Lineare Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Modellierung als LP)

Formulieren Sie die folgenden Probleme als lineare Programme:

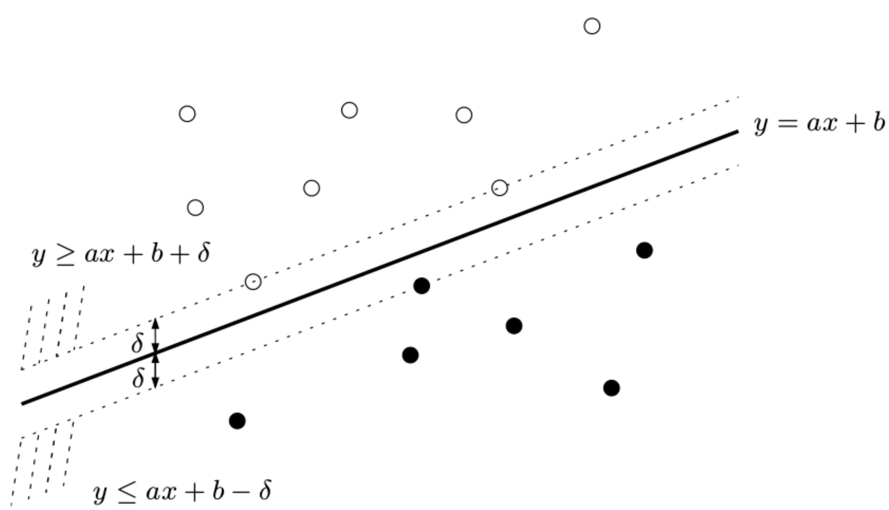
(a) Ein Haus mit 1000 qm Bodenfläche soll möglichst preisgünstig mit Bodenbelag ausgestattet werden, dessen jährliche Reinigungskosten 7000 EUR nicht übersteigen dürfen. Dabei sind mindestens 300 qm mit Parkett C (Preis: 60 EUR/qm, jährl. Reinigungskosten: 4 EUR/qm) auszustatten, während für den Rest die zwei Kunstoffsorten A (Preis: 30 EUR/qm, Reinigungskosten: 9 EUR/qm) und B (Preis: 40 EUR/qm, Reinigungskosten: 8 EUR/qm) zur Verfügung stehen.

(b) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_+$, eine Quelle $s \in V$, eine Senke $t \in V$ mit $t \neq s$, eine Kostenfunktion $k : E \to \mathbb{R}$ sowie eine Zahl $W \in \mathbb{R}_+$.

Gesucht ist ein Fluss $\mathbf{x}$ mit Flusswert $\Phi(\mathbf{x}) = W$, so dass die Gesamtkosten solch eines Flusses minimal sind. Dabei verursacht ein Fluss x_e auf einer Kante $e \in E$ Kosten in Höhe von $k(e)x_e$. Die Gesamtkosten sind die über alle Kanten summierten Kosten.

(c) Gegeben sind n Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ im $\mathbb{R}^2$, davon gehörgen n_1 Punkte zu einer Klasse A und n_2 Punkte zu einer Klasse B $(n = n_1 + n_2)$.

Gesucht ist eine Gerade $y = ax + b$, so dass alle Punkte der Klasse A oberhalb, alle Punkte der Klasse B unterhalb der Geraden liegen und der vertikale Abstand δ der Punkte, welche der Geraden am nächsten sind, maximiert wird. Die folgende Zeichnung veranschaulicht diese Optimierungsaufgabe.



(d) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine *Knotenüberdeckung (vertex cover)* von G ist eine Knotenmenge $U \subseteq V$, so dass für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ mindestens einer ihrer Knoten in U liegt. Gesucht ist eine Knotenüberdeckung U mit einer minimalen Anzahl an Knoten.

Hinweis: Modellieren Sie dieses Problem als ganzzahliges LP.

