schritt (1) bis (3).
- m_1, m_2, m_3 bezeichnet dabei die Anzahl der $\leq$-, $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.
- $m := m_1 + m_2 + m_3$

Erzeuge Normalform

(4) Wandle jede $\leq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

(5) Wandle jede $\geq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

Alle Schlupfvariablen x_{n+i} sind vorzeichenbeschränkt, also $x_{n+i} \geq 0$. Jetzt haben wir Normalform, aber keine kanonische Normalform und damit noch kein primal zulässiges Tableau.

Künstliche Variablen

(6) Addiere zu jeder ursprünglichen (nach Schritt (3)) $\geq$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + y_k = b_i$$

(7) Addiere zu jeder ursprünglichen $=$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_k = b_i$$

Jetzt haben wir ein Simplextableau in kanonischer Form mit der Basislösung

- $x_{m+i} = b_i$
  für die x_{m+i} von ursprünglichen $\leq$-Nebenbedingungen und
- $y_k = b_k$
  für die ursprünglichen $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.

Problem: Nur wenn für alle künstlichen Variablen $y_k = 0$ gilt, ist dieses LP äquivalent zum ursprünglichen LP.

Zweite Zielfunktion

(8) Bilde aus den künstlichen Variablen die zusätzliche Zielfunktion

$$\min Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} y_k$$

Entsteht bei der Minimierung $Y = 0$, dann wird die Erweiterung nivelliert und wir haben eine zulässige Basislösung.

(9) Multipliziere die zusätzliche Zielfunktion mit dem Faktor -1, um eine Maximierung zu erhalten.

$$\max y = -Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} -y_k$$

(10) Löse alle Gleichungen mit künstlichen Variablen nach diesen auf

$$y_k = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{m+i} \right)$$

bzw.

$$y_k = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

und ersetze sie in der zweiten Zielfunktion durch die gewonnenen Ausdrücke.
Dieser Schritt dient dazu, die Koeffizienten der y_k in der Zielfunktionszeile zu 0 werden zu lassen, damit ein primal zulässiges Tableau vorliegt.

Insgesamt haben wir jetzt ein primal zulässiges Simplextableau vorliegen.

Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Algorithmus 3.11

Bearbeite das durch die Schritte (1) bis (10) aufgestellte Tableau in zwei Phasen:

1. Eröffnungsphase
   Maximiere die Zielfunktion $y = -Y$ mit Hilfe des primalen Simplexalgorithmus. Transformiere dabei die ursprüngliche Zielfunktion z stets mit.
   - Gilt für das Optimum $y < 0$, dann existiert keine zulässige Lösung für das ursprüngliche LP.
   - Gilt $y = 0$, dann streiche die Zeile mit der zweiten Zielfunktion und die künstlichen Variablen und fahre mit Phase 2 fort.
2. Optimierungsphase
   Maximiere die erste Zielfunktion mit dem primalen Simplex-Algorithmus.

Bemerkung

- In der Eröffnungsphase nähert man sich schrittweise einer Ecke der Menge $\mathcal{X}$ der zulässigen Lösungen.
- In der Optimierungsphase bestimmt man ausgehend von der gefundenen Ecke aus der Eröffnungsphase eine optimale Lösung des LP.

Beispiel: Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Beispiel 3.12

Wir betrachten das folgende LP:

$$\min Z = -x_1 - 2x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & \quad \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & \quad \text{(II)} \\ x_1 & - & x_2 & = & -3 & \quad \text{(III)} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

(1)

$$\max z = -Z = x_1 + 2x_2$$

Fortsetzung Beispiel.

(2) Wir multiplizieren (III) mit -1 und erhalten die neue Gleichung (III):

$$-x_1 + x_2 = 3$$

(3) entfällt, alle Variablen sind vorzeichenbeschränkt

(4,5) Wir führen für (I) und (II) Schlupfvariablen ein:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 & \quad \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & = & 2 & \quad \text{(II)} \end{array}$$

(6,7) Künstliche Variablen für (II) und (III):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & + & y_1 & = & 2 & \quad \text{(II)} \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & y_2 & = & 3 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

(8) Zusätzliche Zielfunktion:

$$\min Y = y_1 + y_2$$

(9) Optimierungsrichtung der zusätzlichen Zielfunktion herumdrehen:

$$\max y = -Y = -y_1 - y_2$$

(10) Wir lösen (II) und (III) nach y_1 bzw. y_2 auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & = & 2 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ y_2 & = & 3 & + & x_1 & - & x_2 & & \end{array}$$

und setzen die Terme der rechten Seiten in die Zielfunktion ein. Hierdurch entsteht

$$y = -5 + x_1 + 2x_2 - x_4$$

Fortsetzung Beispiel.

Damit können wir das 1. Tableau für die Eröffnungsphase aufstellen:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	1	1	1	0	0	0	8
y_1	2	1	0	-1	1	0	2
y_2	-1	1	0	0	0	1	3
z	-1	-2	0	0	0	0	0
y	-1	-2	0	1	0	0	-5

Wir maximieren y und wählen dazu x_2 als Pivotspalte. Damit ist y_1 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	-1	0	1	1	-1	0	6
x_2	2	1	0	-1	1	0	2
y_2	-3	0	0	1	-1	1	1
z	3	0	0	-2	2	0	4
y	3	0	0	-1	2	0	-1

Man beachte, dass auch die Zeile für die ursprüngliche Zielfunktion angepasst wurde. Jetzt bleibt nur x_4 als Pivotspalte, dann ist y_2 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

3. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	2	0	1	0	0	-1	5
x_2	-1	1	0	0	0	1	3
x_4	-3	0	0	1	-1	1	1
z	-3	0	0	0	0	2	6
y	0	0	0	0	1	1	0

Damit ist die Eröffnungsphase abgeschlossen und wir haben mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Startecke für die Optimierungsphase.

Fortsetzung Beispiel.

Wir streichen die künstlichen Variablen und die zusätzliche Zielfunktionszeile und erhalten damit das 1. Tableau der Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	2	0	1	0	5
x_2	-1	1	0	0	3
x_4	-3	0	0	1	1
z	-3	0	0	0	6

Es liegt noch keine optimale Lösung vor.
Pivotspalte wird x_1, Pivotzeile x_3.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	$1/2$	0	$5/2$
x_2	0	1	$1/2$	0	$11/2$
x_4	0	0	$3/2$	1	$17/2$
z	0	0	$3/2$	0	$27/2$

Damit terminiert der Zweiphasen-Simplexalgorithmus.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ ist eine optimale Lösung des originären LP,

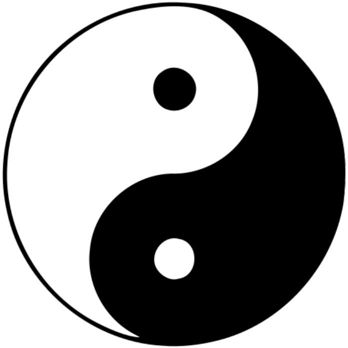
mit Zielfunktionswert $Z = -\frac{27}{2}$.

Zusammenfassung

- Primaler Simplexalgorithmus für LPs in kanonischer Maximumsform.
- Start mit zulässiger Basislösung bzw. Ecke, pro Iteration ein Basisaustausch.
- Opportunitätskosten bzw. Schattenpreise bewerten die knappen Ressourcen.
- Vermeidung von Zyklen z.B. mit der Bland'schen Anti-Zyklusregel.
- Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus zur Lösung allgemeiner linearer Programme.

Kapitel 4

Dualität



Inhalt

Minimumproblem

Definition 4.1

Ein LP der Form

Minimiere $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 \, (j = 1, \ldots, n)$

heißt Minimumproblem. Kompakt:

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{D}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Simplextableau für Minimumproblem

- Für die Anwendung des primalen Simplexalgorithmus benötigen wir ein Maximumproblem in kanonischer Form.
- Wir können die Zielfunktion umformen zu $\max z := -Z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und
- die Nebenbedingungen zu $-\mathbf{D}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$.
- Problem: Wenn vorher $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ galt, dann ist die Basislösung des Starttableaus nicht zulässig.

Mit $\mathbf{A} := -\mathbf{D}$ entsteht das Starttableau

BV	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	z	$\mathbf{b}$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$\cdots$	0	0	$-b_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$\cdots$	1	0	$-b_m$
z	c_1	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	1	0

Der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ist damit zwar eine Basislösung, aber keine zulässige Basislösung und somit auch keine Ecke von $\mathcal{X}$.

Dual zulässiges Tableau

Definition 4.2

Ein Tableau der Form von Folie 202 mit $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ heißt dual zulässig.

Die zugehörige Basislösung ist eine dual zulässige Basislösung.

Bemerkung: Wegen $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ erfüllt ein dual zulässiges Tableau die Optimalitätsbedingung des Simplexalgorithmus.

Grundidee des dualen Simplexalgorithmus

- Idee: Durch Pivotieren unter Wahrung der dualen Zulässigkeit ($\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$) in Richtung primaler Zulässigkeit gehen.
- Wenn wir $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ erreichen, dann haben wir eine zulässige Basislösung und damit eine Ecke.
- Wegen $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ ist diese Ecke dann sogar eine optimale Lösung!

Dualer Simplex: Wahl der Pivotzeile und -spalte

Wir wählen als erstes die Pivotzeile s durch

$$-b_s^{(r)} = \min\{-b_i^{(r)} \mid -b_i^{(r)} < 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Anschließend die Pivotspalte t durch

$$-\frac{c_t^{(r)}}{a_{s,t}^{(r)}} = \min\left\{ -\frac{c_j^{(r)}}{a_{s,j}^{(r)}} \,\middle|\, a_{s,j}^{(r)} < 0 \right\}.$$

Damit ist das gewählte Pivotelement stets negativ.

Dualer Simplexalgorithmus

Satz 4.3

Das r-te Tableau sei dual zulässig. Wählen wir Pivotzeile und Pivotspalte gemäß Folie 205 und führen einen Basiswechsel gemäß Algorithmus 3.4 durch, dann ist das $(r+1)$-te Tableau wieder dual zulässig und für den Zielfunktionswert gilt $z^{(r+1)} \leq z^{(r)}$.

Bemerkungen:

- Der Basiswechsel im dualen Simplexalgorithmus wird als dualer Austauschschritt bezeichnet.
- Beim dualen Simplexalgorithmus wird nun solange ein dualer Austauschschritt durchgeführt, bis das Tableau auch primal zulässig ist, also $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ gilt.
- Ein Tableau ist immer genau dann optimal, wenn es primal und dual zulässig ist.

Beispiel zum dualen Simplexalgorithmus

Beispiel 4.4

Gegeben sei das LP

$$\min Z = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & -2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 4.4.

Umformung ergibt

$$\max z = -Z = -x_1 - x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -4 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	-1	2	1	0	0	0	-1
x_4	-1	-2	0	1	0	0	-4
x_5	-1	-1	0	0	1	0	2
z	1	1	0	0	0	1	0

Pivotzeile: x_4, Pivotspalte: x_2, Pivotelement: -2

Fortsetzung Beispiel 4.4.

2. Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	-2	0	1	1	0	0	-5
x_2	$1/2$	1	0	$-1/2$	0	0	2
x_5	$-1/2$	0	0	$-1/2$	1	0	4
z	$1/2$	0	0	$1/2$	0	1	-2

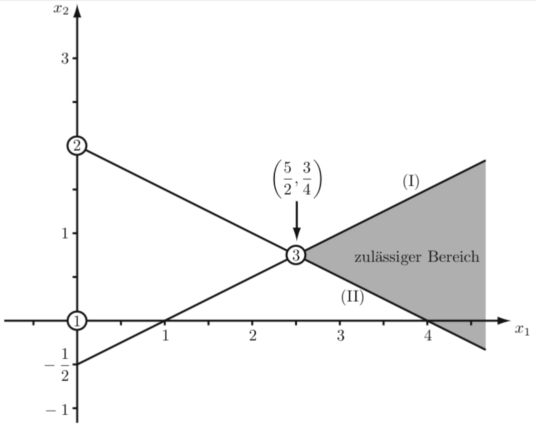
Pivotzeile: x_3, Pivotspalte: x_1, Pivotelement: -2

3. Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	0	0	$5/2$
x_2	0	1	$1/4$	$-1/4$	0	0	$3/4$
x_5	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1	0	$21/4$
z	0	0	$1/4$	$3/4$	0	1	$-13/4$

Fortsetzung Beispiel 4.4.

Lösung: $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$ mit $Z = -z = \frac{13}{4}$.



Primal-dualer Simplexalgorithmus

Primaler und dualer Simplexalgorithmus sind nicht nur zwei alternative Verfahren. Ein großer Vorteil ergibt sich beim Zusammenspiel der beiden Varianten.

Wenn eine Basislösung nicht primal aber dual zulässig ist, können wir durch duale Austauschschritte zu einer primal zulässigen Lösung kommen.

Beispielanwendung:

- Nachträgliches Hinzufügen von Nebenbedingungen bzw. Variablen
- Dies nutzen wir im nächsten Semester bei Schnittebenenverfahren bzw. großen Problemen in der kombinatorischen Optimierung.

Beispiel: nachträglich Nebenbedingung hinzufügen

Beispiel 4.5

Wir wollen zunächst das folgende LP lösen:

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau für primalen Simplexalgorithmus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	2	1	1	0	10
x_4	0	1	0	1	3
z	-2	-3	0	0	0

Fortsetzung Beispiel.

Nach erstem primalen Austauschschritt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	2	0	1	-1	7
x_2	0	1	0	1	3
z	-2	0	0	3	9

Nach zweitem primalen Austauschschritt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$7/2$
x_2	0	1	0	1	3
z	0	0	1	2	16

Zunächst optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (7/2, 3)$.

Fortsetzung Beispiel.

