Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Mengen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \neq \emptyset$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M ist konvex und beschränkt $\Rightarrow$ M hat mindestens eine Ecke.

(b) M ist konvex und abgeschlossen $\Rightarrow$ M hat mindestens eine Ecke.

(c) M ist konvex und $\mathbf{x}$ ist Ecke von $M \Rightarrow \mathbf{x} \in \partial M$.

(d) M ist nicht konvex und $\mathbf{x} \in M \Rightarrow$ für alle $\mathbf{y} \in M$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ existiert ein $\lambda \in (0,1)$ mit $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \notin M$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch.

Konkretes Beispiel: Sei
$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 < 1 \wedge 0 < x_2 < 1\}.$$
Dann ist M konvex und beschränkt, hat aber als offene Menge keine Ecken.

(b) Die Aussage ist falsch.

Konkretes Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^n$. Dann ist M konvex und abgeschlossen, hat aber keine Ecken.

Weiteres Beispiel: Sei
$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0\}.$$
Auch hier ist M konvex und abgeschlossen, hat aber keine Ecken.

(c) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Gemäß der Definition von "Ecke" gilt:
$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke } \Rightarrow \mathbf{x} \in M.$$
Annahme: $\mathbf{x} \in M^\circ$. Dann existiert $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M$.

Wähle $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{e}^1$ und $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{e}^1$. Dann gilt $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in U_\epsilon(\mathbf{x})$ und somit $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$. Weiterhin gilt $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ und $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ und
$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}.$$
Somit lässt sich $\mathbf{x}$ als echte Konvexkombination von $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ und $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ darstellen. Widerspruch zu $\mathbf{x}$ ist Ecke.

Also gilt $\mathbf{x} \notin M^\circ$. Wegen $\mathbf{x} \in M$ folgt somit $\mathbf{x} \in \partial M$.

(d) Die Aussage ist falsch.

Die Negation von "M ist konvex" lautet:

$$\exists \mathbf{x} \in M \exists \mathbf{y} \in M \exists \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \notin M$$

Hier wird nur die Existenz irgendwelcher $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ verlangt, so dass die Strecke zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ nicht komplett in M liegt.

Konkretes Beispiel:

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1\} \setminus (0,1)$$

und $\mathbf{x} = (0,0)$. Dann ist M nicht konvex (weil wir am oberen Rand bei $(0,1)$ eine Lücke haben), aber trotzdem liegt jede Strecke von $\mathbf{x}$ zu einem Element $\mathbf{y} \in M$ komplett in M.

Aufgabe 2 (Charakterisierung von Ecken)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $\mathbf{x} \in M$.

Zeigen Sie:

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke} \quad \Longleftrightarrow \quad M \setminus \{\mathbf{x}\} \text{ ist konvex.}$$

Hinweis: Formulieren Sie die Aussage "$\mathbf{x}$ ist Ecke" in Prädikatenlogik und machen Sie logische Äquivalenzumformungen.

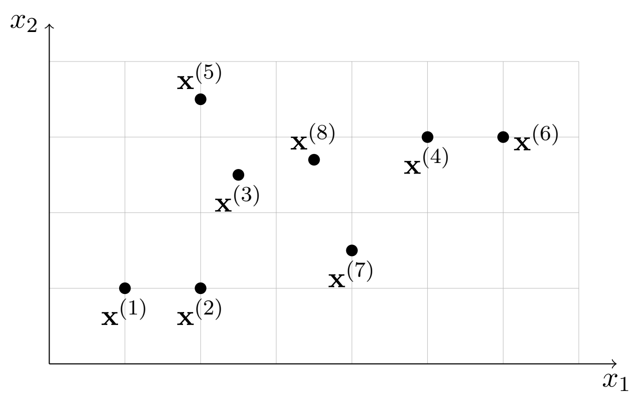
Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \text{ ist Ecke} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ lässt sich nicht als echte Konvexkombination von } \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M, \mathbf{y}, \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \text{ darstellen} \\
&\Leftrightarrow \quad \nexists \mathbf{y} \in M, \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \ \nexists \mathbf{z} \in M, \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \ \nexists \lambda \in (0,1) : (1-\lambda)\mathbf{y} + \lambda \mathbf{z} = \mathbf{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{y} \in M, \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \forall \mathbf{z} \in M, \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \forall \lambda \in (0,1) : (1-\lambda)\mathbf{y} + \lambda \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{y} \in M \setminus \{\mathbf{x}\} \forall \mathbf{z} \in M \setminus \{\mathbf{x}\} \forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)\mathbf{y} + \lambda \mathbf{z} \in M \setminus \{\mathbf{x}\} \\
&\Leftrightarrow \quad M \setminus \{\mathbf{x}\} \text{ ist konvex}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Konvexe Hülle)

Gegeben ist die Menge $M = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(8)}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^{(i)}$	1	2	2.5	5	2	6	4	3.5
$x_2^{(i)}$	1	1	2.5	3	3.5	3	1.5	2.7

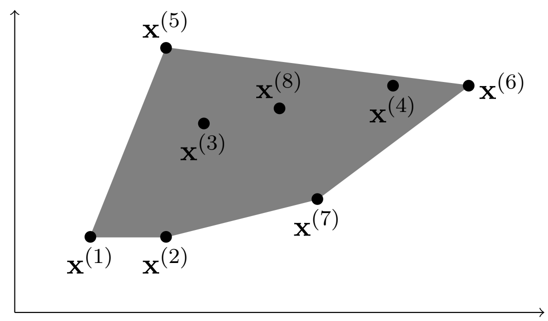


Finden Sie eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m\times 2}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, so dass gilt:

$$\operatorname{conv}(M) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\right\}.$$

Lösung: Es gilt

$$\operatorname{conv}(M) = \operatorname{conv}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(5)}, \mathbf{x}^{(6)}, \mathbf{x}^{(7)}).$$



Jetzt konstruieren wir geeignete Geraden durch jeweils zwei benachbarte Ecken.

Für $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ erhalten wir die Gerade

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 1\}.$$

Die konvexe Hülle liegt oberhalb, also $x_2 \geq 1$ bzw. $-x_2 \leq -1$.

Für $\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(7)}$ erhalten wir die Gerade

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 = 1\}$$

und daraus die Bedingung $\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 \leq -1$.

Für $\mathbf{x}^{(7)}, \mathbf{x}^{(6)}$ erhalten wir die Gerade

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2 = -3\}$$

und daraus die Bedingung $\frac{3}{2}x_1 - 2x_2 \leq 3$.

Für $\mathbf{x}^{(6)}, \mathbf{x}^{(5)}$ erhalten wir die Gerade

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | -\frac{1}{2}x_1 - 4x_2 = -15\}$$

und daraus die Bedingung $\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 \leq 15$.

Für $\mathbf{x}^{(5)}, \mathbf{x}^{(1)}$ erhalten wir die Gerade

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \frac{5}{2}x_1 - x_2 = \frac{3}{2}\}$$

und daraus die Bedingung $-\frac{5}{2}x_1 + x_2 \leq -\frac{3}{2}$.

Wenn wir die Ungleichungen 2 bis 5 mit dem Faktor 2 multiplizieren, erhalten wir die gewünschte Darstellung mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \\ 3 & -4 \\ 1 & 8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \\ 30 \\ -3 \end{pmatrix}.$$