Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (Fourier-Motzkin-Elimination)

Gegeben ist das folgende Ungleichungssystem mit drei Variablen:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
& & 2y & + & 2z & \leq & 7 \\
x & & & & & \leq & -1 \\
& & -y & & & \leq & -1 \\
& & & & -z & \leq & -2
\end{array}
$$

(a) Geben Sie ein äquivalentes Ungleichungssystem mit zwei Variablen an.

(b) Bestimmen Sie, ob das Ungleichungssystem eine Lösung hat und geben Sie, falls existent, eine Lösung an.

Lösung:

(a) Wir gehen wie im Beweis zur Fourier-Motzkin-Elimination vor. Wir wählen y als zu eliminierende Variable, weil damit das neue System kleiner ist als bei einer x-Elimination. Wir teilen die Ungleichung auf in Ceiling-, Floor- und Level-Ungleichungen und sorgen mittels Multiplikation dafür, dass der y-Koeffizient bei den Ceiling- bzw. Floor-Ungleichungen gleich 1 bzw. -1 ist.

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
\frac{3}{2}x & + & y & + & 2z & \leq & 5 & \\
-\frac{1}{2}x & + & y & - & \frac{1}{2}z & \leq & \frac{3}{2} & \text{Ceiling} \\
& & y & + & z & \leq & \frac{7}{2} & \\
\hline
2x & - & y & & & \leq & 5 & \text{Floor} \\
& & -y & & & \leq & -1 & \\
\hline
3x & & & + & 2z & \leq & 9 & \\
-2x & & & & & \leq & 4 & \text{Level} \\
x & & & & & \leq & -1 & \\
& & & & -z & \leq & -2 &
\end{array}
$$

Jetzt addieren wir alle Ceiling-Ungleichungen mit allen Floor-Ungleichungen. Die Level-Ungleichungen bleiben unverändert. Damit entsteht:

$$\begin{array}{rcrcr}
\frac{7}{2}x & + & 2z & \leq & 10 \\
\frac{3}{2}x & - & \frac{1}{2}z & \leq & \frac{13}{2} \\
2x & + & z & \leq & \frac{17}{2} \\
\frac{3}{2}x & + & 2z & \leq & 4 \\
-\frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}z & \leq & \frac{1}{2} \\
 & & z & \leq & \frac{5}{2} \\
3x & + & 2z & \leq & 9 \\
-2x & & & \leq & 4 \\
x & & & \leq & -1 \\
 & & -z & \leq & -2
\end{array}$$

Dieses Ungleichungssystem ist äquivalent zum ursprüngleichen Ungleichungssystem.

(b) Wir setzen das Verfahren der Fourier-Motzkin-Elimination fort und eliminieren x.

$$\begin{array}{rcrcrl}
x & + & \frac{4}{7}z & \leq & \frac{20}{7} & \\
x & + & \frac{1}{2}z & \leq & \frac{17}{4} & \\
x & + & \frac{4}{3}z & \leq & \frac{8}{3} & \text{Ceiling} \\
x & + & \frac{2}{3}z & \leq & 3 & \\
x & - & \frac{1}{3}z & \leq & \frac{13}{3} & \\
x & & & \leq & -1 & \\
\hline
-x & - & z & \leq & 1 & \text{Floor} \\
-x & & & \leq & 2 & \\
\hline
 & & z & \leq & \frac{5}{2} & \text{Level} \\
 & & -z & \leq & -2 &
\end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl}
-\frac{3}{7}z \leq \frac{27}{7} & \Rightarrow & z \geq -9 \\
-\frac{1}{2}z \leq \frac{21}{4} & \Rightarrow & z \geq -\frac{21}{2} \\
\frac{1}{3}z \leq \frac{11}{3} & \Rightarrow & z \leq 11 \\
-\frac{1}{3}z \leq 4 & \Rightarrow & z \geq -12 \\
-\frac{4}{3}z \leq \frac{16}{3} & \Rightarrow & z \geq -4 \\
-z \leq 0 & \Rightarrow & z \geq 0 \\
\frac{4}{7}z \leq \frac{34}{7} & \Rightarrow & z \leq \frac{17}{2} \\
\frac{1}{2}z \leq \frac{25}{4} & \Rightarrow & z \leq \frac{25}{2} \\
\frac{4}{3}z \leq \frac{14}{3} & \Rightarrow & z \leq \frac{7}{2} \\
\frac{2}{3}z \leq 5 & \Rightarrow & z \leq \frac{15}{2} \\
-\frac{1}{3}z \leq \frac{19}{3} & \Rightarrow & z \geq -19 \\
0 \leq 1 & & \\
z \leq \frac{5}{2} & \Rightarrow & z \leq \frac{5}{2} \\
-z \leq -2 & \Rightarrow & z \geq 2
\end{array}$$