Jetzt führen wir die zusätzliche Nebenbedingung

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

ein, die von $\mathbf{x}^*$ nicht erfüllt wird. Mit zusätzlicher Schlupfvariable $x_5 \geq 0$ entsteht die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 8.$$

Wir drücken nun die Basisvariablen x_1 und x_2 durch Nichtbasisvariablen aus:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{2} \\ x_2 + x_4 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -x_4 + 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zusätzliche Nebenbedingung

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + x_5 = -\frac{3}{2}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Das erweiterte Simplextableau lautet damit

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	$-1/2$	$-3/2$	1	$-3/2$
z	0	0	1	2	0	16

Dieses Tableau ist nicht primal aber dual zulässig. Ein dualer Austauschschritt liefert die optimale Lösung für das erweiterte LP:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$2/3$	0	$-1/3$	4
x_2	0	1	$-1/3$	0	$2/3$	2
x_4	0	0	$1/3$	1	$-2/3$	1
z	0	0	$1/3$	0	$4/3$	14

Beispiel: nachträglich Variable hinzufügen

Beispiel 4.6

Wir wollen zunächst das folgende LP lösen:

$$\min 10x_1 + 3x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & & & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau für dualen Simplexalgorithmus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
x_3	-2	0	1	0	-2	(I)
x_4	-1	-1	0	1	-3	(II)
z	10	3	0	0	0	(III)

Fortsetzung Beispiel.

Operationen $(II) = (II) * (-1)$ und $(III) = (III) - 3 * (II)$ ergeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
x_3	-2	0	1	0	-2	(I)
x_2	1	1	0	-1	3	(II)
z	7	0	0	3	-9	(III)

Operationen $(I) = (I) * (-1/2)$, $(II) = (II) - (I)$ und $(III) = (III) - 7 * (I)$ ergeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	1	0	$-1/2$	0	1
x_2	0	1	$1/2$	-1	2
z	0	0	$7/2$	3	-16

Zunächst optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (1, 2)$.

Fortsetzung Beispiel.

Jetzt erweitern wir das ursprüngliche LP um eine Variable x_5:

$$\min 10x_1 + 3x_2 + 8x_5$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_5 & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_5 & \geq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & & 0 & \end{array}$$

Auf die neue ursprüngliche Tableauspalte $\begin{array}{|r|} x_5 \\ \hline -1 \\ -2 \\ \hline 8 \end{array}$ wenden wir die gleichen Operationen an, wie auf das ursprüngliche Tableau. Dies entspricht der Multiplikation mit den angewendeten Elementarmatrizen.

Fortsetzung Beispiel.

So entsteht das um die Variable x_5 erweiterte Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	1
x_2	0	1	$1/2$	-1	$3/2$	2
z	0	0	$7/2$	3	$-3/2$	-16

Dieses Tableau ist nicht dual aber primal zulässig. Ein primaler Austauschritt liefert die optimale Lösung für das erweiterte LP:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$1/2$	$1/3$
x_5	0	$2/3$	$1/3$	$-2/3$	1	$4/3$
z	0	1	4	2	0	-14

Fortsetzung Beispiel.

Die Matrix zur Transformation des Starttableaus in das zunächst optimale lautet

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Herleitung Übungsaufgabe ✎. Probe:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{7}{2} & 3 & -16 \end{array}\right)$$

Duales Lineares Programm

Zu jedem Optimierungsproblem existiert ein korrespondierendes duales Optimierungsproblem.

Definition 4.7

Gegeben sei das folgende LP als Maximumproblem (primales lineares Programm):

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Dann lautet das zugehörige duale lineare Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Das Paar dieser beiden LPs nennen wir die symmetrische Form der Dualität.

Bemerkungen zum dualen Programm (1)

- Das duale Programm hat so viele Variablen, wie das primale Programm Nebenbedingungen hat.
- Das duale Programm hat so viele Nebenbedingungen, wie das primale Programm Variablen hat.
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$

Bemerkungen zum dualen Programm (2)

Zum Aufstellen des dualen Programms werden die folgenden Schritte ausgeführt:

- Bilden einer Zielfunktion aus dem Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seite der Nebenbedingungen,
- Transponieren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und
- Erzeugung von $\geq$-Nebenbedingungen mit $\mathbf{A}^T$ und dem Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}$ des primalen Programms als rechte Seite.

Beispiel zur Dualität

Beispiel 4.8

Wir betrachten als primales Programm das LP von Beispiel 3.6. Das zugehörige duale Programm lautet dann:

$$\min Z = 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} 40u_1 & + & 24u_2 & & & \geq & 10 \\ 24u_1 & + & 48u_2 & + & 60u_3 & \geq & 40 \\ & & & & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Das Maximumproblem geht also in ein Minimumproblem über.

Dualität für ein LP in Normalform

Satz 4.9

Gegeben sei das primale LP in Normalform (mit den üblichen Dimensionen):

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Dann lautet des zugehörige duale Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Definition 4.10

Das Paar der beiden LPs von Satz 4.9 nennen wir die asymmetrische Form der Dualität.

Beweis.

Wir stellen das primale LP

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

als Maximumproblem dar. Hierzu wandeln wir als erstes die $=$-Nebenbedingungen in zwei Nebenbedingungen der Form $\leq$ und $\geq$ um.

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 4.9.

Durch Multiplikation der $\geq$-Nebenbedingunden mit -1 entsteht dann das Maximumproblem:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Zu diesem Maximumproblem können wir das duale LP aufstellen:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{v} - \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{A}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{v}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ erhalten wir dann das duale lineare Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Bemerkungen

- Statt die Dualität wie in Definition 4.7 zu definieren, hätten wir auch die Dualität über die Beziehung in Satz 4.9 definieren können.
  Diese beiden Formen der Dualität sind äquivalent!
- Der Beweis von Satz 4.9 macht deutlich, wie wir allgemein für ein primales LP das zugehörige duale LP bestimmen können:
  (i) Transformation in ein Maximumproblem
  (ii) Aufstellen des dualen LP gemäß Definition 4.7
  (iii) Vereinfachungen anwenden
- Zur Bestimmung des dualen LPs können wir statt Definition 4.7 natürlich auch Satz 4.9 verwenden.

Beispiele für duale LPs

Beispiel 4.11

Für das primale LP

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

lautet das duale LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Beispiel 4.12

Das LP von Beispiel 3.6 lautet in Normalform:

$$\max 10x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
40x_1 & + & 24x_2 & + & x_3 & & & & & = & 480 \\
24x_1 & + & 48x_2 & + & & & x_4 & & & = & 480 \\
 & & 60x_2 & & & & & + & x_5 & = & 480 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 4.12.

Das zugehörige duale LP ist dann:

$$\min 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr}
40u_1 & + & 24u_2 & & & \geq & 10 \\
24u_1 & + & 48u_2 & + & 60u_3 & \geq & 40 \\
u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Obere Schranke für die Zielfunktion

Das folgende Beispiel soll einen stärkeren Einblick in das Konzept der Dualität geben.

Beispiel 4.13

Wir betrachten wieder das LP von Beispiel 3.6:

$$\max z = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr}
40x_1 & + & 24x_2 & \leq & 480 \\
24x_1 & + & 48x_2 & \leq & 480 \\
 & & 60x_2 & \leq & 480 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 4.13.

Wir multiplizieren nun die erste NB mit $u_1 = \frac{1}{4}$, die dritte NB mit $u_3 = \frac{34}{60}$ und addieren diese beiden Ungleichungen:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 10x_1 & + & 6x_2 & \leq & 120 \\ (+) & & & 34x_2 & \leq & 272 \\ \hline (=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 392 \end{array}$$

☞ Auf der linken Seite der Summe steht die Zielfunktion.

Wir haben also, ohne das LP zu lösen, mit 392 eine obere Schranke für den maximalen Zielfunktionswert z hergeleitet.

Fortsetzung Beispiel 4.13.

Andere Faktoren können natürlich andere Schranken liefern. Für

$$u_1 = \frac{1}{8}, \quad u_2 = \frac{5}{24}, \quad u_3 = \frac{27}{60}$$

erhalten wir

$$\begin{array}{rrcrcr}
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\
 & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 100 \\
(+) & & & 27x_2 & \leq & 216 \\
\hline
(=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 376
\end{array}$$

mit 376 eine noch etwas bessere obere Schranke.

Interpretation der Dualität (1)

Wir verallgemeinern das Prinzip zur Herleitung oberer Schranken aus Beispiel 4.13:

- Für jede Nebenbedingung definieren wir einen nichtnegativen Faktor u_i, mit dem die i-te Nebenbedingung multipliziert wird. Der Vektor der u_i ist $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.
- Damit die Summe der gewichteten Nebenbedingungen eine obere Schranke für die Zielfunktion ist, müssen in der Summe die Faktoren der Variablen x_i größer oder gleich c_i sein. Dies entspricht $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$.
- Die obere Schranke ist dann $\sum_{i=1}^{m} u_i b_i = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$.
- Die beste obere Schranke ist die kleinste. Also versuchen wir $\mathbf{b}^T\mathbf{u}$ zu minimieren!

Interpretation der Dualität (2)

- Für $\leq$-Ungleichungen dürfen wir nur nichtnegative u_i verwenden,
- denn bei Multiplikation mit negativem u_i würde eine $\geq$-Ungleichung entstehen.
- Dagegen dürfen wir bei $=$-Nebenbedingungen auch negative u_i verwenden.
- Dies erklärt, warum bei der asymmetrischen Form der Dualität die Variablen des dualen Programms nicht vorzeichenbeschränkt sind.
- Allgemein: $\leq$- und $\geq$-Nebenbedingungen des primalen LP korrespondieren mit vorzeichenbeschränkten Variablen des dualen LP, $=$-Nebenbedingungen mit nicht vorzeichenbeschränkten Variablen.

Primales vs. duales LP

primales LP	duales LP
Maximierung	Minimierung
Kostenvektor	rechte Seite
rechte Seite	Kostenvektor
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^T$
$\leq$-Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≥ 0
Gleichung	freie Variable
$\geq$-Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≤ 0
Vorzeichenbeschränkung ≥ 0	$\geq$-Ungleichung
freie Variable	Gleichung

Weitere Beispiele zur Dualität

Beispiel 4.14

Wir betrachten das primale LP

$$\min 60x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1000 \\
x_1 & & & & & \geq & 300 \\
4x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & \leq & 7000 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Da es sich um ein Minimierungsproblem handelt, sind wir an unteren Schranken interessiert. In der Summe der Nebenbedingungen brauchen wir also ein $\geq$ und für die Koeffizienten der x_i muss $\leq c_i$ gelten.

Fortsetzung Beispiel 4.14.

Für $u_1 = 120$ und $u_3 = -10$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
 & 100x_1 & + & 100x_2 & + & 100x_3 & = & 100000 \\
(+) & -40x_1 & - & 90x_2 & - & 80x_3 & \geq & -70000 \\
\hline
(=) & 60x_1 & + & 10x_2 & + & 20x_3 & \geq & 30000
\end{array}$$

Für $u_1 = 30$ und $u_2 = 30$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
 & 30x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & = & 30000 \\
(+) & 30x_1 & & & & & \geq & 9000 \\
\hline
(=) & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & \geq & 39000
\end{array}$$

Bemerkung: Der minimale Zielfunktionswert beträgt 42000.

Fortsetzung Beispiel 4.14.

Allgemein lautet dann das duale LP

$$\max 1000u_1 + 300u_2 + 7000u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & u_2 & + & 4u_3 & \leq & 60 \\ u_1 & & & + & 9u_3 & \leq & 30 \\ u_1 & & & + & 8u_3 & \leq & 40 \end{array}$$
$$u_1 \in \mathbb{R},\, u_2 \geq 0,\, u_3 \leq 0$$

Ungleichungssystem

Gegeben sei ein System

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

von Ungleichungen (mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

- Hat das Ungleichungssystem eine Lösung?
- Wie können wir eine Lösung finden oder beweisen, dass keine Lösung existiert?

Eine Antwort auf diese Fragen kennen wir:

☞ Phase 1 des Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Problem: Für theoretische Betrachtungen eher ungeeignet.

Fourier-Motzkin-Elimination

- anderer Ansatz zur Lösung eines Ungleichungssystems
- Grundidee analog zur Gauß-Elimination: Sukzessive wird ein äquivalentes Ungleichungssystem mit einer Variable weniger konstruiert.
- Nachteil: Elimination einer Variablen führt zu einer erhöhten Anzahl an Ungleichungen.
- Aus den Ungleichungen mit einer Variablen können wir erkennen, ob das System lösbar ist oder nicht.
- Durch Rückwärtseinsetzen können wir im Fall der Lösbarkeit eine Lösung erzeugen.
- Die Fourier-Motzkin-Elimination ist insbesondere für theoretische Betrachtungen geeignet.

Das große Bild!

Wozu benötigen wir die Fourier-Motzkin-Elimination?

$$
\begin{aligned}
\text{Fourier-Motzkin-Elimination} &\implies \text{Farkas-Lemma-Variante} \\
&\implies \text{Farkas-Lemma} \\
&\implies \text{Starker Dualitätssatz}
\end{aligned}
$$

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (1)

Wir betrachten das folgende Ungleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12
\end{array}
$$

Wir wollen x eliminieren. Hierzu lösen wir alle Ungleichungen nach x auf.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
x & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
x & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
x & \geq & 7 & + & 5y & - & 2z \\
x & \geq & -4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z
\end{array}
$$

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (2)

Wir haben

- drei Ungleichungen, die x nach oben beschränken und
- zwei Ungleichungen, die x nach unten beschränken.

Wennn es eine Lösung des Ungleichungssystems gibt, dann muss

$$\begin{aligned} & \max\left\{7+5y-2z, -4+\frac{2}{3}y+2z\right\} \\ \leq \quad & \min\left\{5+\frac{5}{2}y-2z, 3+2y-z, 3-2y+\frac{1}{5}z\right\} \end{aligned}$$

gelten.

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (3)

Insbesondere muss jede Ungleichungskombination zwischen den min- und max-Ungleichungen erfüllt werden.

