Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1 (Transportproblem)

Gegeben sei das folgende Transportproblem:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	2	5	6	8	60
A_2	2	9	9	1	4	30
A_3	6	5	4	3	2	70
	40	30	20	10	60	

(a) Berechnen Sie eine erste zulässige Basislösung mit Hilfe der Nordwesteckenregel.

(b) Berechnen Sie eine erste zulässige Basislösung mit Hilfe der Minimale-Kosten-Regel.

(c) Bestimmen Sie für alle Nichtbasisvariablen der Basislösung von (a) deren Schattenpreise.

(d) Führen Sie für die Nichtbasisvariable mit kleinstem Schattenpreis in (c) einen Basisaustausch durch. Geben Sie die neue zulässige Basislösung und deren Zielfunktionswert an.

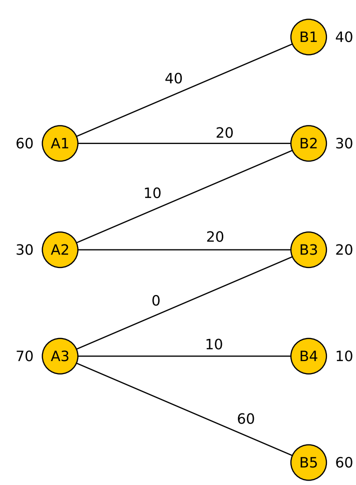
(e) Bestimmen Sie eine optimale Lösung mit dem GLPK oder Gurobi.

Lösung:

(a) Verlauf des Algorithmus:

1. Iteration	$x_{11} = 40, a_1 = 20, b_1 = 0, z = 280$
2. Iteration	$x_{12} = 20, a_1 = 0, b_2 = 10, z = 320$
3. Iteration	$x_{22} = 10, a_2 = 20, b_2 = 0, z = 410$
4. Iteration	$x_{23} = 20, a_2 = 0, b_3 = 0, z = 590$
5. Iteration	$x_{33} = 0, a_3 = 70, b_3 = 0, z = 590$
6. Iteration	$x_{34} = 10, a_3 = 60, b_4 = 0, z = 620$
7. Iteration	$x_{35} = 60, a_3 = 0, b_5 = 0, z = 740$

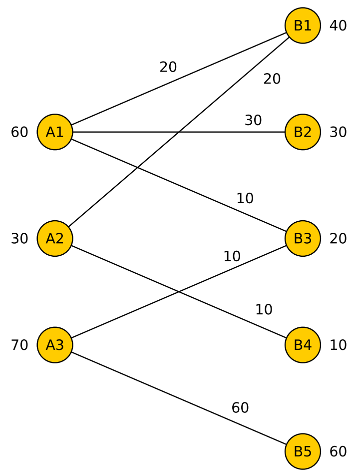
Struktur der zulässigen Basislösung:



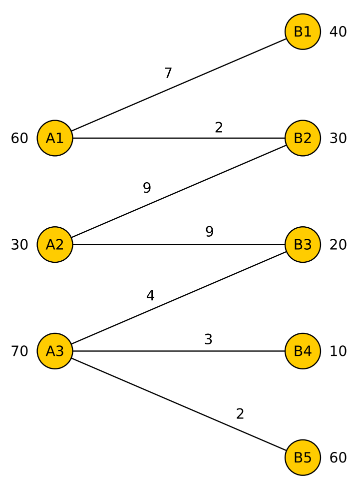
(b) Verlauf des Algorithmus:

1. Iteration	$x_{24} = 10, a_2 = 20, b_4 = 0, z = 10$
2. Iteration	$x_{12} = 30, a_1 = 30, b_2 = 0, z = 70$
3. Iteration	$x_{21} = 20, a_2 = 0, b_1 = 20, z = 110$
4. Iteration	$x_{35} = 60, a_3 = 10, b_5 = 0, z = 230$
5. Iteration	$x_{33} = 10, a_3 = 0, b_3 = 10, z = 270$
6. Iteration	$x_{13} = 10, a_1 = 20, b_3 = 0, z = 320$
7. Iteration	$x_{11} = 20, a_1 = 0, b_1 = 0, z = 460$

Struktur der zulässigen Basislösung:



(c) Hier die Struktur der zulässigen Basislösung mit den Kosten pro Mengeneinheit:



Daraus ergeben sich die folgenden Schattenpreise:

$$
\begin{aligned}
B_{13} &= 5 - 9 + 9 - 2 = 3 \\
B_{14} &= 6 - 3 + 4 - 9 + 9 - 2 = 5 \\
B_{15} &= 8 - 2 + 4 - 9 + 9 - 2 = 8 \\
B_{21} &= 2 - 7 + 2 - 9 = -12 \\
B_{24} &= 1 - 3 + 4 - 9 = -7 \\
B_{25} &= 4 - 2 + 4 - 9 = -3 \\
B_{31} &= 6 - 7 + 2 - 9 + 9 - 4 = -3 \\
B_{32} &= 5 - 9 + 9 - 4 = 1
\end{aligned}
$$

