



Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Nebenbedingung hinzufügen)

- (a) Ermitteln Sie zunächst mit dem primalen Simplexalgorithmus für das LP

$$\max 2x_1 + 6x_2 - 2x_3$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 18 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 25 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

eine optimale Lösung.

- (b) Erweitern Sie anschließend das LP um die Nebenbedingung

$$x_1 - 2x_3 \leq 12$$

und ermitteln Sie ausgehend vom Endtableau des ersten LPs eine optimale Lösung des erweiterten LPs mithilfe des dualen Simplexalgorithmus.

Lösung:

- (a) Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	0	2	1	1	0	0	12
x_5	1	2	-2	0	1	0	18
x_6	-2	4	4	0	0	1	25
z	-2	-6	2	0	0	0	0

Lösung mit dem primalen Simplexalgorithmus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	2	1	1	0	0	12
x_1	1	6	0	2	1	0	42
x_6	0	8	0	0	2	1	61
z	0	2	0	2	2	0	60

- (b) Die zusätzliche Nebenbedingung lautet: $x_1 - 2x_3 \leq 12$. Diese Nebenbedingung wird von der aktuellen Basislösung verletzt: $42 - 2 \cdot 12 = 18 > 12$.

Wir führen eine weitere Schlupfvariable x_7 ein und repräsentieren damit die zusätzliche Nebenbedingung als:

$$x_1 - 2x_3 + x_7 = 12$$

Damit wieder ein zulässiges Tableau entsteht, müssen wir alle Basisvariablen in der zusätzlichen Nebenbedingung durch Nichtbasisvariablen ausdrücken.

Aus dem letzten Tableau ergibt sich:

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_2 + 2x_4 + x_5 &= 42 &\Rightarrow & x_1 = -6x_2 - 2x_4 - x_5 + 42 \\2x_2 + x_3 + x_4 &= 12 &\Rightarrow & x_3 = -2x_2 - x_4 + 12\end{aligned}$$

Für die zusätzliche Nebenbedingung folgt somit:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_3 + x_7 &= 12 \\ \Leftrightarrow (-6x_2 - 2x_4 - x_5 + 42) - 2(-2x_2 - x_4 + 12) + x_7 &= 12 \\ \Leftrightarrow -2x_2 - x_5 + x_7 &= -6\end{aligned}$$

Damit lautet das neue Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	0	2	1	1	0	0	0	12
x_1	1	6	0	2	1	0	0	42
x_6	0	8	0	0	2	1	0	61
x_7	0	-2	0	0	-1	0	1	-6
z	0	2	0	2	2	0	0	60

Dieses Tableau ist nicht primal aber dual zulässig! Wir führen einen dualen Austauschschritt durch. Pivotzeile: x_7 , Pivotspalte: x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	0	0	1	1	-1	0	1	6
x_1	1	0	0	2	-2	0	3	24
x_6	0	0	0	0	-2	1	4	37
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
z	0	0	0	2	1	0	1	54

Aufgabe 2 (Variable hinzufügen)

- (a) Lösen Sie zunächst mit dem dualen Simplexalgorithmus das LP

$$\min 12x_1 + 28x_2 + 30x_3$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 4x_2 - 2x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

- (b) Geben Sie die Matrix an, die in (a) das Start- in das Enttableau überführt.

- (c) Wir erweitern das LP um die Variable x_4 . Das erweiterte LP lautet

$$\begin{aligned}\min 12x_1 + 28x_2 + 30x_3 + 20x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\geq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Erläutern Sie, wie Sie mithilfe der Matrix aus (b) das Endtableau von (a) um die zusätzliche Variable x_4 erweitern können.

- (d) Berechnen Sie eine optimale Lösung für das erweiterte LP.

Lösung: siehe Homepage