Damit erhalten wir ein äquivalentes Ungleichungssystem mit sechs Ungleichungen in den Variablen y und z:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z
\end{array}
$$

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (4)

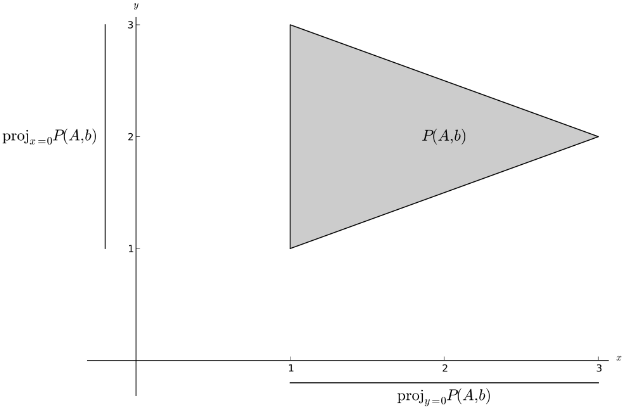
Zusammenfassung ergibt

$$\begin{array}{rcrcr}
\frac{5}{2}y & & & \leq & -2 \\
3y & - & z & \leq & -4 \\
7y & - & \frac{11}{5}z & \leq & -4 \\
-\frac{11}{6}y & + & 4z & \leq & 9 \\
-\frac{4}{3}y & + & 3z & \leq & 7 \\
\frac{8}{3}y & + & \frac{9}{5}z & \leq & 7
\end{array}$$

Damit haben wir ein äquivalentes Ungleichungssystem mit einer Variablen weniger.

Wie viele Ungleichungen hätten wir nach der Elimination von y?

Fourier-Motzkin-Elimination als Projektion eines Polyeders



Projektion von $P = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ auf eine Hyperebene der Form $H = \{\mathbf{x} | x_i = 0\}$.

Theorem zur Fourier-Motzkin-Elimination

Satz 4.15

Es sei $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *ein Ungleichungssystem mit* $n \geq 1$ *Variablen und* m *Ungleichungen.*

Dann existiert ein Ungleichungssystem $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *mit* $n-1$ *Variablen und höchstens* $\max\{m, m^2/4\}$ *Ungleichungen, das die folgenden Eigenschaften hat:*

1. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn* $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *eine Lösung hat.*
2. *Jede Ungleichung von* $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *ist eine positive Linearkombination von Ungleichungen des Systems* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

Beweis.

Wir unterteilen die Ungleichungen von $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ abhängig von der Variablen x_1 in drei Gruppen:

- $a_{i1} > 0$: Ceiling-Ungleichung
  $C :=$ Menge der Zeilenindices von Ceiling-Ungleichungen
- $a_{i1} < 0$: Floor-Ungleichung
  $F :=$ Menge der Zeilenindices von Floor-Ungleichungen
- $a_{i1} = 0$: Level-Ungleichung
  $L :=$ Menge der Zeilenindices von Level-Ungleichungen

O.B.d.A (durch Multiplizieren) gelte:

$$a_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in C \\ -1 & \text{falls } i \in F \\ 0 & \text{falls } i \in L \end{cases}$$

Fortsetzung Beweis.

Durch die Addition aller Paare von Ceiling- und Floor-Ungleichungen können wir x_1 eliminieren.

Sei $\mathbf{x}' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ und $\mathbf{a}'_i = (a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Dann werden durch die Addition der Ceiling- und Floor-Ungleichungen die Ungleichungen

$$\mathbf{a}'_j\mathbf{x}' + \mathbf{a}'_k\mathbf{x}' \leq b_j + b_k, \quad j \in C, k \in F \quad (*)$$

impliziert. Die Level-Ungleichungen können wir als

$$\mathbf{a}'_l\mathbf{x}' \leq b_l, \quad l \in L \quad (**)$$

schreiben.

Also: Wenn $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ eine Lösung hat, dann hat auch das System der Ungleichungen aus $(*)$ und $(**)$ eine Lösung.

Anzahl der Ungleichungen: $|C| \cdot |F| + |L|$

Fortsetzung Beweis.

Es sei nun $\mathbf{x}' = (x_2, \ldots, x_n)^T$ eine Lösung des Ungleichungssystems $(*), (**)$.

$(*)$ ist äquivalent zu

$$\mathbf{a}_k'\mathbf{x}' - b_k \le b_j - \mathbf{a}_j'\mathbf{x}' \quad j \in C, k \in F.$$

Dies impliziert

$$\max_{k \in F}\{\mathbf{a}_k'\mathbf{x}' - b_k\} \le \min_{j \in C}\{b_j - \mathbf{a}_j'\mathbf{x}'\}.$$

Sei x_1 ein beliebiger Wert zwischen diesen Grenzen. Damit folgt

$$\begin{array}{rcll} x_1 + \mathbf{a}_j'\mathbf{x}' & \le & b_j, & j \in C \\ -x_1 + \mathbf{a}_k'\mathbf{x}' & \le & b_k, & k \in F. \end{array}$$

Also erfüllt der Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ das Ungleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$.

Beispiel zur Fourier-Motzkin-Elimination

Beispiel 4.16

Ungleichungen:

$$x_2 - x_1 \geq 1, x_1 + 6x_2 \leq 15, 4x_1 - x_2 \geq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Wir eliminieren x_2. Aus den Ungleichungen erhalten wir

$$x_2 \geq x_1 + 1, x_2 \geq 0$$

und

$$x_2 \leq -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2}, x_2 \leq 4x_1 - 10$$

Fortsetzung Beispiel.

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 \le -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 \le 15 \\
0 \le 4x_1 - 10 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \ge \frac{5}{2} \\
x_1 + 1 \le -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 \le \frac{18}{14} \\
x_1 + 1 \le 4x_1 - 10 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \ge \frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

Widerspruch:

$$\frac{11}{3} \le x_1 \le \frac{18}{14}$$

Also ist dieses Ungleichungssystem nicht lösbar.

Farkas-Lemma

Satz 4.17

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt genau einer der beiden folgenden Aussagen:

(F1) *Es existiert ein* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

(F2) *Es existiert ein* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

Teilbeweis.

Wir zeigen hier nur, das höchstens eine der beiden Aussagen (F1) und (F2) gilt.

Wenn beide Aussagen gelten, dann folgt aus $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$:

$$(\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} \geq 0.$$

Andererseit gilt:

$$(\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0.$$

Widerspruch!

Der komplette Beweis des Farkas-Lemma folgt später.

Konvexer Kegel

Definition 4.18

Es seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

Dann ist der konvexe Kegel, der durch die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ erzeugt wird, die Menge

$$\text{cone}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \left\{ t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n \middle| \, t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0 \right\}.$$

Der konvexe Kegel ist die konvexe Hülle der Strahlen, die vom Ursprung aus durch die Punkte $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ gehen.

Geometrische Variante des Farkas-Lemma (1)

Satz 4.19

Es seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt genau einer der beiden folgenden Aussagen:

(F1') *Der Punkt* $\mathbf{b}$ *liegt in dem konvexen Kegel, der durch die Vektoren* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *erzeugt wird.*

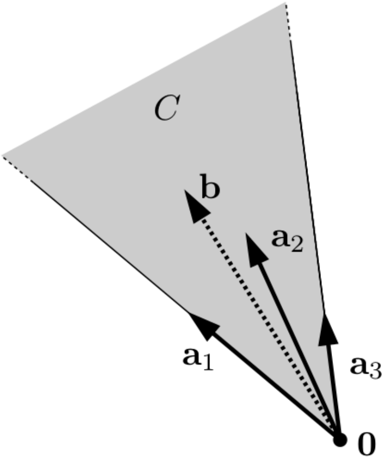
(F2') *Es existiert eine durch den Ursprung gehende Hyperebene* h *mit*

$$h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0\},$$

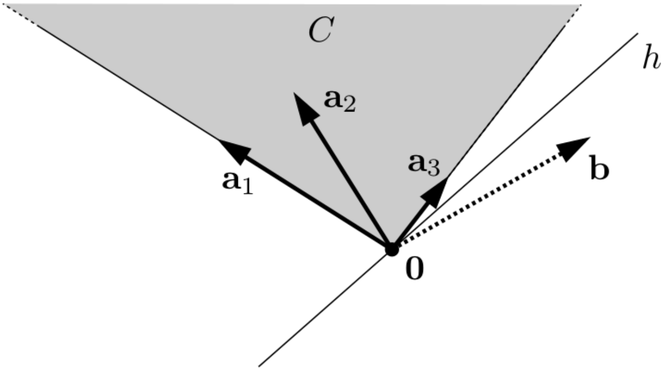
so dass der konvexe Kegel auf der einen und $\mathbf{b}$ *(strikt) auf der andere Seite der Hyperbene liegt, also*

$$\mathbf{y}^T \mathbf{a}_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \text{ und } \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$$

Geometrische Variante des Farkas-Lemma (2)



(F1′)



(F2′)

Farkas-Lemma in drei Varianten

Satz 4.20

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Das System* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(ii) *Das System* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(iii) *Das System* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(i) = Normalform, entspicht Satz 4.17
(ii) = Maximumproblem
(iii) = Ungleichungssystem

Beweis.

Der Beweis erfolgt mit den bekannten Techniken zur Umformung von LPs.

- (i) $\rightarrow$ (ii):
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$$
- (ii) $\rightarrow$ (i):
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}|\mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$
- (ii) $\rightarrow$ (iii):
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
- (iii) $\rightarrow$ (ii):
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}|-\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x}^+ \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}$$

Beweis des Farkas-Lemma

Wir beweisen Satz 4.20 (iii) mithilfe der Fourier-Motzkin-Elimination.

Beweis von Satz 4.20 (iii)

"$\Rightarrow$": Das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ habe eine Lösung und es gelte $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
Damit erhalten wir:

$$0 = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

"$\Leftarrow$": Jetzt habe das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ keine Lösung. Wir müssen nun einen Vektor $\mathbf{y}$ konstruieren, so dass gilt:

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0.$$

Wir nutzen vollständige Induktion über die Anzahl der Variablen.

Fortsetzung Beweis von Satz 4.20 (iii)

$n = 0$: In diesem Fall haben wir ein System $\mathbf{0} \leq \mathbf{b}$ mit $b_i < 0$ für ein i. Wir setzen $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$.

$n - 1 \to n$: Das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ habe $n \geq 1$ Variablen.

Mit der Fourier-Motzkin-Elimination erhalten wir ein äquivalentes System $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ in $n-1$ Variablen.

Da das System nicht lösbar ist, existiert nach I.V. ein Vektor $\mathbf{y}'$ mit

$$\mathbf{y}' \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}'^T\mathbf{y}' = \mathbf{0}, \mathbf{b}'^T\mathbf{y}' < 0.$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{A}'$ entstand durch positive Linearkombinationen aus $\mathbf{A}$. Also existiert eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit nicht negativen Komponenten, für die gilt:

$$\mathbf{MA} = (\mathbf{0}|\mathbf{A}'), \quad \mathbf{Mb} = \mathbf{b}'.$$

Fortsetzung Beweis von Satz 4.20 (iii)

Sei $\mathbf{y} = \mathbf{M}^T\mathbf{y}'$.

Dann gilt $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ wegen der Nichtnegativität von $\mathbf{M}$.
Weiterhin gilt

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}^T\mathbf{y}' = (\mathbf{M}\mathbf{A})^T\mathbf{y}' = (\mathbf{0}|\mathbf{A}')^T\mathbf{y}' = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}^T\mathbf{M}^T\mathbf{y}' = \mathbf{b}'^T\mathbf{y}' < 0.$$

Wegen

$$4.20\ (\text{iii}) \;\Leftrightarrow\; 4.20\ (\text{i}) \;\Leftrightarrow\; 4.17$$

ist damit das Farkas-Lemma bewiesen.

Schranken für zulässige Lösungen

Satz 4.21 (Schwacher Dualitätssatz)

Gegeben seien primales und duales LP gemäß der asymmetrischen Form der Dualität. Wenn $\mathbf{x}$ *eine zulässige Lösung des primalen Programms und* $\mathbf{u}$ *eine zulässige Lösung des dualen Programms ist, dann gilt:*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

Beweis.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

□

Folgerung 4.22

Gilt $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$, *dann ist* $\mathbf{x}$ *eine optimale Lösung des primalen LP und* $\mathbf{u}$ *eine optimale Lösung des dualen LP.*

Bemerkungen:

- Satz 4.21 gilt analog für alle zueinander dualen Probleme:
  Ist das primale Problem ein Maximierungsproblem, dann gilt stets
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
  ansonsten
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
- Dementsprechend gilt natürlich auch Folgerung 4.22 für alle zueinander dualen Probleme.

Dualitätstheorem der linearen Programmierung

Satz 4.23

Gegeben seien ein primales LP (max) *und das zugehörige duale LP* (min)*. Dann gilt:*

- *Besitzt sowohl das primale LP als auch das duale LP eine zulässige Lösung* $\mathbf{x}$ *bzw.* $\mathbf{u}$*, so haben beide LPs auch optimale Lösungen* $\mathbf{x}^*$ *bzw.* $\mathbf{u}^*$ *und es gilt:*

$$z_{\text{max}} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* = Z_{\text{min}}$$

- *Ist die Zielfunktion des primalen LP nicht nach oben beschränkt, dann hat das duale LP keine zulässige Lösung.*
- *Ist die Zielfunktion des dualen LP nicht nach unten beschränk, dann hat das primale LP keine zulässige Lösung.*

Beweis.

Wir betrachten o.B.d.A. die symmetrische Form der Dualität.

Es sei $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung des primalen LP und $\gamma = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ sei der optimale Zielfunktionswert.

Dann hat das Ungleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$$

eine nicht negative Lösung, aber für jedes $\epsilon > 0$ hat das Ungleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \epsilon$$

keine nicht negative Lösung.

Fortsetzung Beweis.