Lösung:

(a) Für die Fläche der Bodenbeläge A, B, C definieren wir die Variablen x_a, x_b, x_c. Damit lautet das LP:

$$\min 30x_a + 40x_b + 60x_c$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_a & + & x_b & + & x_c & = & 1000 \\ & & & & x_c & \geq & 300 \\ 9x_a & + & 8x_b & + & 4x_c & \leq & 7000 \\ & & & & x_a, x_b, x_c & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Für jede Kante $e \in E$ definieren wir eine Variable x_e. Weiterhin bezeichne $k_e := k(e)$ die Kosten pro Flusseinheit auf der Kante e und $c_e := c(e)$ die Kapazität der Kante e. Damit lautet das LP:

$$\min \sum_{e \in E} k_e x_e$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_e \leq c_e \text{ für alle } e \in E$$
$$\sum_{e=(w,v) \in E} x_e - \sum_{e=(v,w) \in E} x_e = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$
$$\sum_{e=(s,w) \in E} x_e - \sum_{e=(w,s) \in E} x_e = W$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_e \geq 0 \text{ für alle } e \in E.$$

Bemerkung: In der Literatur ist dieses Problem bekannt als *Min-Cost-Flow-Problem*.

(c) Das LP lautet:

$$\max \delta$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcll} x_i a + b + \delta & \leq & y_i & \text{für die Punkte aus } A \\ x_i a + b - \delta & \geq & y_i & \text{für die Punkte aus } B \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$\delta \geq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

(d) Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir eine Variable x_v. Damit lautet das ganzzahlige LP:

$$\min \sum_{v \in V} x_v$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcll} x_v & + & x_w & \geq & 1 & \text{für alle } e = \{v, w\} \in E \\ & & x_v & \leq & 1 & \text{für alle } v \in V \\ & & x_v & \geq & 0 & \text{für alle } v \in V \\ & & x_v & \in & \mathbb{N}_0 & \text{für alle } v \in V \end{array}$$

Für eine optimale Lösung dieses ganzzahligen LP ist dann

$$U = \{v \in V | x_v = 1\}$$

eine Knotenüberdeckung mit einer minimalen Anzahl an Knoten.

Bemerkung: Die drei letzten Nebenbedingungen treten in Ihrer Art bei vielen kombinatorischen Problemen auf. Zukünftig formulieren wir dies kurz als:

$$x_v \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 2 (Graphische Lösung)

(a) Lösen Sie das LP von Aufgabe 1 (a) graphisch.

Hinweis: Nutzen Sie eine der Nebenbedingungen, um eine Variable zu eliminieren.

(b) Beweisen Sie für das LP rechts in Beispiel 1.6 *formal*, dass keine zulässige Lösung existiert.

Hinweis: Leiten Sie aus den Ungleichungen der Nebenbedingungen einen Widerspruch her.

Lösung:

(a) Aus der Gleichung

$$x_a + x_b + x_c = 1000$$

folgt

$$x_c = 1000 - x_a - x_b.$$

Wir setzen die rechte Seite in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen ein, so dass wir damit die Variable x_c eliminieren. Außerdem ersetzen wir die Minimierung durch eine Maximierung, indem wir die Zielfunktion mit -1 multiplizieren. Damit entsteht das lineare Programm