Die beiden letzten Ungleichungen sind am restriktivsten. Also gilt

$$2 \leq z \leq \frac{5}{2}$$

und das Ungleichungssystem ist somit lösbar.

Wir wählen $z = 2$ und setzen dies in das vorige Ungleichungssystem mit x und z ein. Die Level-Ungleichungen sind damit erfüllt. Für die anderen Unleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x + \frac{8}{7} \leq \frac{20}{7} \quad &\Rightarrow \quad x \leq \frac{12}{7} \\
x + 1 \leq \frac{17}{4} \quad &\Rightarrow \quad x \leq \frac{13}{4} \\
x + \frac{8}{3} \leq \frac{8}{3} \quad &\Rightarrow \quad x \leq 0 \\
x + \frac{4}{3} \leq 3 \quad &\Rightarrow \quad x \leq \frac{5}{3} \\
x - \frac{2}{3} \leq \frac{13}{3} \quad &\Rightarrow \quad x \leq \frac{15}{3} \\
x \leq -1 \quad &\Rightarrow \quad x \leq -1 \\
-x - 2 \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad x \geq -3 \\
-x \leq 2 \quad &\Rightarrow \quad x \geq -2
\end{aligned}$$

Damit folgt $-2 \leq x \leq -1$.

Wir wählen $x = -1$ und setzen nun x und z in das Ungleichungssystem mit y ein. Die Level-Ungleichungen sind natürlich wieder erfüllt. Für die anderen Unleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} + y + 4 \leq 5 \quad &\Rightarrow \quad y \leq \frac{5}{2} \\
\frac{1}{2} + y - 1 \leq \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad y \leq 2 \\
y + 2 \leq \frac{7}{2} \quad &\Rightarrow \quad y \leq \frac{3}{2} \\
-2 - y \leq 5 \quad &\Rightarrow \quad y \geq -7 \\
-y \leq -1 \quad &\Rightarrow \quad y \geq 1
\end{aligned}$$

Somit gilt $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$ und

$$x = -1, \quad y = 1, \quad z = 2$$

ist eine Lösung des Ungleichungssystems.

Aufgabe 2 (LP mittels Fourier-Motzkin-Elimination lösen)

Lösen Sie das LP $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (ohne Vorzeichenbeschränkungen) für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Fourier-Motzkin-Elimination.

Hinweise:

- Führen Sie die zusätzliche Variable z sowie die zusätzliche Ungleichung $-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + z \leq 0$ ein.

- Anschließend führen Sie eine Fourier-Motzkin-Elimination mit z als letzter verbleibender Variablen durch.
- Wählen Sie nun z so groß wie möglich und ermitteln Sie durch Rückeinsetzen eine optimale Lösung.
- Um bei der Fourier-Motzkin-Elimination nicht mit Brüchen rechnen zu müssen, bietet es sich an, die Koeffizienten der zu eliminierenden Variable in den Ceiling- und Floor-Ungleichungen nicht auf 1 bzw. -1 zu bringen, sondern betraglich auf das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Koeffizientenwerte.

  Beispiel: Wenn Sie als erstes die Variable x_3 eliminieren möchten, dann sorgen Sie dafür, dass die Koeffizienten von x_3 zu 40 bzw. -40 werden.