Mit
$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{c}^T \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_\epsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\gamma - \epsilon \end{pmatrix}$$
können wir die Ungleichungssysteme als
$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_\epsilon$$
schreiben.

Wir wenden das Farkas-Lemma in der Version 4.20 (ii) an.

Für $\epsilon > 0$ folgt, dass ein nicht negativer Vektor $\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \in \mathbb{R}^{m+1}$ existiert mit $\hat{\mathbf{A}}^T\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{b}}_\epsilon^T\hat{\mathbf{y}} < 0$. Genauer:
$$\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq z\mathbf{c} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^T\mathbf{u} < z(\gamma + \epsilon). \quad (*)$$

Fortsetzung Beweis.

Für $\epsilon = 0$ hat das System eine nicht negative Lösung und es folgt mit Satz 4.20 (ii) $\hat{\mathbf{b}}_0^T \hat{\mathbf{y}} \geq 0$ bzw.

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \geq z\gamma.$$

Damit folgt $z > 0$ (ansonsten Widerspruch zur strikten Ungleichung $(*)$).

Mit $\mathbf{v} = \frac{1}{z}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ erhalten wir aus $(*)$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c}, \mathbf{b}^T \mathbf{v} < \gamma + \epsilon.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ ist also eine zulässige Lösung für das duale LP mit einem Zielfunktionswert kleiner als $\gamma + \epsilon$.

Fortsetzung Beweis.

Gemäß Satz 4.21 hat jede zulässige Lösung des dualen LP einen Zielfunktionswert $\geq \gamma$.

Insbesondere ist das duale LP nach unten beschränkt und hat damit eine optimale Lösung $\mathbf{y}^*$.

Der Zielfunktionswert $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ der optimalen dualen Lösung liegt also im Intervall $[\gamma, \gamma + \epsilon)$.

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = \gamma$.

Spezialfall: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

- Aus der Vorlesung Graphentheorie kennen wir das Max-Flow-Min-Cut-Theorem:

  In einem Flussnetzwerk ist der Wert $\Phi(f)$ eines Maximalflusses f gleich der Kapazität $c(A_S)$ eines minimalen Schnittes A_S.

- Dies ist ein Spezialfall des Dualitätstheorems 4.23.
- Jeder trennende Schnitt hat eine Kapazität $\geq$ dem Wert eines Maximalflusses. Umgekehrt ist der Wert eines beliebiges Flusses stets $\leq$ der Kapazität eines minimalen Schnittes.
- In den Optima treffen sich die Werte: Das Maximalflussproblem und das Problem der Bestimmung eines minimalen Schnittes sind zueinander dual.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Satz 4.24

Gegeben seien primales und duales LP in asymmetrischer Form.

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ *des primalen LP und eine zulässige Lösung* $\mathbf{u}$ *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j$$

Beweis.

Für die $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ gilt nach Satz 4.21:

$$0 \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c})$$

Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ jeweils optimal, dann gilt nach dem Dualitätstheorem $= 0$. Also muss für $x_j > 0$ gelten, dass die j-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}$ gleich 0 ist.
Umgekehrt folgt aus

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = c_j$$

dass gilt

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}) = 0$$

und damit $\mathbf{b}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Also sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ nach dem Dualitätstheorem optimal. $\square$

Satz vom Komplementären Schlupf

Satz 4.25

Gegeben seien primales und duales LP in symmetrischer Form.

Durch Einführen von m Schlupfvariablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ *für das primale LP und n Schlupfvariablen* $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_{m+n}$ *für das duale LP gehen die LPs über in die Normalform.*

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ *des primalen LP und eine zulässige Lösung* $\mathbf{u}$ *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_i u_{m+i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad u_j x_{n+j} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m$$

- Die Strukturvariablen des primalen LP korrespondieren mit den Schlupfvariablen des dualen LP und umgekehrt.
- Ist für die optimale Lösung des primalen LP $x_i > 0$, so ist $u_{m+i} = 0$. Analog gilt: $u_j > 0$ impliziert $x_{n+j} = 0$.

Beweis.

Wir betrachten die LPs

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \ge \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \ge 0 \end{array}$$

Wir führen Vektoren $\mathbf{x}' = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ und $\mathbf{u}' = (u_{m+1}, \ldots, u_{n+m})$ mit Schlupfvariablen ein.

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x}' \ge 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{u}' \ge 0 \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}')^T\mathbf{u} &= \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ (\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}')^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Mit Satz 4.21 ergibt sich

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{x'}^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T \mathbf{A} - \mathbf{u'}^T)\mathbf{x}^T \geq 0$$

Nach dem Dualitätstheorem sind nun $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ optimale Lösungen der beiden zueinander dualen LPs genau dann, wenn gilt:

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{x'}^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T \mathbf{A} - \mathbf{u'}^T)\mathbf{x}^T = 0$$

bzw.

$$\mathbf{x'}^T \mathbf{u} + \mathbf{u'}^T \mathbf{x} = 0$$

Wegen den Vorzeichenbedingungen entspricht dies genau dem Satz vom komplementären Schlupf.

Beispiel zum komplementären Schlupf

Beispiel 4.26

Das Problem aus Beispiel 3.6 haben wir bereits mit dem primalen Simplexalgorithmus gelöst.
☞ siehe Endtableau
Das zugehörige duale Problem haben wir in Beispiel 4.12 formuliert.
☞ siehe LP
Wir lösen dieses LP mit dem dualen Simplexalgorithmus.
1. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_5	-24	-48	-60	0	1	0	-40
$-Z$	480	480	480	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_3	$2/5$	$4/5$	1	0	$-1/60$	0	$2/3$
$-Z$	288	96	0	0	8	1	-320

3. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360

Fortsetzung Beispiel.

Wir vergleichen die beiden Endtableaus:

	primales Programm						
	Strukturvariablen		Schlupfvariablen				
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360
	Wert der Schlupfvariablen		Wert der Strukturvariablen				
	duales Programm						

Fortsetzung Beispiel.

	duales Programm						
	Strukturvariablen			Schlupfvariablen			
BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360
	Wert der Schlupfvariablen			Wert der Strukturvariablen			
	primales Programm						

Interpretation: komplementärer Schlupf

Die Variablen des dualen LP entsprechen Bewertungsfaktoren bzw. Preisen für die Maschinenzeiten, die so festzulegen sind, dass

- der Gesamtwert aller Maschinenzeiten möglichst klein ist: $\min \mathbf{b}^T\mathbf{u}$,
- die Kosten für die Erzeugung der einzelnen Produkte mindestens gleich den mit diesen Produkten erzielten Gewinnen sind: $\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c}$ und
- die Werte für die Maschinenzeiten nicht negativ sind: $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Bei optimaler Planung stimmen Gesamtgewinn der Produktion und Gesamtkosten für die Maschinenzeiten überein, die Zielfunktionswerte von primalem und dualem LP sind gleich.

Zusammenfassung

- Dualer Simplexalgorithmus für Minimumproblem, optimale Lösung ist primal und dual zulässig.
- Zusammenspiel von primalen und dualen Austauschschritten bei nachträglich hinzugefügten Nebenbedingungen oder Variablen.
- Zu jedem primalen LP gibt es ein korrespondierendes duales LP.
- Die Betrachtung sowohl des primalen als auch des dualen LP ermöglicht tiefergehende Einblicke in das zugrunde liegende Problem.
- Zueinander duale LPs sind eng miteinander verbunden: gegenseitige Schranken, Gleichheit der Zielfunktionen in den Optima, Entsprechungen bei Struktur-, Schlupf-, Basis-, und Nichtbasisvariablen.

Kapitel 5

Softwarewerkzeuge für die Lineare Programmierung

Inhalt

5 Softwarewerkzeuge für die Lineare Programmierung

- GLPK
- Gurobi

GNU Linear Programming Kit

In erster Linie eine C-Bibliothek für die

- lineare Programmierung (LP) und
- gemischt-ganzzahlige Programmierung (MIP).

Weitere Eigenschaften:

- open source, GPL
- Homepage: `https://www.gnu.org/software/glpk/`

GLPK Funktionalitäten

- Primaler und dualer Simplex-Algorithmus (LP)
- Innere-Punkte-Algorithmus (LP)
- Branch-and-Bound-Algorithmus (MIP, kombinatorische Optimierung)
- Schnittebenenverfahren (MIP, kombinatorische Optimierung)
- reichhaltige Einstellmöglichkeiten (z. B. Pivot-, Branching- und Backtrack-Strategien)
- C API
- Bindings für andere Sprachen, z. B. Java
- Modellierungssprache
- Stand-alone LP- bzw. MIP-Solver

Problemformen

GLPK kann LPs der folgenden Form verarbeiten:

Maximiere oder minimiere

$$z = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

unter linearen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \theta & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \theta & b_m \end{array}$$

mit $\theta \in \{\leq, =, \geq\}$ und Variablenbeschränkungen

$$\begin{array}{ccccc} l_1 & \leq & x_1 & \leq & u_1 \\ l_2 & \leq & x_2 & \leq & u_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_n & \leq & x_n & \leq & u_n \end{array}$$

Hierbei ist $l_i = -\infty$ und $u_i = \infty$ möglich.

Für MIPs oder kombinatorische Probleme können die Varibalen x_i zusätzlich auf

- $x_i \in \mathbb{Z}$ oder
- $x_i \in \{0, 1\}$ eingeschränkt werden.

Eingabeformate

- Am einfachsten ist es, ein LP in einem der möglichen textuellen Eingabeformate zu formulieren und
- dieses mit dem Stand-alone-Solver zu lösen.

Mögliche textuelle Eingabeformate:

- MPS-Format (IBM, 60er Jahre)
- CPLEX-Format (CPLEX Optimization Inc., 80er Jahre)
- GLPK-Format
- GNU MathProg Modellierungssprache

Wir nutzen das CPLEX-Format!

CPLEX-Format

- Plain Text
- zeilenorientiert
- formatfrei, d.h. Zwischenraum ist nicht relevant
- Syntaxelemente (Tokens):
  - Schlüsselwörter
  - Identifier
  - numerische Konstanten und Operatorsymbole
  - Trennzeichen

CPLEX-Format: Aufbau einer LP-Datei

1. Zielfunktion
2. Nebenbedingungen
3. Variablenbeschränkungen
4. Zuordnung der Variablen zu den Wertebereichen $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ und $\{0, 1\}$
5. Schlüsselwort `end`

CPLEX-Format: Beschreibung der Zielfunktion

$$\left\{ \begin{array}{l} \texttt{maximize} \\ \texttt{minimize} \end{array} \right\} [\mathit{identifier}\ :]\ \mathit{expression}$$

- *identifier* ist ein optionaler Bezeichner für den Zielfunktionswert.
- Bezeichner sind nach den übliche syntaktischen Regeln aufgebaut.
- Standardbezeichner für Zielfunktionswert: `obj`
- *expression*:

$$s\,c\,x\;s\,c\,x\ldots s\,c\,x$$

  - s = Vorzeichen
  - c = numerische Konstante als Koeffizient (otional)
  - x = Bezeichner für eine Variable

- Das erste Vorzeichen (Standard: +) und die Koeffizienten (Standard: `1.0`) sind optional.
- Koeffizienten werden in den für Programmiersprachen üblichen Notationen geschrieben.
- Variablen müssen nicht deklariert werden.

Beispiel:

```
Minimize Z : - x1 + 2 x2 - 3.5 x3 + 4.997e3x4 + x5 + x6 +
    x7 - .01x8
```

CPLEX-Format: Nebenbedingungen

```
subject to
```
nebenbedingung$_1$
...
nebenbedingung$_m$

Jede *nebenbedingung*$_i$ in der Form:

$$[r:]\ \mathit{expression} \left\{ \begin{array}{c} \texttt{<=} \\ \texttt{>=} \\ \texttt{=} \end{array} \right\} b$$

- r ist optionaler Bezeichner für die Nebenbedingung; Standard: `r.`iii
- b ist numerische Konstante mit optionalem Vorzeichen

Beispiel für Produktionsproblem (siehe Beispiel 3.6):

```
maschine1: 40 a + 24 b <= 480
maschine2: 24 a + 48 b <= 480
maschine3:        60 b <= 480
```

CPLEX-Format: Variablenbeschränkungen

```
bounds
```
$bound_1$

$\dots$

$bound_p$

- Dieser Abschnitt ist optional.
- Standard: Für alle definierten Variablen x_i gilt $x_i \geq 0$.
- Auch wenn Abschnitt vorhanden, muss nicht für jede Variable eine Beschränkung $bound_j$ definiert werden.
- Standard: Für alle Variablen x_i, für die keine Beschränkung definiert ist, gilt $x_i \geq 0$.
- Jede Definition einer Beschränkung $bound_j$ muss auf einer neuen Zeile erfolgen.

Die Beschränkungen $bound_j$ können wie folgt aufgebaut sein:

$x >= l$	untere Schranke l für Variable x
$l <= x$	untere Schranke l für Variable x
$x <= u$	obere Schranke u für Variable x
$l <= x <= u$	untere Schranke l und obere Schranke u für Variable x
$x = t$	fixer Wert t für Variable x
x `free`	Variable x ist unbeschränkt

- Schlüsselwörter `inf` bzw. `infinity` stehen für ∞.
- `-inf` entspricht somit $-\infty$.

