Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (Polyeder, Kreuzpolytop)

(a) Geben Sie alle Ecken des 3-dimensionalen Kreuzpolytops

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 \right\}$$

an (ohne Begründung, siehe Folie 134).

(b) Begründen Sie formal, dass es sich bei den Punkten, die Sie in (a) angegeben haben, um Ecken handelt.

Hinweis: Nutzen Sie Satz 3.39.

(c) Wie viele Ecken hat das n-dimensionale Kreuzpolytop?

(d) Stellen Sie das 3-dimensionale Kreuzpolytop in der Form

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$$

mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{8\times 3}$ und einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$ dar.

Hinweis: Ermitteln Sie hierzu die Stützhyperebenen der 2-dimensionalen Seiten.

(e) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\max 37x_1 + 28x_2 + 33x_3$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 5|y_1| + 3|y_2| + 4|y_3| \leq 15 \right\}.$$

Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen und begründen Sie, warum Ihr Verfahren eine optimale Lösung liefert.

Lösung:

(a) Die Ecken sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir begründen formal, dass $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Ecke ist. Für die anderen Ecken geht dies analog.

Sei P die Menge der Punkte, die im Kreuzpolytop liegen. Wir wählen $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit gilt $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = x_1$ für $\mathbf{x} \in P$ und $\mathbf{c}^T\mathbf{v} = 1$.

Aus der Bedingung $|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1$ für P folgt $|x_1| \leq 1$ und somit auch $x_1 \leq 1$. Also ist $\mathbf{v}$ eine Maximalstelle auf P für die Funktion $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Sei nun $\mathbf{y} \in P$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{v}$. Dann muss $y_1 < 1$ gelten, denn aus $y_1 = 1$ würde $y_2 = y_3 = 0$ und somit $\mathbf{y} = \mathbf{v}$ folgen. Aus $y_1 > 1$ würde $\mathbf{y} \notin P$ folgen.

Somit gilt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} < 1 = \mathbf{c}^T\mathbf{v} \text{ für alle } \mathbf{y} \in P \setminus \{\mathbf{v}\}.$$

Damit ist die Eckenbedingung aus Satz 3.39 erfüllt.

(c) Das n-dimensionale Kreuzpolytop hat $2n$ Ecken, nämlich für $i = 1, \ldots, n$ die Vektoren

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_j^{(i)}) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^{(i)} = (y_j^{(i)}) = \begin{cases} -1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{cases}$$

(d) Das dreidimensionale Kreuzpolytop hat 8 Seiten, die jeweils durch drei Ecken definiert werden. Wir leiten ausführlich die Stützhyperebene für eine Seite her und geben die Ergebnisse für die andere Seiten an.

Wir betrachten die Seite, die durch die Ecken

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

begrenzt wird. Wir erhalten

$$\mathbf{r} := \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{s} := \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Richtungsvektoren für die Stützhyperbene H in Parameterform:

$$H = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \mathbf{y} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die Matrixdarstellung benötigen wir die Normalenform der Ebene. Dazu müssen wir als einen Normalenvektor $\mathbf{n}$ finden, der senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ steht. Am einfachsten geht dies mit dem Kreuzprodukt:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{n}.$$

Die Geradengleichung der Stützhyperebene lautet dann

$$\mathbf{n}^T\mathbf{x} - \mathbf{n}^T\mathbf{x}^{(1)} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Der für das Kreuzpolytop erforderliche Halbraum ist dann

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

(man setze z. B. $\mathbf{0} \in P$ in die Geradengleichung ein).

Für die anderen Seiten erhalten wir:

- $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$:
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$:
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$:
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$:
$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$:
$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$:
$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
- $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$:
$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$

Man erkennt deutlich das zugrunde liegende Schema. Damit erhalten wir für die Darstellung $P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Der zulässige Bereich ist ein entlang der Achsen mit unterschiedlichen Faktoren gestrecktes Kreuzpolytop. Als Ecken haben wir

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix},$$

sowie $\mathbf{y}^{(i)} = -\mathbf{x}^{(i)}$ für $i = 1, 2, 3$. Der zulässige Bereich χ ist ein Polyeder, daher könnten wir das Optimierungsproblem analog zu (d) als LP beschreiben, was wir hier aber nicht tun. Da der zulässige Bereich auch beschränkt ist, ist nach Satz 3.42 garantiert, dass das Maximum in einer Ecke angenommen wird. Wegen der negativen Komponente in den Ecken $\mathbf{y}^{(i)}$ kommen diese nicht als optimale Lösung in Frage. Für die übrigen Ecken $\mathbf{x}^{(i)}$ vergleichen wir nun den Zielfunktionswert:

- Zielfunktionswert für $\mathbf{x}^{(1)}$: $37 \cdot 3 = 111$
- Zielfunktionswert für $\mathbf{x}^{(2)}$: $28 \cdot 5 = 140$
- Zielfunktionswert für $\mathbf{x}^{(3)}$: $33 \cdot \frac{15}{4} = 123\frac{3}{4}$

Also ist $\mathbf{x}^{(2)}$ die optimale Lösung.

Aufgabe 2 (Eckenalgorithmus) 1+1+3+2+1=8 Punkte

Gegeben sei das LP
$$\max 16x_1 + 32x_2$$
unter den Nebenbedingungen
$$\begin{array}{rcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & \leq & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & \leq & 4500 \end{array}$$
und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Bringen Sie das LP in Normalform.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}_{LP}$ beschränkt ist.

(c) Bestimmen Sie alle Ecken von $\mathcal{X}_{LP}$.

(d) Geben Sie eine optimale Lösung an.

