



---

## Lineare Optimierung

### Lösungen zu Aufgabenblatt 12

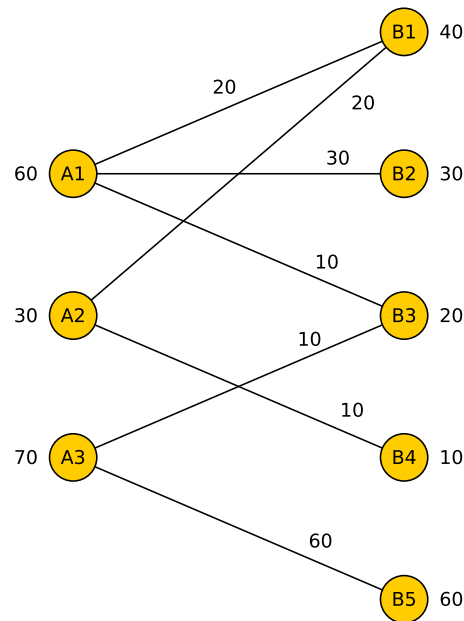
---

#### Aufgabe 1 (u-v-Methode)

- (a) Lösen Sie das Transportproblem von Aufgabenblatt 11, Aufgabe 1 mithilfe der u-v-Methode. Starten Sie Ihre Berechnung mit der zulässigen Basislösung aus 1 (b) (Minimale-Kosten-Regel).
- (b) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis von (a), indem Sie dieses Transportproblem mit dem GLPK lösen.

#### Lösung:

- (a) Wir beginnen mit der Basis aus Aufgabe 1 (b) von Aufgabenblatt 11.



Die Kostenmatrix lautet

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	2	5	6	8	60
$A_2$	2	9	9	1	4	30
$A_3$	6	5	4	3	2	70
	40	30	20	10	60	

Der aktuelle Zielfunktionswert ist  $z = 460$ .

Gemäß der u-v-Methode ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 7 \\ u_1 + v_2 &= 2 \\ u_1 + v_3 &= 5 \\ u_2 + v_1 &= 2 \\ u_2 + v_4 &= 1 \\ u_3 + v_3 &= 4 \\ u_3 + v_5 &= 2. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$u_1 = 0, u_2 = -5, u_3 = -1 \quad \text{und} \quad v_1 = 7, v_2 = 2, v_3 = 5, v_4 = 6, v_5 = 3.$$

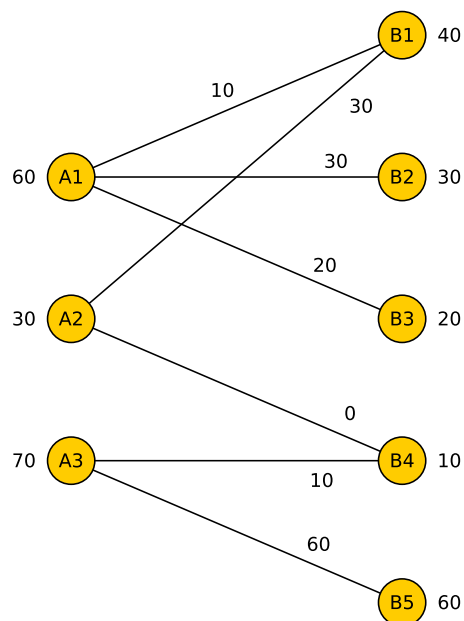
Damit können wir die Schattenpreise der NBVen berechnen:

$$\begin{aligned} B_{1,4} &= 6 - 0 - 6 = 0 \\ B_{1,5} &= 8 - 0 - 3 = 5 \\ B_{2,2} &= 9 - (-5) - 2 = 12 \\ B_{2,3} &= 9 - (-5) - 5 = 9 \\ B_{2,5} &= 4 - (-5) - 3 = 6 \\ B_{3,1} &= 6 - (-1) - 7 = 0 \\ B_{3,2} &= 5 - (-1) - 2 = 4 \\ B_{3,4} &= 3 - (-1) - 6 = -2 \end{aligned}$$

Also nehmen wir  $x_{3,4}$  als neue BV auf. Der eindeutige Weg in der aktuellen Basis von  $A_3$  nach  $B_4$  lautet  $(A_3, B_3, A_1, B_1, A_2, B_4)$ . Damit erhalten wir

$$\Delta = \min\{x_{3,3}, x_{1,1}, x_{2,4}\} = 10.$$

Das Minimum wird bei  $x_{3,3}$  angenommen, also wird  $x_{3,3}$  zur NBV und wir setzen  $x_{3,4} = 10$ . Die neue zulässige Basislösung ist:



Der neue Zielfunktionswert ist  $z = 460 + \Delta \cdot B_{3,4} = 440$ .