CPLEX-Format: Wertebereiche von Variablen

- optional; Standard: für alle Variablen $x_i : x_i \in \mathbb{R}$
- notwendig für ganzzahlige oder kombinatorische Probleme
- Alle ganzzahligen bzw. kombinatorischen Variablen werden jeweils in einem eigenen Abschnitt aufgelistet.
- In jeder Zeile nur eine Variable!

ganzzahlige Variablen ($x_i \in \mathbb{Z}$):

```
Integer
```

x_1

...

x_q

binäre Variablen ($x_i \in \{0, 1\}$):

```
Binary
```

x_1

...

x_q

CPLEX-Format: Einfaches LP-Beispiel

Beispiel 5.1

Produktionsplanung von Beispiel 3.6:

```
Maximize
    10 a + 40 b
subject to
    maschine1: 40 a + 24 b <= 480
    maschine2: 24 a + 48 b <= 480
    maschine3:        60 b <= 480
end
```

CPLEX-Format: IP-Beispiel

Beispiel 5.2

Schnittproblem, siehe Folie 38 ff.:

```
Minimize
   x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9
subject to
   3 x1 + x2              + 2 x5 +   x6        + x8      >= 10
          x2          + x4                               >= 45
               2 x3                            + x8 + x9 >= 21
                        x4 +   x5 + 2 x6 + 3 x7     + x9 >= 42
integer
   x1
   x2
   x3
   ...
end
```

Stand-alone Solver

Kommando:

`glpsol` [*options* ...] *filename*

- Löst LP aus *filename*
- Für LP/MIP im CPLEX-Format: Option `--lp`
- Ausgabe der optimalen Lösung in Datei: Option `-o` *filename*
- In Ausgabedatei: optimale Basislösung

Aufruf:

```
glpsol --lp production.lp -o production.sol
```

Inhalt von `production.sol`:

beispiele — vim — ttys001 — 83×18

```
Problem:
Rows:        3
Columns:     2
Non-zeros:   5
Status:      OPTIMAL
Objective:   obj = 360 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 maschine1    B            352                         480
     2 maschine2    NU           480                         480      0.416667
     3 maschine3    NU           480                         480      0.333333

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 a            B              4             0
     2 b            B              8             0
:
```

Installation (Debian, Ubuntu)

```
sudo apt-get install glpk-doc glpk-utils libglpk-dev libglpk-java
```

- `glpk-doc`: Dokumentation, Manual(e)
- `glpk-utils`: Stand-alone-Solver, Beispiele
- `libglpk-dev`: C-Header-Datei, statische (`.a`) und dyamische (`.so`) Bibliothek
- `libglpk-java`: Sprachanbindug für Java, Dokumentation, Beispiele

Weitere interessante Pakete:

- `python-glpk`: Sprachanbindung für Python
- `r-cran-rglpk`: Sprachanbindug für R

Gurobi

- Homepage: `www.gurobi.com`
- Probleme:
  - lineare Programmierung (LP)
  - gemischt-ganzzahlige Programmierung (MIP)
  - quadratische Programmierung (QP): quadratische Zielfunktion und/oder Nebenbedingungen
- kommerziell effizientester LP/MIP-Solver.
- Im Vergleich zu GLPK insbesondere bei MIP deutlichst leistungsfähiger.

Konkurrenten: CPLEX (IBM), FICO Xpress (FICO)

Weitergehende Funktionalitäten

- Native Unterstützung für C, C++, Java, Python, Microsoft.NET, Matlab, R
- Unterstützung spezieller Arten von Nebenbedingungen
- Branch-and-Bound-Framework mit Lazy-Constraints
- Quadratische Programmierung
- parallele Implementierung der Verfahren
- Compute Cluster und Remote Services
- kostenlos nutzbar im akademischen Bereich

Installation

1. Registrieren Sie sich bei `www.gurobi.com`.
2. Gurobi-Software herunterladen:
   - `Downloads` → `Gurobi Software`
   - unterstützte Betriebssyteme: Linux (64-bit), macOS (64-bit), Windows (32- und 64-bit), AIX
3. Software installieren:
   - Linux: `.tar.gz` auspacken
   - evtl. Pfade und Environment-Variablen anpassen
4. Lizenz erzeugen:
   `Downloads` → `Lizenzen` → `Akademische Lizenz beantragen`
5. Lizenzschlüssel installieren:
   - Kommando `grbgetkey`
   - genauere Informationen mithilfe der Lizenzübersicht
   - Voraussetzung: Sie sind im Netzwerk der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg.
   - Nachdem der Lizenzschlüssel installiert ist, müssen Sie für die Benutzung von Gurobi nicht mehr im Hochschulnetz sein.

Stand-alone Solver

Eingabeformat: CPLEX

Aufruf:

```
gurobi_cl ResultFile=production.sol production.lp
```

Inhalt von `production.sol`:

```
# Objective value = 360
a 4
b 8
```

Programmierbeispiele

C:

- Produktionsproblem: `production_c.c`
- Verschnittproblem: `verschnitt_c.c`

Java:

- Produktionsproblem: `Production.java`
- Verschnittproblem: `Verschnitt.java`

Erzeugung der Executables, Class-Dateien sowie Java-Ausführung:

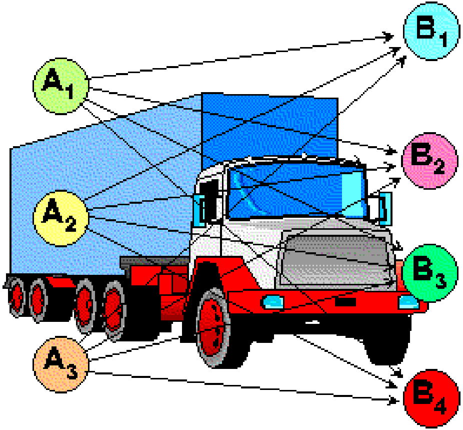
- `Makefile`

Zusammenfassung

- GLPK: Open Source LP/MIP-Solver
- Gurobi: kommerzieller LP/MIP-Solver
- jeweils C-Bibliothek, Anbindung für weitere Sprachen
- einfaches Eingabeformat: CPLEX
- Programmierbeispiele für Gurobi

Kapitel 6

Transport- und Zuordnungsprobleme



Inhalt

6. Transport- und Zuordnungsprobleme
   - Transportproblem
   - Netzerk-Simplexalgorithmus
   - Zuordnungsproblem

Transportproblem

Definition 6.1

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

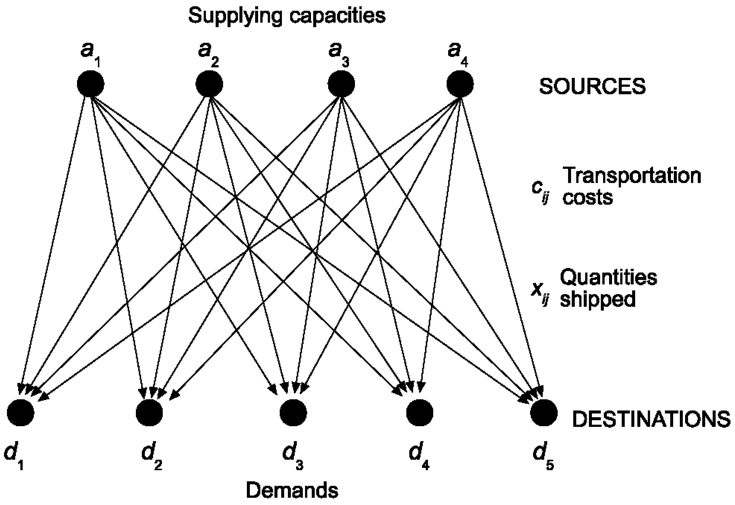
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n\end{aligned}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Transportproblem.


Supplying capacities
a_1
a_2
a_3
a_4
SOURCES
c_{ij} Transportation costs
x_{ij} Quantities shipped
DESTINATIONS
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
Demands

Bemerkungen zum Transportproblem

Wir setzen ein geschlossenes Transportproblem voraus: $a_i > 0, b_j > 0$ und $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, also Gesamtangebot = Gesamtnachfrage.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir ein zusätzliches Warenhaus mit $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ und $c_{i,n+1} = 0$ ein.

Für den Fall $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ führen wir eine zusätzliche Produktionsstätte mit $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ein.

Die $c_{m+1,j}$ modellieren dann die Kosten pro ME für das mangelnde Angebot in Warenhaus j.

Anzahl Variablen: $m \cdot n$

Beispielproblem

Beispiel 6.2

Wir gehen von folgenden Kosten, Angebot und Nachfrage aus:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	1	3	50
A_2	4	5	8	70
	40	40	40	

Fortsetzung Beispiel.

Damit lautet das zugehörige Transportproblem

$$\min 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & 50 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 70 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 40 \\
 & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 40 \\
 & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = & 40
\end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.$$

Lösbarkeit des Transportproblems

Satz 6.3

Zu jedem Transportproblem existiert eine optimale Lösung.

Beweis.

Es sei

$$G = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

und

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{G}$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{G} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{G} = a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

Fortsetzung Beweis.

und

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{G} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{G} = b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Damit existiert eine zulässige Lösung.

Wegen $0 \leq x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$ ist der Zulässigkeitsbereich $\mathcal{X}$ darüberhinaus beschränkt.

Also existiert nach Satz 2.18 eine optimale Lösung.

Transportproblem in Matrixdarstellung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} &= (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \\
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & \cdots & & & & \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 1 & & 0 \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1
\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m \cdot n}
$$

genauer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq m \wedge (i-1) \cdot n < j \leq i \cdot n \\ 1 & \text{falls } m < i \leq m+n \wedge j = k \cdot n + (i-m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Begrenzungsvektor:

$$\mathbf{b} = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

Damit hat das Transportproblem in Normalform die Darstellung

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Rang der Koeffizientenmatrix

Satz 6.4

Die Matrix $\mathbf{A}$ *des Transportproblems hat den Rang* $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$.

Beweis.

Die Summe der Zeilen 1 bis m ist gleich der Summe der Zeilen $m+1$ bis $m+n$. Also sind die $m+n$ Zeilenvektoren linear abhängig und es folgt $r(\mathbf{A}) \leq m + n - 1$.

Andererseits sind die $m+n-1$ Spaltenvektoren mit den Indizes

$$1, 2, \ldots, n, n+1, 2n+1, \ldots, (m-1)n+1$$

linear unabhängig, also $r(\mathbf{A}) \geq m + n - 1$.

Insgesamt folgt $r(\mathbf{A}) = m + n - 1$. $\square$

Eröffnungsverfahren

- Nach Satz 6.4 besteht eine Basislösung eines Transportproblems aus $m + n - 1$ Basisvariablen.
- Zur Konstruktion einer ersten Ecke benötigen wir daher eine zulässige Lösung mit
  - $n + m - 1$ Variablen $x_{ij} > 0$ und
  - restlichen Variablen $x_{ij} = 0$ (falls keine Entartung vorliegt).
- Wir stellen nun zwei Verfahren zur Konstruktion einer ersten zulässigen Basislösung bzw. Ecke vor:
  - Nordwesteckenregel
  - Minimale-Kosten-Regel

Transporttableau

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} B_{11} x_{11}	c_{12} B_{12} x_{12}		c_{1n} B_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} B_{21} x_{21}	c_{22} B_{22} x_{22}		c_{2n} B_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} B_{m1} x_{m1}	c_{m2} B_{m2} x_{m2}		c_{mn} B_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	z

Nordwesteckenregel

Idee:

- Man transportiere über die Verbindung ganz links oben im Tableau so viel wie möglich.
- Wird dadurch das Lager erschöpft, streiche man die erste Zeile des Tableaus, ansonsten die erste Spalte, und beginne wieder mit dem ersten Schritt.

Algorithmus zur Nordwesteckenregel

Algorithmus 6.5

$x_{ij} := 0$ für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
$z := 0$
$i := 1, j := 1$
while $i \leq m$ **and** $j \leq n$ **do**
    $x_{ij} := \min\{a_i, b_j\}$
    $z := z + c_{ij}x_{ij}$
    $a_i := a_i - x_{ij}$
    $b_j := b_j - x_{ij}$
    if $a_i = 0$ **then**
        $i := i + 1$
    else
        $j := j + 1$
    end
end

Diskussion Nordwesteckenregel

- Die tatsächlichen Kosten werden zur Auswahl der Basisvariablen nicht berücksichtigt, daher i.d.R. keine gute zulässige Lösung.
- Entartung, wenn in einer Iteration sowohl a_i als auch b_j gleich 0 werden.
  In der nächsten Iteration wird dann $x_{i+1,j}$ Basisvariable mit $x_{i+1,j} = 0$.
- In jeder Iteration wird genau eine Zeile oder Spalte "gestrichen", in letzter Iteration ist aber nur genau eine Spalte und genau eine Zeile übrig.
- Daher insgesamt $m + n - 1$ Iterationen mit der Auswahl von $m + n - 1$ Basisvariablen.
- Die B_{ij} betrachten wir erst später!

Beispiel zur Nordwesteckenregel

Beispiel 6.6

Wir gehen von Kosten, Angebot und Nachfrage gemäß Beispiel 6.2 aus.
Starttableau:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 B_{11}	1 B_{12}	3 B_{13}	50
A_2	4 B_{21}	5 B_{22}	8 B_{23}	70
	40	40	40	0

1. Iteration: $x_{11} = 40, a_1 = 10, b_1 = 0, z = 360$
2. Iteration: $x_{12} = 10, a_1 = 0, b_2 = 30, z = 370$
3. Iteration: $x_{22} = 30, a_2 = 40, b_2 = 0, z = 520$
4. Iteration: $x_{23} = 40, a_2 = 0, b_3 = 0, z = 840$

Fortsetzung Beispiel.

Tableau nach Nordwesteckenregel:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 / 40	1 / 10	3 B_{13}	0
A_2	4 B_{21}	5 / 30	8 / 40	0
	0	0	0	840

Minimale-Kosten-Regel

- Statt die erste Möglichkeit links oben im Transporttableau wählt man unter den möglichen Variablen x_{ij} diejenige mit minimalen Kosten c_{ij}.
- Ansonsten verläuft der Algorithmus analog zur Nordwesteckenregel.
- I.d.R. erhalten wir eine bessere zulässige Basis als bei der Nordwesteckenregel, dies ist aber nicht garantiert.
- Typischer Greedy-Algorithmus: Treffe die lokal beste Entscheidung!