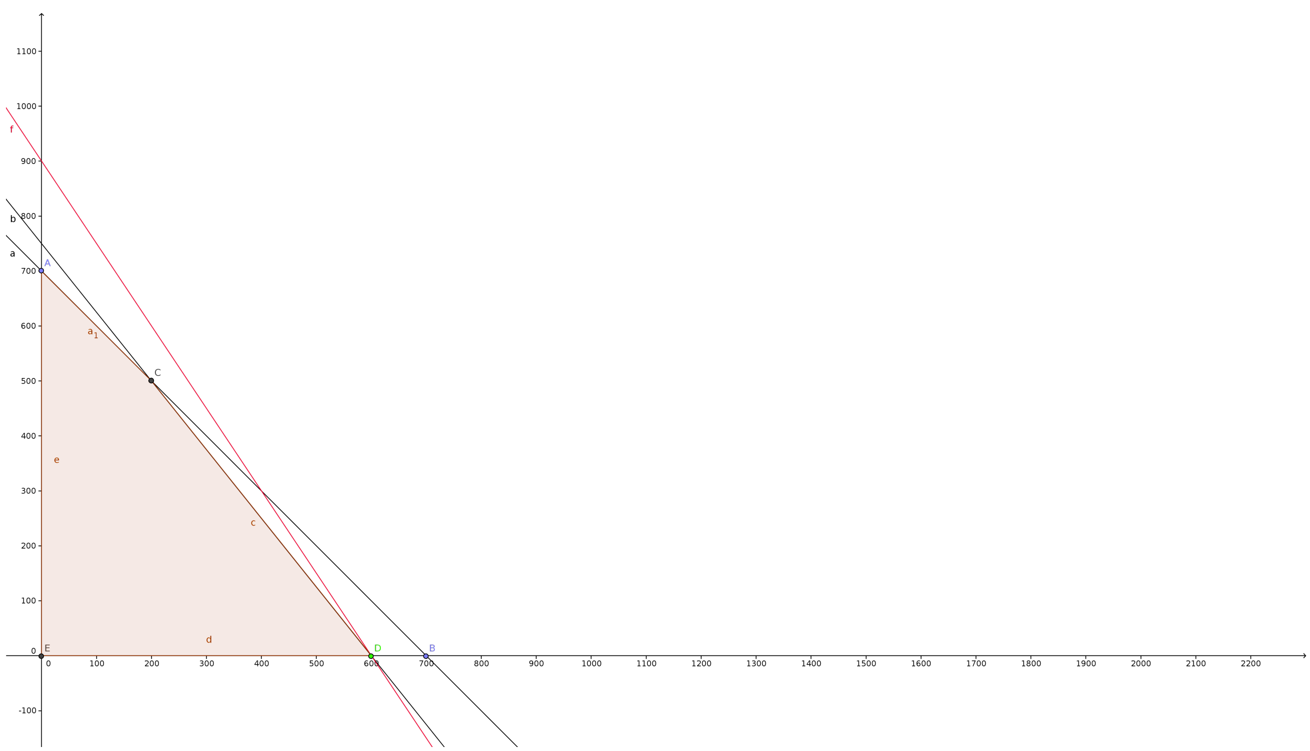
$$\max 30x_a + 20x_b - 60000$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_a & + & x_b & \leq & 700 \\ 5x_a & + & 4x_b & \leq & 3000 \\ & & x_a, x_b & \geq & 0 \end{array}$$

Bemerkung: Die Zielfunktion entspricht in der angegebenen Form nicht unserer LP-Definition (dort ist keine additive Konstante vorgesehen). Dies spielt aber keine Rolle, denn die additive Konstante hat keinen Einfluss auf die optimale Lösung, nur auf den Wert der Zielfunktion. Wir können also so tun, als wäre die Zielfunktion $\max 30x_a + 20x_b$.

Graphische Lösung: Die schwarzen Geraden entsprechen den beiden Nebenbedingungen, die rote Gerade der Zielfunktion.



Also ist $x_a = 600, x_b = 0$ und somit $x_c = 400$ die eindeutige optimale Lösung.

(b) Annahme: Es existiert eine zulässige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Dann muss $\mathbf{x}$ die beiden Nebenbedingungen

$$x_2 - x_1 \geq 1 \quad \text{und} \quad x_1 + 6x_2 \leq 15$$

erfüllen. Nun gilt:

$$x_2 - x_1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \leq -1 \Leftrightarrow 6x_1 - 6x_2 \leq -6$$

Addition der Ungleichungen $x_1 + 6x_2 \leq 15$ und $6x_1 - 6x_2 \leq -6$ führt zu $7x_1 \leq 9$ und somit

$$x_1 \leq \frac{9}{7}.$$

Andererseits muss $\mathbf{x}$ auch die Neben-/Vorzeichenbedingungen

$$4x_1 - x_2 \geq 10 \quad \text{und} \quad x_2 \geq 0$$

erfüllen. Addition der Ungleichungen ergibt $4x_1 \geq 10$ und somit

$$x_1 \geq \frac{5}{2}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $x_1 \leq \frac{9}{7}$.