Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1 (Nash-Gleichgewicht)

Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem Alice fünf und Bob sechs reine Strategien zur Auswahl hat. Die Auszahlungsmatrix (aus Sicht von Alice) lautet:

	Bob					
	1	2	3	4	5	6
1	4	−3	2	0	5	−7
2	−1	−1	−1	2	0	2
Alice 3	0	−5	7	−3	−2	1
4	−6	5	−1	6	−3	1
5	0	2	1	−4	2	−3

Berechnen Sie ein gemischtes Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel. Wie lautet der Wert des Spiels?

Lösung: LPs siehe Homepage. Der Wert des Spiels beträgt -0.271429, d. h. Alice verliert im Mittel 0.271429 pro Spiel.

Worst-case-optimale Strategie für Alice:

$$(0.0857143, 0.614286, 0, 0, 0.3)$$

Worst-case-optimale Strategie für Bob:

$$(0.528571, 0.228571, 0, 0, 0, 0.242857)$$

Aufgabe 2 (Stein-Papier-Schere-Echse-Spock)

Penny und Sheldon spielen Stein-Papier-Schere-Echse-Spock: Schere schneidet Papier, Papier bedeckt Stein, Stein zerquetscht Echse, Echse vergiftet Spock, Spock zertrümmert Schere, Schere köpft Echse, Echse frisst Papier, Papier widerlegt Spock, Spock verdampft Stein und Stein schleift Schere (vgl. Folie 375).

(a) Geben Sie die Auszahlungsmatrix an.

(b) Penny hat große Schwierigkeiten, mit ihren Fingern die Geste für Spock zu zeigen. Sie schämt sich dafür und beschließt, auf diese Strategie zu verzichten (auch in Teilaufgabe (c)). Wie lautet für dieses Spiel das Nash-Gleichgewicht? Wie viel würde Sheldon im Mittel pro Spiel gewinnen?

(c) Sheldon kann nicht anders: Weil er Mr. Spock so mag, wählt er die Strategie Spock mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ (auch wenn das nicht logisch ist). Außerdem findet er Echsen ekelig, so dass seine gemischte Strategie

$$\mathbf{x}^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

ist. Wie sollte Penny jetzt spielen und wie hoch ist ihr erwarteter Gewinn?

Lösung:

(a) Auszahlungsmatrix aus Sicht von Sheldon:

		Penny				
		Stein	*Papier*	*Schere*	*Echse*	*Spock*
	Stein	0	−1	1	1	−1
	Papier	1	0	−1	−1	1
Sheldon	*Schere*	−1	1	0	1	−1
	Echse	−1	1	−1	0	1
	Spock	1	−1	1	−1	0

(b) Neue Auszahlungsmatrix:

		Penny			
		Stein	*Papier*	*Schere*	*Echse*
	Stein	0	−1	1	1
	Papier	1	0	−1	−1
Sheldon	*Schere*	−1	1	0	1
	Echse	−1	1	−1	0
	Spock	1	−1	1	−1

Penny hat nur noch vier reine Strategien zur Auswahl.

LPs siehe Homepage. Der Wert des Spiel und somit der mittlere Gewinn von Sheldon pro Spiel beträgt $\frac{1}{15}$.

Worst-case-optimale Strategie für Sheldon:

$$\left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$$

Worst-case-optimale Strategie für Penny:

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}\right)$$

(c) Für Penny ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\min \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Multiplikation der Vektoren und Matrizen in der Zielfunktion ergibt

$$\min \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{3}y_4.$$

Unter den Nebenbedingungen wird dies für $y_2 = 1$ am kleinsten.

Penny wählt also immer Papier und gewinnt damit im Mittel $\frac{1}{2}$.