Algorithmus zur Minimale-Kosten-Regel

Algorithmus 6.7

$x_{ij} := 0$ für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
$I := \{1, \ldots, m\}$; $J := \{1, \ldots, n\}$; $z := 0$
while $I \neq \emptyset$ **and** $J \neq \emptyset$ **do**
    wähle i und j so, dass $c_{ij} = \min\{c_{lk} | l \in I, k \in J\}$
    $x_{ij} := \min\{a_i, b_j\}$
    $z := z + c_{ij} x_{ij}$
    $a_i := a_i - x_{ij}$
    $b_j := b_j - x_{ij}$
    if $a_i = 0$ **then**
        $I := I \setminus \{i\}$
    else
        $J := J \setminus \{j\}$
    end
end

Beispiel zur Minimale-Kosten-Regel

Beispiel 6.8

1. Iteration:

$$i = 1, j = 2, x_{12} = 40, a_1 = 10, b_2 = 0, I = \{1, 2\}, J = \{1, 3\}, z = 40$$

2. Iteration:

$$i = 1, j = 3, x_{13} = 10, a_1 = 0, b_3 = 30, I = \{2\}, J = \{1, 3\}, z = 70$$

3. Iteration:

$$i = 2, j = 1, x_{21} = 40, a_2 = 30, b_1 = 0, I = \{2\}, J = \{3\}, z = 230$$

4. Iteration:

$$i = 2, j = 3, x_{23} = 30, a_2 = 0, b_3 = 30, I = \emptyset, J = \emptyset, z = 470$$

Fortsetzung Beispiel.

Tableau nach Minimale-Kosten-Regel:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 B_{11}	1 40	3 10	0
A_2	4 40	5 B_{22}	8 30	0
	0	0	0	470

Zugeordneter bipartiter Graph

Für ein Transportproblem sei $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ die Menge der Fabriken und $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ sei die Menge der Warenhäuser.

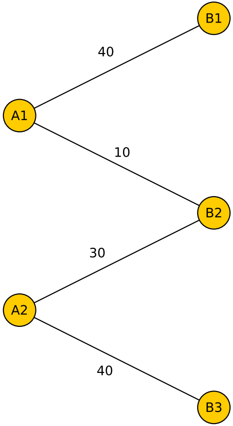
Wir ordnen nun einem Transportproblem einen bipartiten Graph $G = (V, E)$ zu mit:

- $V = A + B$ und
- $E = \{\{v, w\} | v \in A, w \in B\}$.

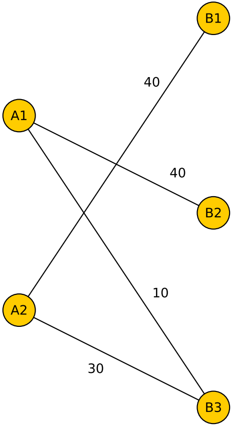
Damit können wir auch jeder Variablen x_{ij} die Kante $\{A_i, B_j\} \in E$ zuordnen.

Struktur zulässiger Basislösungen

Basislösung von Beispiel 6.6:



Basislösung von Beispiel 6.8:



Satz 6.9

Gegeben sei eine zulässige Basislösung für ein Transportproblem.

Dann bilden die Kanten der Basisvariablen im zugeordneten bipartiten Graphen einen Baum.

Beweis.

Angenommen, eine Teilmenge der Basisvariablen bildet im zugeordneten bipartiten Graphen einen Kreis der Länge $2k$. O.B.d.A. sei dies der Kreis $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, \ldots, A_k, B_k, A_1)$ mit den Basisvariablen $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{kk}, x_{1k}$.

Wir bilden nun eine Linearkombination der Spaltenvektoren dieser Basisvariablen von der Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt:

- Für eine Kante (A_i, B_i) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i,i)}$ den Koeffizienten 1,
- für eine Kante (B_i, A_{i+1}) und die Kante (B_k, A_1) erhält der Spaltenvektor $\mathbf{a}^{(i+1,i)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(1,k)}$ den Koeffizienten -1.

Fortsetzung Beweis.

Dann bildet diese Linearkombination den Vektor $\mathbf{0}$, die Spaltenvektoren sind also linear abhängig. Widerspruch zu Basislösung!

Also müssen die Kanten der Basisvariablen einen kreisfreien Untergraphen bilden.

Da der bipartite Graph aber

- $m + n$ Knoten und
- eine Basislösung $n + m - 1$ Variablen (also Kanten)

hat, müssen die Variablen der Kanten einen Baum bilden (vgl. Graphentheorie, Satz 1.42 (5)).

Netzwerk-Simplexalgorithmus

Fragestellungen/Aufgaben:

- Bewertung der Nicht-Basisvariablen (NBV) x_{ij} mit Schattenpreisen B_{ij}
- Auswahl einer Nicht-Basisvariablen
- Auswahl einer Basisvariablen (BV), die zur Nicht-Basisvariablen wird
- Anpassung des Tableaus

Satz 6.9 bildet die Basis, um diese Fragestellungen zu lösen.

Bestimmung der Schattenpreise

Es sei x_{ij} eine NBV.

- Schattenpreis: Wie würden sich die Kosten ändern, wenn wir 1 ME von A_i nach B_j schicken würden?
- In der Basislösung gibt es gemäß Satz 6.9 genau einen Weg W von A_i nach B_j.
- Nehmen wir die Kante für x_{ij} hinzu, entsteht genau ein Kreis.
- Transportieren wir 1 ME von A_i nach B_j über die Kante von x_{ij}, müssen wir auf dem Weg W von A_i nach B_j die Transportmengen wie folgt anpassen:
  - von A_k zu B_l: 1 ME weniger
  - von B_l zu A_k: 1 ME mehr

- Damit können wir die Schattenpreise bestimmen:

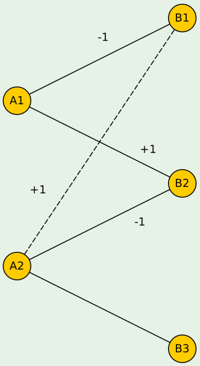
$$B_{ij} = c_{ij} + \sum_{(B_l,A_k)\in W} c_{kl} - \sum_{(A_k,B_l)\in W} c_{kl}$$

- Für $B_{ij} < 0$ lohnt es sich, die Variable x_{ij} in die Basis aufzunehmen.
- Analog zum Simplexalgorithmus können wir die NBV mit kleinstem B_{ij} als neue BV wählen.
- Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV, dann ist die Lösung optimal.

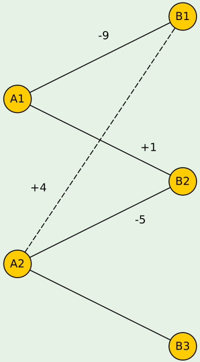
Beispiel zur Berechnung der Schattenpreise

Beispiel 6.10

Mengenänderung für x_{21} in Basislösung von Beispiel 6.6:



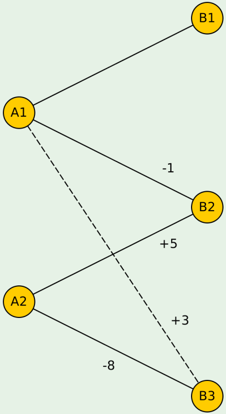
Schattenpreis B_{21} für Variable x_{21}:



$$B_{21} = 4 + 1 - 9 - 5 = -9$$

Fortsetzung Beispiel.

Schattenpreis B_{13} für Variable x_{13}:



$$B_{13} = 3 + 5 - 1 - 8 = -1$$

- Auswahl von x_{21} als neue BV
- entspricht Pivotspalte in primalem Simplex
- bleibt:
  - Pivotzeile?
  - Anpassung?

Anpassung der Basislösung

- Auf einer Kante von A_k nach B_l können wir die Transportmenge um nicht mehr als x_{kl} reduzieren.
- Damit fehlt in Warenhaus B_l eine Kapazität von x_{kl}, die nun von Fabrik k' über die Kante von $x_{k'l}$ geliefert werden muss. usw.
- Für die ausgewählte NBV x_{ij} setzen wir:

$$x_{ij} = \Delta = \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$$

- Eine BV $x_{i'j'}$, für die das Minimum angenommen wird, wird zur NBV.
- Für alle Kanten $(A_k, B_l) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} - \Delta$$

- Für alle Kanten $(B_l, A_k) \in W$:

$$x_{kl} = x_{kl} + \Delta$$

- Zielfunktionswert:

$$z = z + \Delta \cdot B_{ij}$$

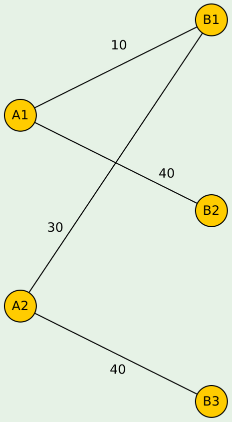
Beispiel 6.11

Für die Basislösung von Beispiel 6.6 und die neue BV x_{21} ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
x_{21} &= \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} \\
&= \min\{40, 30\} = 30 \\
x_{22} &= 30 - 30 = 0 \\
x_{12} &= 10 + 30 = 40 \\
x_{11} &= 40 - 30 = 10 \\
z &= 840 - 30 \cdot 9 = 570
\end{aligned}
$$

x_{22} wird also NBV.

Die neue Basislösung:



Stepping-Stone-Methode

Algorithmus 6.12

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.
2. Suche für alle NBV x_{ij} im zugeordneten bipartiten Graphen den Weg W_{ij} von A_i nach B_j und bestimme damit die Schattenpreise

$$B_{ij} := c_{ij} + \sum_{(B_l,A_k)\in W_{ij}} c_{kl} - \sum_{(A_k,B_l)\in W_{ij}} c_{kl}.$$

3. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP! Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

Fortsetzung Algorithmus.

4. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist eine BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.
5. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**
   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**
   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$
6. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.
   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel zur Stepping-Stone-Methode

- Nach dem Eröffnungsverfahren setzen wir im Tableau wieder die Originalwerte für a_i und b_j ein.
- Dies dient nur der besseren Übersicht, denn die Werte werden im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt.

Beispiel 6.13

Gegeben seien Kosten, Angebot und Nachfrage wie in Beispiel 6.2.
Die Nordwesteckenregel und Beispiel 6.10 liefern:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 40	1 10	3 $\quad -1$	50
A_2	4 $\quad -9$	5 30	8 40	70
	40	40	40	840

Also $i = 2, j = 1$ mit $B_{21} = -9$.

Fortsetzung Beispiel.

W ist (A_2, B_2, A_1, B_1).
$x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$
$i' = 2, j' = 2$

$x_{22} = 0, x_{11} = 10, x_{12} = 40$
$z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

NBV sind jetzt: $\{x_{13}, x_{22}\}$
Weg von A_1 nach B_3: (A_1, B_1, A_2, B_2)
$B_{13} = 3 + 4 - 9 - 8 = -10$
Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_1, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 9 - 4 - 1 = 9$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 10	1 40	3 −10	50
A_2	4 30	5 9	8 40	70
	40	40	40	570

Fortsetzung Beispiel.

Also $i = 1, j = 3$ mit $B_{13} = -10$.
W ist (A_1, B_1, A_2, B_3).
$x_{13} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$
$i' = 1, j' = 1$
$x_{11} = 0, x_{23} = 30, x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$
NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{22}\}$
Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_3, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 8 - 3 - 4 = 10$
Weg von A_2 nach B_2: (A_2, B_3, A_1, B_2)
$B_{22} = 5 + 3 - 8 - 1 = -1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 40	3 10	50
A_2	4 40	5 -1	8 30	70
	40	40	40	470

Fortsetzung Beispiel.

Also $i = 2, j = 2$ mit $B_{22} = -1$.
W ist (A_2, B_3, A_1, B_2).
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$
$i' = 2, j' = 3$
$x_{23} = 0, x_{12} = 10, x_{13} = 40, z =$
$470 - 30 \cdot 1 = 440$
NBV sind jetzt: $\{x_{11}, x_{23}\}$
Weg von A_1 nach B_1: (A_1, B_2, A_2, B_1)
$B_{11} = 9 + 5 - 1 - 4 = 9$
Weg von A_2 nach B_3: (A_2, B_2, A_1, B_3)
$B_{23} = 8 + 1 - 5 - 3 = 1$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9 9	1 10	3 40	50
A_2	4 40	5 30	8 1	70
	40	40	40	440

Dies ist die optimale Lösung!

Vergleich zum Simplexalgorithmus

Beispiel 6.14

Wir stellen für die Basislösung von Beispiel 6.6 das Simplextableau auf.
Hierzu drücken wir die BVs $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$ durch die NBVs x_{13}, x_{21} aus.

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} = 40 \\
\Rightarrow \quad & x_{11} = 40 - x_{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \\
\Rightarrow \quad & x_{12} = 50 - x_{11} - x_{13} \\
\Rightarrow \quad & x_{12} = 50 - (40 - x_{21}) - x_{13} \\
\Rightarrow \quad & x_{12} = 10 + x_{21} - x_{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_{13} + x_{23} = 40 \\
\Rightarrow \quad & x_{23} = 40 - x_{13}
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beispiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\
\Rightarrow & x_{22} = 70 - x_{23} - x_{21} \\
\Rightarrow & x_{22} = 70 - (40 - x_{13}) - x_{21} \\
\Rightarrow & x_{22} = 30 + x_{13} - x_{21}
\end{array}
$$

Wir setzen die Gleichungen in die Zielfunktion ein:

$$
\begin{array}{rl}
 & 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8_{23} \\
= & 9(40 - x_{21}) + (10 + x_{21} - x_{13}) + 3x_{13} + 4x_{21} \\
 & \qquad +5(30 + x_{13} - x_{21}) + 8(40 - x_{13}) \\
= & 360 - 9x_{21} + 10 + x_{21} - x_{13} + 3x_{13} + 4x_{21} \\
 & \qquad +150 + 5x_{13} - 5x_{21} + 320 - 8x_{13} \\
= & 840 - x_{13} - 9x_{21}
\end{array}
$$

Also lautet die Zielfunktion $\quad z = \min 840 - x_{13} - 9x_{21}$

bzw. $\quad -z = \max -840 + x_{13} + 9x_{21}$

Fortsetzung Beispiel.

