Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (Normalform)

(a) Überführen Sie das lineare Programm

Minimiere
$$z = 5x_1 - 2x_2$$
unter den Nebenbedingungen
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & \geq & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 8 \end{array}$$
und Vorzeichenbedingungen
$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$
in ein Maximumproblem.

(b) Stellen Sie das LP von Teil (a) in Normalform dar.

Lösung:

(a) Durch Umformung ergibt sich zunächst
$$\max -z = -5x_1 + 2x_2$$
unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & \leq & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$
Jetzt ersetzen wir die nicht-vorzeichenbeschränkte Variable x_2 durch x_2^+ und x_2^- mit $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Damit entsteht
$$\max -z = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^-$$
unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & \leq & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2^+ & - & 3x_2^- & \leq & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & \leq & 8 \\ -4x_1 & - & 2x_2^+ & + & 2x_2^- & \leq & -8 \\ & & & & x_1, x_2^+, x_2^- & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Für die Überführung in die Normalform führen wir Schlupfvariablen ein. Da die beiden letzten Nebenbedingungen schon einer Gleichung entsprechen, genügt es hier, für die erste und zweite Nebenbedingung jeweils eine Schlupfvariable einzuführen und aus den beiden letzten Nebenbedingungen wieder eine Nebenbedingung in Gleichungsform zu machen. Es wäre aber auch korrekt, für alle Nebenbedingungen Schlupfvariablen einzuführen.

Das LP in Normalform lautet dann:

$$\max -z = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^-$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & + & x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2^+ & - & 3x_2^- & & & + & x_4 & = & -3 \\ 4x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & & & & & = & 8 \\ & & & & & & & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2 (Eigenschaften von Mengen)

Seien $M, M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M, M_1, M_2 \neq \emptyset$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M_1 ist offen und M_2 ist abgeschlossen $\Rightarrow$ $M_1 \cup M_2$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(b) M_1 und M_2 sind offen $\Rightarrow$ $M_1 \cap M_2$ ist offen.

(c) M ist kompakt $\Rightarrow$ es existiert $\min\limits_{\mathbf{x} \in M} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^i$.

Bearbeiten Sie weiterhin die folgenden Aufgaben.

(d) Zeigen Sie: Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.

(e) Gilt die Aussage von (d) auch für unendlich viele abgeschlossene Mengen?

(f) Zeigen Sie: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.

(g) Begründen Sie: Ein Optimierungsproblem der Form

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \text{ u.d.N. } \mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{b}, \mathbf{x} > \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ kann keine optimale Lösung haben.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch.

Sei $M_1 = (0, 3)$ ein offenes Intervall und $M_2 = [1, 2]$ ein abgeschlossenes. Dann gilt

$$M_1 \cup M_2 = (0, 3) \cup [1, 2] = (0, 3) = M_1,$$

und somit ist $M_1 \cup M_2$ offen.

(b) Die Aussage ist wahr.

Beweis:

$$\begin{array}{lcl} M_1 \text{ offen} & \Rightarrow & \forall \mathbf{x} \in M_1 \exists \epsilon_1 > 0 : U_{\epsilon_1}(\mathbf{x}) \subseteq M_1 \\ M_2 \text{ offen} & \Rightarrow & \forall \mathbf{x} \in M_2 \exists \epsilon_2 > 0 : U_{\epsilon_2}(\mathbf{x}) \subseteq M_2 \end{array}$$

Sei $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$, also $\mathbf{x} \in M_1$ und $\mathbf{x} \in M_2$. Wähle $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Damit folgt $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M_1$ und $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M_2$ und somit $U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M_1 \cap M_2$.

(c) Die Aussage ist wahr.

Beweis:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^i = x_n^n + x_{n-1}^{n-1} + \cdots + x_2^2 + x_1$$

ist als Polynom eine stetige Funktion. Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 3.13) hat eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge M ein Minimum.

(d) Für $1 \leq i \leq k$ sind abgeschlossene Mengen $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Zu zeigen: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ ist abgeschlossen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ ist abgeschlossen} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^C \text{ ist offen} \\ &\Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{k} A_i^C \text{ ist offen.} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i^C$ offen ist.

Sei $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i^C$ beliebig.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \text{für } 1 \leq i \leq k : \mathbf{x} \in A_i^C \\ &\Rightarrow \quad \text{für } 1 \leq i \leq k : \exists \epsilon_i > 0 \text{ mit } U_{\epsilon_i}(\mathbf{x}) \subseteq A_i^C. \qquad /^* \text{ weil } A_i^c \text{ offen}^*/ \end{aligned}$$

Wähle nun $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} > 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \text{für } 1 \leq i \leq k : U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq A_i^C \\ &\Rightarrow \quad U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_i^C. \end{aligned}$$

Also ist $\bigcap_{i=1}^{k} A_i^C$ offen und damit $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ abgeschlossen.

(e) Für unendlich viele abgeschlossene Mengen wird die Aussage falsch.

Beispiel: Es sei $A_i = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ für $i \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1),$$

und dieses Intervall ist offen.

(f) Zunächst gilt

$$M = \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad M = M \cup \partial M \quad \Leftrightarrow \quad \partial M \subseteq M.$$

Wir zeigen nun:

$$M \text{ ist abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \partial M \subseteq M.$$

"⇒": Sei M abgeschlossen.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad M^C \text{ ist offen} \\ &\Rightarrow \quad \forall \mathbf{x} \in M^C \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M^C \quad (*) \end{aligned}$$

Annahme: $\partial M \not\subseteq M$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists \mathbf{y} \in \partial M : \mathbf{y} \in M^C \\ &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \text{ enthält } U_\epsilon(\mathbf{y}) \text{ ein } \mathbf{z} \in M. \quad \text{Widerspruch zu } (*) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Es gelte $\partial M \subseteq M$.

Sei $\mathbf{x} \in M^C$ beliebig. Annahme: Die Aussage $\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M^C$ gilt nicht.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \text{ enthalt } U_\epsilon(\mathbf{x}) \text{ ein } \mathbf{z} \in M \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{x} \in \partial M. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\mathbf{x} \in M^C$, denn nach Voraussetzung gilt ja $\partial M \subseteq M$.

Also gilt: $\forall \mathbf{x} \in M^C \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq M^C$. Damit ist M^C offen und somit M abgeschlossen.

(g) Jede Nebenbedingung und jede Vorzeichenbedingung definiert wegen $<$ eine offene Menge. Damit ist der zulässige Bereich χ als Schnitt von endlich vielen offenen Mengen wieder offen (induktive Anwendung von 2 (b)). Insbesondere gilt $\chi = \chi^\circ$.

Jetzt können wir so argumentieren wie im Beweis zu Lemma 3.14 auf Folie 111.