(e) Welche optimalen Lösungen ergeben sich, wenn die Zielfunktion
$$\max 32x_1 + 16x_2$$
lautet?

Lösung:

(a)
$$\max 16x_1 + 32x_2$$
unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4500 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, & x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Durch die Vorzeichenbedingungen sind alle Variablen nach unten beschränkt.

Wegen $x_2, x_3 \geq 0$ folgt aus der 1. Nebenbedingung: $20x_1 \leq 8000$ und somit $x_1 \leq 400$.

Wegen $x_1, x_5 \geq 0$ folgt aus der 3. Nebenbedingung: $15x_2 \leq 4500$ und somit $x_2 \leq 300$.

Wegen $x_1, x_2 \geq 0$ folgt aus den Nebenbedingungen $x_3 \leq 8000, x_4 \leq 2000$ und $x_5 \leq 4500$.

Damit sind alle Variablen auch nach oben beschränkt.

(c) Wir gehen wie beim Eckenalgorithmus vor. Wir haben 5 Variablen und 3 Nebenbedingungen und damit insgesamt $10 = \binom{5}{3}$ mögliche Indexmengen für eine zulässige Basislösung.

$\{1, 2, 3\}$: Es ergibt sich
$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & = & 4500 & (III) \end{array}$$

$3 \cdot (II) - (III)$ ergibt $6x_1 = 1500$ und somit $x_1 = 250$. Daraus folgt $x_2 = 200$ und eingesetzt in (I) ergibt sich $x_3 = 1000$. Damit haben wir als Ecke:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{1,2,4\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & + & 10x_2 & & & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_4 & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & + & 15x_2 & & & = & 4500 & (III) \end{array}$$

$3 \cdot (I) - 2 \cdot (III)$ ergibt $48x_1 = 15000$ und somit $x_1 = 312\frac{1}{2}$. Daraus folgt $x_2 = 175$ und eingesetzt in (II) entsteht $x_4 < 0$. Keine Ecke!

$\{1,2,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & + & 10x_2 & & & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & + & 15x_2 & + & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

$((I) - 2 \cdot (II)$ ergibt $12x_1 = 4000$ und somit $x_1 = 333\frac{1}{3}$. Daraus folgt $x_2 = 133\frac{1}{3}$ und eingesetzt in (III) ensteht $x_5 = 500$. Damit haben wir als Ecke:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 333\frac{1}{3} \\ 133\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$\{1,3,4\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & + & x_3 & & & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & & & + & x_4 & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & & & & & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (III) entsteht $x_1 = 750$ und damit $x_3, x_4 < 0$. Keine Ecke!

$\{1,3,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & + & x_3 & & & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & & & & & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & & & + & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (II) entsteht $x_1 = 500$ und damit $x_3 < 0$. Keine Ecke!

$\{1,4,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 20x_1 & & & & & = & 8000 & (I) \\ 4x_1 & + & x_4 & & & = & 2000 & (II) \\ 6x_1 & & & + & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (I) entsteht $x_1 = 400$ und damit $x_4 = 400$ und $x_5 = 2100$. Damit haben wir als Ecke:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

$\{2,3,4\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 10x_2 & + & x_3 & & & = & 8000 & (I) \\ 5x_2 & & & + & x_4 & = & 2000 & (II) \\ 15x_2 & & & & & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (III) entsteht $x_2 = 300$ und damit $x_4 = 500$ und $x_3 = 5000$. Damit haben wir als Ecke:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 5000 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{2,3,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 10x_2 & + & x_3 & & & = & 8000 & (I) \\ 5x_2 & & & & & = & 2000 & (II) \\ 15x_2 & & & + & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (II) entsteht $x_2 = 400$ und damit $x_5 < 0$. Keine Ecke!

$\{2,4,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 10x_2 & & & & & = & 8000 & (I) \\ 5x_2 & + & x_4 & & & = & 2000 & (II) \\ 15x_2 & & & + & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Aus (I) entsteht $x_2 = 800$ und damit $x_4 < 0$. Keine Ecke!

$\{3,4,5\}$: Es ergibt sich

$$\begin{array}{ccccr} x_3 & & & = & 8000 & (I) \\ & x_4 & & = & 2000 & (II) \\ & & x_5 & = & 4500 & (III) \end{array}$$

Damit haben wir als Ecke:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8000 \\ 2000 \\ 4500 \end{pmatrix}$$

(d)

Ecke	Zielfunktionswert
$\mathbf{x}^{(1)}$	$16 \cdot 250 + 32 \cdot 200 = 10400$
$\mathbf{x}^{(2)}$	$16 \cdot 333\frac{1}{3} + 32 \cdot 133\frac{1}{3} = 9600$
$\mathbf{x}^{(3)}$	$16 \cdot 400 = 6400$
$\mathbf{x}^{(4)}$	$32 \cdot 300 = 9600$
$\mathbf{x}^{(5)}$	0

(e) Da wir alle Ecken kennen, genügt es, für diese Ecken die neue Zielfunktion auszuwerten.

Ecke	Zielfunktionswert
$\mathbf{x}^{(1)}$	$32 \cdot 250 + 16 \cdot 200 = 11200$
$\mathbf{x}^{(2)}$	$32 \cdot 333\frac{1}{3} + 16 \cdot 133\frac{1}{3} = 12800$
$\mathbf{x}^{(3)}$	$32 \cdot 400 = 12800$
$\mathbf{x}^{(4)}$	$16 \cdot 300 = 4800$
$\mathbf{x}^{(5)}$	0

Hier sind also zwei Ecken optimal: $\mathbf{x}^{(2)}$ und $\mathbf{x}^{(3)}$.