Damit können wir das Starttableau aufstellen:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
x_{11}	1	0	0	1	0	0	40
x_{12}	0	1	1	-1	0	0	10
x_{22}	0	0	-1	1	1	0	30
x_{23}	0	0	1	0	0	1	40
$-z$	0	0	-1	-9	0	0	-840

Man beachte: Die Schattenpreise in der Zielfunktionszeile sind identisch mit den Schattenpreisen aus den Beispielen 6.10 und 6.13.

Im weiteren Verlauf: Basislösungen, Zielfunktionswerte und Schattenpreise ebenfalls identisch zu Beispiel 6.13.

Duales Problem

Lemma 6.15

Das zum Transportproblem duale Problem lautet:

$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

und

$$u_i, v_j \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, m, \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

Anwendung der Dualitätssätze

Es sei $F(\mathbf{x})$ die Zielfunktion des primalen und $D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ des dualen Transportproblems.

- Sind $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ optimal, dann gilt

  $$F(\mathbf{x}) = D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

  siehe Satz 4.23
- $\mathbf{x} = (x_{ij})$ sowie $\mathbf{u} = (u_i)$ und $\mathbf{v} = (v_j)$ sind genau dann optimal, wenn gilt

  $$x_{ij} > 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

  siehe Satz 4.24

Effizienterer Solver durch Ausnutzung der Dualität

Gegeben sei eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$:

- Finde Belegung der Variablen u_i und v_j, so dass gilt:

$$x_{ij} \text{ ist BV } \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

- Wenn außerdem $u_i + v_j \leq c_{ij}$ für alle NBV gilt, dann ist die Basislösung optimal.
- Ansonsten wähle NBV x_{ij} mit dem kleinsten (negativen) Wert für

$$B_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

  und tausche sie gegen eine BV aus.
  Diese Gleichung folgt aus Satz 4.25.

Wie werden die u_i und v_j bestimmt?

- Ausgehend von einer Basislösung **x** stellt man das LGS

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$

  auf.
- Anzahl der Variablen: $n + m$
  Anzahl der Gleichungen: $n + m - 1$
- Setze eine Variable auf 0, z.B. $u_1 = 0$.
  Löse die restlichen Gleichungen sukzessive.
- Die Basislösung bildet einen Baum. Das LGS kann also entlang der Kanten des Baumes gelöst werden.

Beispiel 6.16

Wir bestimmen u_i und v_j für die Basis von Beispiel 6.6. Das LGS lautet:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_2 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Wir setzen $u_1 = 0$. Damit folgt:

$$v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = 4, v_3 = 4$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} B_{13} &= 3 - 0 - 4 = -1 \\ B_{21} &= 4 - 4 - 9 = -9 \end{aligned}$$

Dies sind genau die Schattenpreise aus den Beispielen 6.10, 6.13 und 6.14.

Die u-v-Methode

Algorithmus 6.17

1. Bestimme mit einem Eröffnungsverfahren (z.B. der Nordwesteckenregel) eine zulässige Basislösung $\mathbf{x}$ und den zugehörigen Zielfunktionswert z.
2. Setze $u_1 = 0$ und löse damit das LGS
$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } i, j \text{ mit } x_{ij} \text{ ist BV}$$
3. Berechne für alle NBV x_{ij}: $B_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j$
4. Gilt $B_{ij} \geq 0$ für alle NBV x_{ij}, dann ist die aktuelle Basislösung optimal. STOP! Ansonsten bestimme i, j so, dass $B_{ij} = \min\{B_{kl} | x_{kl} \text{ ist NBV}\}$.

Fortsetzung Algorithmus.

5. $W :=$ Weg von A_i nach B_j in aktueller Basislösung
   $x_{ij} := \Delta := \min\{x_{kl} | (A_k, B_l) \in W\}$
   $x_{i',j'}$ ist die BV, für die das Minimum Δ angenommen wird.
6. **for all** $(A_k, B_l) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} - \Delta$ **end**
   for all $(B_l, A_k) \in W$ **do** $x_{kl} := x_{kl} + \Delta$ **end**
   $z := z + \Delta \cdot B_{ij}$
7. x_{ij} wird BV.
   $x_{i',j'}$ wird NBV.
   Gehe zu Schritt 2.

Beispiel für die u-v-Methode

Beispiel 6.18

Wir setzen einfach Beispiel 6.16 fort.

$i = 2, j = 1$

$W = (A_2, B_2, A_1, B_1), x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 30$

$x_{22} = 0, x_{11} = 10, x_{12} = 40, z = 840 - 30 \cdot 9 = 570$

BVs: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}$

LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_1 = 9, v_2 = 1, u_2 = -5, v_3 = 13$

Schattenpreise:

$B_{13} = 3 - 0 - 13 = -10$

$B_{22} = 5 - (-5) - 1 = 9$

Fortsetzung Beispiel.

$i = 1, j = 3$
$W = (A_1, B_1, A_2, B_3)$
$x_{13} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 10$
$x_{11} = 0, x_{23} = 30, x_{21} = 40$
$z = 570 - 10 \cdot 10 = 470$
BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 5, v_1 = -1$
Schattenpreise:
$B_{11} = 9 - 0 - (-1) = 10$
$B_{22} = 5 - 5 - 1 = -1$

Fortsetzung Beispiel.

$i = 2, j = 2$
$W = (A_2, B_3, A_1, B_2)$
$x_{22} = \Delta = \min\{x_{23}, x_{12}\} = 30$
$x_{23} = 0, x_{12} = 10, x_{13} = 40, z = 470 - 30 \cdot 1 = 440$
BVs: $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}$
LGS:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 1 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_2 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: $u_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 3, u_2 = 4, v_1 = 0$
Schattenpreise:
$B_{11} = 9 - 0 - 0 = 9$
$B_{23} = 8 - 4 - 3 = 1$

Damit ist die aktuelle Basislösung optimal!

Zuordnungsproblem

Definition 6.19

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

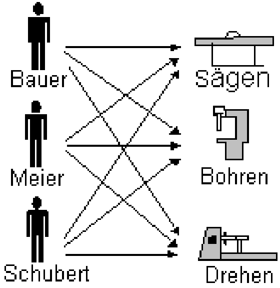
und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Zuordnungsproblem.

Bemerkungen:

- Man beachte: Keine Stetigkeit für die Entscheidungsvariablen x_{ij}
- Ein Optimierungsproblem, bei dem die Entscheidungsvariablen nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen, heißt kombinatorisches Optimierungsproblem.



Zuordnungsproblem als Transportproblem

- Das Zuordnungsproblem kann als Spezialfall des Transportproblems betrachtet und z. B. mit der Stepping-Stone-Methode optimal gelöst werden.
- Setze hierzu im Transportproblem $m = n$, sowie $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Damit sind die Nebenbedingungen des Zuordnungsproblems modelliert.
- Die Zielfunktion ist dann für beide Probleme identisch.
- Wegen $x_{ij} \leq \max\{a_i, b_j\}$ folgt aus dem Begrenzungsvektor $x_{ij} \leq 1$. Damit ist $0 \leq x_{ij} \leq 1$ keine zusätzliche Einschränkung gegenüber dem Transportproblem.
- Wir werden im Folgenden zeigen: Falls a_i und b_j ganzzahlig sind, liefert der Simplexalgorithmus für das Transportproblem nur ganzzahlige Lösungen.
- Damit gilt für eine so ermittelte optimale Lösung stets $x_{ij} \in \{0, 1\}$, sie ist also zulässig für das Zuordnungsproblem.
- Größe einer zulässigen Basislösung: $2n - 1$

Ecken des Zuordnungsproblems

Definition 6.20

Ein Zuordnungsproblem mit den Vorzeichenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

statt $x_{ij} \in \{0, 1\}$ heißt relaxiertes Zuordnungproblem.

Beispiel 6.21

Wir betrachten ein relaxiertes Zuordnungproblem mit Kostenmatrix

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

Dann sind

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) \\
&= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{y} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ und} \\
\mathbf{z} &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

optimale Lösungen.
Wegen

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$$

ist aber $\mathbf{z}$ keine Ecke und würde damit vom Simplexalgorithmus niemals als optimale Lösung ermittelt.

Ganzzahligkeit der Ecken beim Zuordnungsproblem

Satz 6.22

Für jedes relaxierte Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Für ein relaxiertes Zuordnungsproblem der Größe $n \times n$ gilt also

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke } \Rightarrow \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n \times n}$$

Beweis.

Induktion über n.

$n = 1$: $x_{11} = 1$ ist die einzige zulässige und damit optimale Lösung.

$n-1 \to n$: Es sei $\mathbf{x}$ Ecke eines relaxierten $n \times n$-Zuordnungsproblems.

Fall 1: Es existieren $1 \leq i,j \leq n$ mit $x_{ij} = 1$.

Dann streiche aus dem Zuordnungsproblem Zeile i und Spalte j und aus $\mathbf{x}$ alle entsprechenden Komponenten. Der Restvektor von $\mathbf{x}$ muss dann eine Ecke des $(n-1) \times (n-1)$ Zuordnungsproblems sein, das nach I.V. nur ganzzahlige Ecken hat.

Fortsetzung Beweis.

Fall 2: Es existiert kein i, j mit $x_{ij} = 1$.

Damit folgt $0 \leq x_{ij} < 1$ für alle i, j.

Wegen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ für alle i folgt: Für jedes i gibt es mindestens zwei Variablen $x_{ij} > 0$.

Damit existieren mindestens $2n$ Variablen $x_{ij} > 0$.

Widerspruch, denn eine Ecke $\mathbf{x}$ und damit eine zulässige Basislösung hat nur $2n - 1$ BVs.

Folgerung 6.23

Wir können Zuordnungsprobleme mit dem Simplexalgorithmus optimal lösen.

Konsequenz

Wir können Zuordnungsprobleme lösen, indem wir

- zum relaxierten Problem übergehen und
- das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus lösen.

In der Vorlesung "Kombinatorische Optimierung" untersuchen wir,

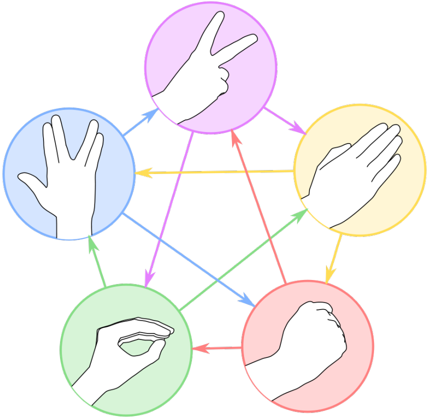
- für welche weiteren kombinatorischen Probleme solch ein Vorgehen möglich ist, bzw.
- welche Bedingungen hinreichend für ganzzahlige Ecken sind.

Zusammenfassung

- Transportproblem und Zuordnungsproblem lösen: Stepping-Stone-Methode
- Effizienterer Algorithmus unter Ausnutzung der Dualität: u-v-Methode
- Diese kombinatorischen Methoden sind analog zum Simplexalgorithmus.
- Startecke: Nordwesteckenregel oder Minimale-Kosten-Regel
- ganzzahlige Ecken beim Zuordnungsproblem

Kapitel 7

Anwendung: Spieltheorie



Inhalt

Colonel-Blotto-Spiel

- Colonel Blotto und sein Gegner kämpfen um drei Gebirgspässe.
- Jedem der beiden stehen fünf Regimente zur Verfügung.
- Derjenige, der mehr Regimente zu einem Gebirgspass schickt, gewinnt diesen.
  Bei gleicher Anzahl gibt es ein Unentschieden.
- Die Schlacht gewinnt derjenige, der mehr Gebirgspässe gewinnt.
  Ein Unentschieden ist auch möglich.

Vorgehen von Colonel Blotto

- Colonel Blotto teilt seine fünf Regimente in drei Gruppen auf.
- Eine Aufteilung in drei Gruppen beschreiben wir durch ein 3-Tupel (r_1, r_2, r_3) mit
  - $r_1 + r_2 + r_3 = 5$ und
  - $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3$.
- Danach wird jeder Gruppe zufällig gleichverteilt ein Gebirgspass zugeordnet.
- Der Gegner geht in gleicher Weise vor.
- Die möglichen Aufteilungen der Regimente bezeichnen wir als Strategien.
- Strategien ✎

Bewertung der Strategien

- Durch die Strategien von Colonel Blotto und seinem Gegner sind Erfolgswahrscheinlichkeiten gegeben.
- Beispiel:
  - Colonel Blotto wählt die Strategie $(1, 2, 2)$ und
  - sein Gegener $(0, 0, 5)$.
  - Erfolgswahrscheinlichkeit für Colonel Blotto $= 1$ und
  - für seinen Gegner $= 0$.
- Weiteres Beispiel: Wählt Colonel Blotto $(0, 2, 3)$, dann beträgt seine Erfolgswahrscheinlichkeit $1/3$, die des Gegners 0. ✎
- Bewertung einer Strategie:

$$\text{Erfolgswahrscheinlichkeit Blotto} - \text{Erfolgswahrscheinlichkeit Gegner}$$

Auszahlungsmatrix (payoff matrix)

Die Auszahlungsmatrix für das Colonel-Blotto-Spiel (aus Sicht von Colonel Blotto):

		Gegner				
		$(0,0,5)$	$(0,1,4)$	$(0,2,3)$	$(1,1,3)$	$(1,2,2)$
	$(0,0,5)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1
	$(0,1,4)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Blotto	$(0,2,3)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
	$(1,1,3)$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
	$(1,2,2)$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Wie sieht die Auszahlungsmatrix aus Sicht des Gegners aus?

Es handelt sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel.

Minimax-Strategie

Welche Strategie soll Colonel Blotto wählen?

