Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 (Farkas-Lemma) — 5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Aussagen (i) und (iii) von Satz 5.20 äquivalent sind.

Hinweis: Um beispielsweise "5.20 (i) $\Rightarrow$ 5.20 (iii)" zu zeigen, überführen Sie zunächst die erste Aussage von 5.20 (iii), also $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, in die Form von 5.20 (i). Dann wenden Sie hierauf 4.20 (i) an. Anschließend müssen Sie die sich daraus ergebende Aussage in die zweite Aussage von 5.20 (iii), also $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$, überführen.

Lösung: "(i) $\Rightarrow$ (iii)": Es gelte 5.20 (i).

Wir formen $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ in die Form um, die wir für die Anwendung von 5.20 (i) benötigen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}| - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}| - \mathbf{A}|\mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir 5.20 (i) an. Danach existiert für $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ genau dann eine Lösung, wenn für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0.$$

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Es gelte 5.20 (iii).

Wir formen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ in die Form um, die wir für die Anwendung von 5.20 (iii) benötigen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir 5.20 (iii) an. Danach existiert für $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ genau dann eine Lösung, wenn gilt:

$$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} : \left(\mathbf{A}^T| - \mathbf{A}^T| - \mathbf{E}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\mathbf{b}^T| - \mathbf{b}^T|\mathbf{0}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Mit $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ wird daraus

$$\forall \mathbf{y} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0.$$

Wegen $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ bedeutet dies

$$\forall \mathbf{y} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0.$$

Aufgabe 2 (Dualität, Komplementärer Schlupf) 4+2+2+4=12 Punkte

(a) Zeigen Sie für die symmetrische Form der Dualität, dass das LP, welches dual zum dualen LP ist, wieder das primale LP ist.

(b) Gegeben ist das folgende LP:

Minimiere

$$2x_1 + x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Geben Sie für dieses LP das duale LP auf.

(c) Lösen Sie das duale LP mit dem passenden Simplexalgorithmus.

(d) Bestimmen Sie aus dem Endtableau von (c) den optimalen Zielfunktionswert und die optimale Lösung des primalen LP. Hinweis: Folie 309/310

Lösung:

(a) Das duale LP in der symmetrischen Form lautet:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Umformung ergibt:

$$\begin{array}{rl} \max & -\mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & -\mathbf{A}^T\mathbf{u} \leq -\mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Damit haben wir wieder ein Maximumproblem und können die symmetrische Form der Dualität anwenden. Das duale Programm lautet dann:

$$\begin{array}{rl} \min & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & -\mathbf{A}^{T^T}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Umformung ergibt:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Damit haben wir wieder das primale Programm in der symmetrischen Form der Dualität.

(b) Das gegebene LP ist ein Minimumproblem und damit das duale LP zu dem folgenden Maximumproblem:

Maximiere

$$5u_1 + 3u_2 - u_3$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3u_1 & + & u_2 & - & u_3 & \leq & 2 \\ u_1 & + & u_2 & + & u_3 & \leq & 1 \\ & & & & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Gemäß (a) ist das Maximumproblem damit das duale Problem zum gegebenen Minimumproblem.

(c) Wir lösen das Maximumproblem mit dem primalen Simplexalgorithmus. Starttableau:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	**c**
u_4	3	1	-1	1	0	2
u_5	1	1	1	0	1	1
$-Z$	-5	-3	1	0	0	0

Pivotspalte ist u_1, Pivotzeile u_4.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	**c**
u_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
u_5	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
$-Z$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$

Pivotspalte u_2, Pivotzeile u_5.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	**c**
u_1	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_2	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-Z$	0	0	2	1	2	4

(d) Aus dem Dualitätstheorem folgt, dass der optimale Zielfunktionswert des primalen LP ebenfalls 4 ist.

In der Zielfunktionszeile können wir die Werte der Schupf- und Strukturvariablen des primalen Programms ablesen: u_1, u_2, u_3 entsprechen den Schlupfvariablen des primalen Programms, u_4, u_5 den Strukturvariablen. Also ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine optimale Lösung des primalen Programms.