Lösung: Zur Notation: Ich gebe im Folgenden für das Ungleichungssystem nur die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite an. Unter Berücksichtigung des ersten Hinweises erhalten wir damit

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & z & b_i \\ \hline 4 & -12 & -8 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ -5 & -15 & 10 & 0 & 20 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Wir eliminieren nun x_3. Um nicht mit Brüchen rechnen zu müssen, bringen wir die Komponenten der Ceiling- und Floor-Ungleichungen in der x_3 Spalte nicht auf 1 bzw. -1, sondern auf das kleinste gemeinsame Vielfache, also 40 bzw. -40.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & z & b_i \\ \hline 20 & -60 & -40 & 0 & 40 \\ 40 & 120 & -40 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & -40 & 0 & 20 \\ -20 & -60 & 40 & 0 & 80 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 60 & -40 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir jede Floor-Ungleichung (Zeilen 1, 2, 3, 6) mit der Ceiling-Ungleichung (Zeile 4) und nehmen die Level-Ungleichung (Zeile 5) hinzu:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & z & b_i \\ \hline 0 & -120 & 0 & 120 \\ 20 & 60 & 0 & 160 \\ -20 & -40 & 0 & 100 \\ -40 & 0 & 10 & 80 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Als nächstes eliminieren wir x_1. Hierfür bringen wir zunächst die Koeffizienten in der x_1-Spalte auf 40 bzw. -40.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & z & b_i \\ \hline 0 & -120 & 0 & 120 \\ 40 & 120 & 0 & 320 \\ -40 & -80 & 0 & 200 \\ -40 & 0 & 10 & 80 \\ -40 & 80 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir jede Floor-Ungleichung (Zeilen 3, 4, 5) mit der Ceiling-Ungleichung (Zeile 2) und nehmen die Level-Ungleichung (Zeile 1) hinzu:

$$\left(\begin{array}{rr|r} x_2 & z & b_i \\ \hline -120 & 0 & 120 \\ 40 & 0 & 520 \\ 120 & 10 & 400 \\ 200 & 0 & 320 \end{array}\right)$$

Wir bringen die Koeffizienten in der x_2-Spalte auf 600 bzw. -600.

$$\left(\begin{array}{rr|r} x_2 & z & b_i \\ \hline -600 & 0 & 600 \\ 600 & 0 & 7800 \\ 600 & 50 & 2000 \\ 600 & 0 & 960 \end{array}\right)$$

Addition der Ceiling-Ungleichungen (Zeilen 2, 3, 4) mit der Floor-Ungleichung (Zeile 1) ergibt:

$$\left(\begin{array}{r|r} z & b_i \\ \hline 0 & 8400 \\ 50 & 2600 \\ 0 & 1560 \end{array}\right).$$

Die erste und dritte Ungleichung ist erfüllt, aus der zweiten ergibt sich:

$$50z \leq 2600 \quad \Rightarrow \quad z \leq 52.$$

Wir wählen z so groß wie möglich, also $z = 52$. Dies ist der optimale Zielfunktionswert.

Nun setzen wir rückwärts ein. Aus dem (zweiten) Ungleichungssystem mit x_2 und z erhalten wir:

$$\begin{aligned} -600x_2 \leq 600 &\quad \Rightarrow \quad x_2 \geq -1 \\ 600x_2 \leq 7800 &\quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 13 \\ 600x_2 + 2600 \leq 2000 &\quad \Rightarrow \quad x_2 \leq -1 \\ 600x_2 \leq 960 &\quad \Rightarrow \quad x_2 \leq \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Damit folgt $x_2 = -1$.

Wir setzen in das (erste) Ungleichungssystem mit x_1, x_2, z ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 20x_1 - 60 \leq 160 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 11 \\ -20x_1 + 40 \leq 100 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \geq -3 \\ -40x_1 + 520 \leq 80 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 11 \\ -x_1 - 2 \leq 0 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \geq -2 \end{aligned}$$

Damit folgt $x_1 = 11$.

Wir setzen in das Ausgangsproblem ein:

$$\begin{aligned} 44 + 12 - 8x_3 \leq 8 &\quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 6 \\ 11 - 3 - x_3 \leq 2 &\quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 6 \\ -2 - 4x_3 \leq 2 &\quad \Rightarrow \quad x_3 \geq -1 \\ -55 + 15 + 10x_3 \leq 20 &\quad \Rightarrow \quad x_3 \leq 6 \\ -22 - 6 - 4x_3 + 52 \leq 0 &\quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 6 \end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 11, x_2 = -1, x_3 = 6$ die (eindeutige) optimale Lösung.