- Colonel Blotto kennt nicht die Strategie seines Gegners.
- Sein Gegner könnte einen Spion eingeschleust haben, der die Strategie von Colonel Blotto verrät.

Regel:

☞ Wähle die Strategie, welche den schlechtesten Fall maximiert.
hier: Maximum der Zeilenminima

- Also wählt Colonel Blotto $(0, 2, 3)$.
- Der Gegner verfährt analog: Minimum der Spaltenmaxima.
  Also wählt der Gegner ebenfalls $(0, 2, 3)$.

Nash-Gleichgewicht

Die gewählten Strategien bilden ein Nash-Gleichgewicht.

- Sattelpunkt: Zeilenminimum und Spaltenmaximum
- Kein Spieler kann sich durch eine andere Strategiewahl verbessern, wenn der Gegenspieler bei seiner Wahl bleibt.
- Folgerung: Kein Spieler bereut im Nachhinein seine Wahl.

Problem:

- Nicht jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat ein Nash-Gleichgewicht.

Stein-Papier-Schere

Zwei Spieler: Alice und Bob

Auszahlungsmatrix aus Sicht von Alice:

		Bob		
		Stein	Papier	Schere
	Stein	0	-1	1
Alice	Papier	1	0	-1
	Schere	-1	1	0

Fazit für Stein-Papier-Schere

- Stein-Papier-Schere hat kein Nash-Gleichgewicht.
- Es existiert kein Eintrag in der Auszahlungsmatrix, der sowohl Zeilenminimum als auch Spaltenmaximum ist.
- Bei einer Niederlage oder einem Unentschieden hätte eine andere Strategiewahl zu einem besseren Ergebnis geführt.

Konsequenz:

- Wir verzichten auf die feste Auswahl einer Strategie (reine Strategie) und gehen zu gemischten Strategien über.

Gemischte Strategien

- Wir gehen immer von zwei Spielern aus: Alice und Bob.
- Alice stehen m reine Strategien zur Verfügung, Bob n reine Strategien.

Definition 7.1

Eine gemischte Strategie eines Spielers ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Menge seiner reinen Strategien.

Wir stellen eine gemischte Strategie für Alice als Vektor $\mathbf{x}$ dar, mit

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Eine gemischte Strategie für Bob ist eine Vektor $\mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Beispiel 7.2

Bei Stein-Papier-Schere hat Alice drei reine Strategien zur Auswahl. Sei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bedeutung der gemischten Strategie:

- Alice führt ein Zufallsexperiment durch.
- Die Komponenten von $\mathbf{x}$ sind die Wahrscheinlichkeiten für die reinen Strategien Stein, Papier, Schere.
- Alice spielt dann die zufällig ausgewählte reine Strategie.

Erwarteter Gewinn

- Gegeben seien gemischte Strategien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ für Alice bzw. Bob.
- Gegeben sei eine Auszahlungsmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, die den Gewinn von Alice beschreibt.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
E(\text{Gewinn von Alice}) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} P(\text{Alice wählt } i, \text{Bob wählt } j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} P(\text{Alice wählt } i) \cdot P(\text{Bob wählt } j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Beispiel 7.3

Alice spielt die Strategie $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ aus Beispiel 7.2.

Bob spielt $\mathbf{y} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$\begin{aligned}
E(\text{Gewinn von Alice}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bewertung gemischter Strategien

- Alice: maximiere den schlechtesten Fall

$$\beta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y}$$

  Damit beschreibt $\beta(\mathbf{x})$ die Bewertung der Strategie $\mathbf{x}$ von Alice.

- Alice wird dann $\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x})$ bilden.
- Bewertung der Strategie $\mathbf{y}$ von Bob:

$$\alpha(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{y}$$

- Bob wird dann $\min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$ bilden.
- Als Extremwerte über kompakte, abgeschlossene Mengen sind $\beta(\mathbf{x})$ und $\alpha(\mathbf{y})$ wohldefiniert.

Beispiel 7.4

Alice spielt wieder $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{x}) &= \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \\
&= \min_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \min_{\mathbf{y}} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Die zugehörige Strategie von Bob ist $\mathbf{y} = (1, 0, 0)$.

Nash-Gleichgewicht für gemischte Strategien

Definition 7.5

Ein Paar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ von gemischten Strategien heißt gemischtes Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Wir werden gleich sehen, dass ein Nash-Gleichgewicht die folgenden Eigenschaften hat:

- $\tilde{\mathbf{x}}$ ist die beste Strategie für Alice, wenn Bob $\tilde{\mathbf{y}}$ wählt und
- $\tilde{\mathbf{y}}$ ist die beste Strategie für Bob, wenn Alice $\tilde{\mathbf{x}}$ wählt.

Beispiel 7.6

Die Strategien

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = (1, 0, 0)$$

bilden kein Nash-Gleichgewicht.

Zwar ist $\mathbf{y}$ die beste Strategie für Bob, wenn Alice $\mathbf{x}$ spielt, aber nicht umgekehrt.

Spielt Bob $\mathbf{y}$, dann ist die beste Strategie für Alice $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$.

Ein Nash-Gleichgewicht bilden die Strategien

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \tilde{\mathbf{y}}.$$

Begründung: ✎

Worst-case-optimale Strategien

Definition 7.7

Eine Strategie $\tilde{\mathbf{x}}$ heißt worst-case-optimal für Alice, wenn

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x})$$

gilt. Analog heißt eine Strategie $\tilde{\mathbf{y}}$, für die

$$\alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y})$$

gilt, worst-case-optimal für Bob.

- Annahme von Alice: Wenn sie $\mathbf{x}$ wählt, wählt Bob die zu $\mathbf{x}$ ungünstigste Strategie (aus Sicht von Alice).
- Also wählt Alice eine Strategie, die für diesen Worst-Case am besten ist.

Lemma 7.8

1. *Für zwei gemischte Strategien* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *gilt*

$$\beta(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \leq \alpha(\mathbf{y})$$

   und damit auch

$$\max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y}).$$

2. *Wenn ein Strategiepaar* $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *ein gemischtes Nash-Gleichgewicht bildet, dann sind* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *worst-case-optimal.*
3. *Gilt für die Strategien* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *die Gleichung*

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}),$$

   dann bildet das Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.*

Beweis.

1. Es gilt
$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y} \le \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y} \ge \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{y} = \beta(\mathbf{x}).$$
2. Für alle $\mathbf{x}$ gilt gemäß (1): $\beta(\mathbf{x}) \le \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$.

   Wegen $\alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \beta(\tilde{\mathbf{x}})$ folgt $\beta(\mathbf{x}) \le \beta(\tilde{\mathbf{x}})$.

   Damit ist ist $\tilde{\mathbf{x}}$ worst-case-optimal.

   Beweis für $\alpha(\tilde{\mathbf{y}})$ analog.
3. Aus
$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$
   folgt mit (1):
$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T M \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$
   Damit bildet das Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ ein Nash-Gleichgewicht.

Minimax-Theorem für Zwei-Personen-Nullsummenspiele

Satz 7.9

Für jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel existieren worst-case-optimale Strategien, die mithilfe eines LPs effzient ermittelt werden können.

Wenn $\tilde{\mathbf{x}}$ eine worst-case-optimale Strategie für Alice ist und $\tilde{\mathbf{y}}$ eine für Bob, dann ist $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und die Zahl

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}} = \alpha(\tilde{\mathbf{y}})$$

ist identisch für alle worst-case-optimalen Strategien $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$.

Definition 7.10

Der Wert $\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}}$, also der erwartete Gewinn für Alice in jedem Nash-Gleichgewicht, heißt der Wert des Spiels.

Folgerung 7.11

Ein Strategiepaar $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ *bildet genau dann ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, wenn* $\tilde{\mathbf{x}}$ *und* $\tilde{\mathbf{y}}$ *worst-case-optimal sind.*

Beweis.

Folgt aus Satz 7.9 und Lemma 7.8 (2).

Bemerkungen zum Minimax-Theorem

- Wenn Alice eine worst-case-optimale Strategie wählt, ist ihr erwarteter Gewinn mindestens so groß wie der Wert des Spiels, egal wie Bob sich entscheidet.
- Spielt Bob worst-case-optimal, kann Alice aber auch keinen größeren erwarteten Gewinn erzielen.
- Selbst wenn die Strategien dem Gegner bekannt sind, ist keine Verbesserung möglich.
- Konsequenz aus dem Minimax-Theorem:

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$$

Beweis des Minimax-Theorems

Beweis von Satz 7.9

Das folgende LP liefert eine beste Strategie für Bob zu einer festen Strategie $\mathbf{x}$ von Alice.

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \\ \text{u.d.N.} & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

Der Zielfunktionswert entspricht dann $\beta(\mathbf{x})$.

Um eine worst-case-optimale Strategie für Alice zu finden, müssen wir nun $\beta(\mathbf{x})$ maximieren.
Wie?
Das duale LP (Übungsaufgabe) lautet:

$$\begin{array}{ll} \max & x_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Fortsetzung Beweis.

Das duale LP hat nur eine Variable ($x_1, \ldots, x_m$ sind fest). Der optimale Zielfunktionswert des dualen Programms stimmt mit dem des primalen, also $\beta(\mathbf{x})$, überein (Dualitätstheorem).

Um nun $\beta(\mathbf{x})$ über alle gemischten Strategien $\mathbf{x}$ von Alice zu maximieren, definieren wir das folgende LP (*):

$$\begin{array}{ll} \max & x_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}^T\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Für eine optimale Lösung $(\tilde{x}_0, \tilde{\mathbf{x}})$ dieses LP gilt

$$\tilde{x}_0 = \beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{x}).$$

Fortsetzung Beweis.

Analog können wir ein LP (**) aufstellen, um die worst-case-optimale Strategie für Bob zu berechnen.

$$\begin{array}{ll} \min & y_0 \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{M}\mathbf{y} - \mathbf{1}y_0 \leq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Für eine optimale Lösung $(\tilde{y}_0, \tilde{\mathbf{y}})$ gilt dann

$$\tilde{y}_0 = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y}} \alpha(\mathbf{y}).$$

Damit sind $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$ worst-case-optimale Strategien. Die beiden LPs (*) und (**) sind dual zueinander (Beweis ist Übungsaufgabe). Damit folgt:

$$\beta(\tilde{\mathbf{x}}) = \alpha(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Eine Stein-Papier-Schere-Variante

Beispiel 7.12

Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen in der Zeit, in der sie keine Geschenke austragen müssen, Stein-Papier-Schere. Allerdings kann der Osterhase mit seiner Pfote nicht die Geste für Schere zeigen, weshalb er stets nur die reinen Strategien Stein oder Papier spielt.

Die Auszahlungsmatrix lautet somit:

		Osterhase	
		Stein	Papier
	Stein	0	-1
Weihnachtsmann	Papier	1	0
	Schere	-1	1

Nash-Gleichgewicht?
Wert des Spiels?

Fortsetzung Beispiel.

Wir analysieren das Spiel mithilfe der LPs aus dem Beweis des Minimax-Theorems.

LP für den Weihnachtsmann:

$$\max x_0$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & - & x_3 & - & x_0 & \geq & 0 \\
-x_1 & & & + & x_3 & - & x_0 & \geq & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Optimale Lösung: $(\tilde{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Wie kann man schon an der Auszahlungsmatrix erkennen, dass sich Stein für den Weihnachtsmann nicht lohnt?

Fortsetzung Beispiel.

LP für den Osterhasen:

$$\min y_0$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & -y_2 & - & y_0 & \leq & 0 \\ y_1 & & & - & y_0 & \leq & 0 \\ -y_1 & + & y_2 & - & y_0 & \leq & 0 \\ y_1 & + & y_2 & & & = & 1 \\ & & & & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Optimale Lösung: $(\tilde{y}_0, \tilde{\mathbf{y}}) = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Der Weihnachtsmann gewinnt im Mittel $\frac{1}{3}$ = Wert des Spiels.

Noch ein Spiel

Beispiel 7.13

Alice und Bob wählen eine natürliche Zahl zwischen 1 und 6. Anschließend werden die Zahlen verglichen.

- Alice und Bob haben die gleiche Zahl gewählt: unentschieden.
- Die Differenz der Zahlen ist gleich 1: Der Spieler mit der kleineren Zahl erhält 2 € vom anderen Spieler.
- Die Differenz der Zahlen ist mindestens 2: Der Spieler mit der größeren Zahl erhält 1 € vom anderen Spieler.

Auszahlungsmatrix?

Nash-Gleichgewicht?

Wert des Spiels?

Fortsetzung Beispiel.

- Auszahlungsmatrix: ✎ Tafel
  Für die Auszahlungsmatrix gilt: $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^T$.
- LPs: Homepage
- Nash-Gleichgewicht:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}} = \left(0, \frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

  Die Gleichheit der worst-case-optimalen Strategien ist eine Folge der Symmetrie der Auszahlungsmatrix.
- Wert des Spiels: 0

Beispiel 7.14

Bob kennt sich nicht aus in der Spieltheorie und nutzt daher für das Spiel des vorangegangenen Beispiels die gemischte Strategie

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Wie soll Alice spielen, um den erwarteten Gewinn zu maximieren?

Zugehöriges LP?

Wie hoch ist dann der erwartete Gewinn?

Zusammenfassung

- Grundlegende Strategie: Maximiere den schlechtesten Fall
- Nash-Gleichgewicht bei reinen Strategien: Zeilenminimum = Spaltenmaximum
  Problem: Nash-Gleichgewicht muss nicht existieren.
- gemischte Strategie: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die reinen Strategien
- Minimax-Theorem: Jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.
- Berechnung der worst-case-optimalen Strategien (Nash-Gleichgewicht) mithilfe von LPs
- Theoretischer Hintergrund: Dualität

Kombinatorische Optimierung

1. Totale Unimodularität
2. Komplexität
3. Schnittebenenverfahren
4. Branch-and-Bound
5. Branch-and-Cut
6. Heuristiken und Approximation