Es ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned}u_1 + v_1 &= 7 \\u_1 + v_2 &= 2 \\u_1 + v_3 &= 5 \\u_2 + v_1 &= 2 \\u_2 + v_4 &= 1 \\u_3 + v_4 &= 3 \\u_3 + v_5 &= 2.\end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$u_1 = 0, u_2 = -5, u_3 = -3 \quad \text{und} \quad v_1 = 7, v_2 = 2, v_3 = 5, v_4 = 6, v_5 = 5.$$

Damit können wir die Schattenpreise der NBVen berechnen:

$$\begin{aligned}B_{1,4} &= 6 - 0 - 6 = 0 \\B_{1,5} &= 8 - 0 - 3 = 5 \\B_{2,2} &= 9 - (-5) - 2 = 12 \\B_{2,3} &= 9 - (-5) - 5 = 9 \\B_{2,5} &= 4 - (-5) - 5 = 4 \\B_{3,1} &= 6 - (-3) - 7 = 2 \\B_{3,2} &= 5 - (-3) - 2 = 6 \\B_{3,3} &= 4 - (-3) - 5 = 2\end{aligned}$$

Alle Schattenpreise sind nichtnegativ. Damit ist die aktuelle zulässige Basislösung optimal.

(b) LP siehe Homepage

## Aufgabe 2 (Zuordnungsproblem)

Wir betrachten ein Zuordnungsproblem mit der Kostenmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 1 & 6 & 8 & 8 \\ 11 & 17 & 22 & 18 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 9 & 3 \\ 14 & 2 & 28 & 5 & 17 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie das zugehörige LP auf und lösen Sie das Zuordnungsproblem mit dem GLPK.

**Lösung:** LP siehe Homepage

optimale Zuordnung:

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 4$$

optimaler Zielfunktionswert: 18

## Aufgabe 3 (Transportproblem mit zusätzlichen Restriktionen)

Gegeben sei das Transportproblem:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	14	17	18	24
$A_2$	12	16	15	19
$A_3$	16	18	15	16
	15	15	15	

Beachten Sie, dass es sich nicht um ein geschlossenes Transportproblem handelt: Das Gesamtangebot ist hier größer als die Gesamtnachfrage.

Weiterhin soll berücksichtigt werden, dass aus technischen Gründen von Lager  $A_2$  höchstens 10 ME zu jedem der Warenhäuser  $B_1$  bis  $B_3$  transportiert werden können, also  $x_{2,j} \leq 10$  für  $j = 1, 2, 3$ .

- (a) Modellieren Sie dieses Problem als gewöhnliches geschlossenes Transportproblem.

Hinweis: Sie müssen ein Modell aufstellen, das äquivalent zum gegebenen Problem ist, bei dem aber Gesamtangebot gleich Gesamtnachfrage ist und keine Mengenbeschränkungen für die  $x_{ij}$  auftreten. Sie erreichen dies, indem Sie zusätzliche Lager- und Warenhäuser einführen und dafür passende Kosten definieren.

- (b) Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Modellierung, indem Sie sowohl das Originalmodell als auch die Modellierung als gewöhnliches geschlossenes Transportproblem aus Teil (a) mit dem LP-Solver des GLPK lösen und die Lösungen vergleichen.

### Lösung:

- (a) Das Gesamtangebot (= 59) ist größer als die Gesamtnachfrage (= 45). Für die Differenz führen wir ein zusätzliches Warenhaus mit Nachfrage 14 ein. Die Kosten für den Transport in dieses Warenhaus sind 0.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	14	17	18	0	24
$A_2$	12	16	15	0	19
$A_3$	16	18	15	0	16
	15	15	15	14	

Um zu berücksichtigen, dass von Lager  $A_2$  nur jeweils 10 ME zu den Warenhäusern transportiert werden kann, ersetzen wir  $A_2$  durch drei Lagerhäuser  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,2}$  und  $A_{2,3}$ . Jedes dieser Lagerhäuser erhält einen Bestand von 10. Die Transportkosten definieren wir so, dass sich von Lagerhaus  $A_{2,i}$  nur der Transport zu Warenhaus  $B_i$  lohnt.

Da durch die drei Lagerhäuser der Bestand in  $A_2$  nun 30 statt 19 ist, müssen wir dafür sorgen, dass 11 ME nicht transportiert werden. Hierfür führen wir ein weiteres Warenhaus  $B_5$  ein, in das nur die drei Lagerhäuser  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,2}$  und  $A_{2,3}$  kostenlos transportieren können. Die Transportmengen, die  $B_5$  zugeordnet werden, sind genau die Waren, die nicht transportiert werden also im Lagerhaus verbleiben.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	14	17	18	0	1000	24
$A_{2,1}$	12	1000	1000	0	0	10
$A_{2,2}$	1000	16	1000	0	0	10
$A_{2,3}$	1000	1000	15	0	0	10
$A_3$	16	18	15	0	1000	16
	15	15	15	14	11	

Der Wert 1000 dient dazu, den Transport über die entsprechende Verbindung quasi zu verbieten. Da im Originalproblem die gesamte Transportmenge 45 ME besträgt und die höchsten Transportkosten pro Mengeneinheit gleich 18 sind, ist  $45 \cdot 18 = 810$  eine obere Schranke für die Transportkosten einer optimalen Lösung. Somit kann eine optimale Lösung niemals eine Verbindung mit Transportkosten 1000 enthalten.

- (b) Siehe die LPs auf der Homepage.