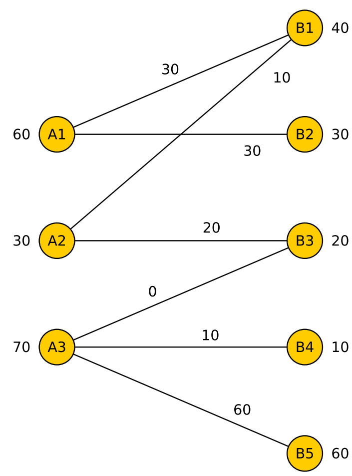
(d) Die Variable B_{21} hat mit -12 den kleinsten Schattenpreis.

Weg von A_2 nach B_1 ist (A_2, B_2, A_1, B_1).

Somit: $x_{21} = \Delta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = 10$. Dieses Minimum wird für x_{22} angenommen. Somit wird x_{22} zur neuen Nichtbasisvariable.

Neuer Zielfunktionswert: $740 + 10 \cdot (-12) = 620$.

Struktur der neuen zulässigen Basislösung:



(e) siehe Homepage

Aufgabe 2 (Stepping-Stone-Methode)

(a) Lösen Sie das folgende Transportproblem mittels der Stepping-Stone-Methode (Netzwerksimplexalgorithmus):

	B_1	B_2	B_3	
A_1	7	2	5	60
A_2	2	9	6	30
	20	30	40	

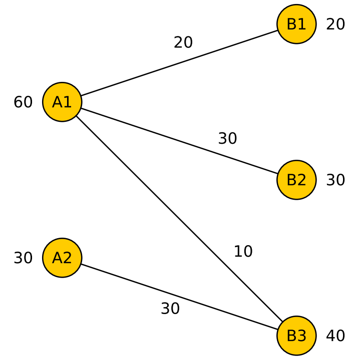
(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (a), indem Sie das Problem mit dem GLPK oder Gurobi lösen.

Lösung:

(a) Die Nordwesteckenregel liefert die zulässige Basislösung:

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= 20 \\
x_{12} &= 30 \\
x_{13} &= 10 \\
x_{23} &= 30
\end{aligned}
$$

mit Zielfunktionswert $z = 430$. Struktur:



Schattenpreise:

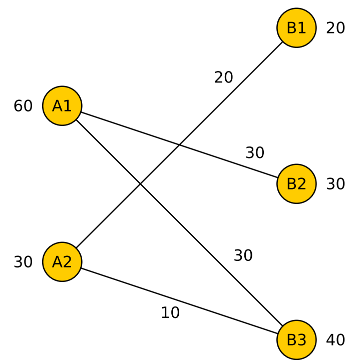
$$\begin{aligned} B_{21} &= 2 - 7 + 5 - 6 = -6 \\ B_{22} &= 9 - 2 + 5 - 6 = 6 \end{aligned}$$

Damit wird x_{21} zur neuen Basisvariable.

Es gilt $x_{21} = \Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 20$ und x_{11} wird zur neuen Nichtbasisvariable.

Neuer Zielfunktionswert: $z = 430 + 20 \cdot (-6) = 310$.

Struktur der neuen zulässigen Basislösung:



Schattenpreise:

$$\begin{aligned} B_{11} &= 7 - 2 + 6 - 5 = 6 \\ B_{22} &= 9 - 2 + 5 - 6 = 6 \end{aligned}$$

Damit ist diese zulässige Basislösung optimal.

(b) siehe Homepage

Aufgabe 3 (Approximationsgüte)

Für eine Instanz I des Transportproblems mit einer Kostenmatrix $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei $W_{opt}(I)$ der optimale Zielfunktionswert und $W_{mkr}(I)$ der Zielfunktionswert, der durch die Minimale-Kosten-Regel entsteht.

Zeigen Sie, dass die Approximationsgüte

$$r(I) = \frac{W_{mkr}(I)}{W_{opt}(I)}$$

der Minimale-Kosten-Regel beliebig groß (und damit beliebig schlecht) sein kann.

Lösung: Wir betrachten die folgende Instanz eines Transportproblems:

	B_1	B_2	
A_1	1	2	1
A_2	2	r	1
	1	1	

Für diese Instanz und $r \geq 3$ ergibt sich $W_{opt}(I) = 4$ und $W_{mkr}(I) = 1 + r$. Daraus folgt:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{W_{mkr}(I)}{W_{opt}(I)} = \lim_{r \to \infty} \frac{1 + r}{4} = \infty.$$