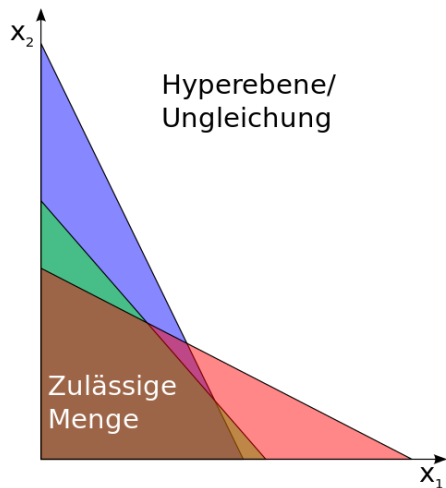


Kapitel 1

Einführung und Beispiele



Inhalt

1 Einführung und Beispiele

- Notationen
- Lineares Programm
- Grafische Lösung
- Beispiele
- Normalform

Notationen für K -Vektorraum

Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\in V$ und den Skalaren $\in K$ schreiben wir die **Vektoren mit fettgedruckten lateinischen Kleinbuchstaben**, z.B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j) \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Skalare nutzen wir üblicherweise **griechische Kleinbuchstaben in Normalschrift**, z.B.

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Vektoren teilweise auch zeilenorientiert, also $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Den **Nullvektor** bezeichnen wir mit **0**. Demgegenüber bezeichnet 0 das neutrale Element des Körpers.

In den meisten nachfolgenden Fällen **verzichten wir auf die Verwendung des Multiplikationssymbols $\cdot$** , sowohl bei der Multiplikation im Körper als auch bei der Multiplikation mit Skalaren. D. h.

$$\lambda\mu \quad := \quad \lambda \cdot \mu$$

$$\lambda\mathbf{v} \quad := \quad \lambda \cdot \mathbf{v}$$

für $\lambda, \mu \in K, \mathbf{v} \in V$.

☞ Wir bewegen uns im Folgenden ausschließlich im **$\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$** .

Notationen für Matrizen

Die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zur Darstellung solcher Matrizen nutzen wir i. d. R. **fette lateinische Großbuchstaben**, z. B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Eine **Nullmatrix** stellen wir ebenfalls durch **0** dar. Aus dem Kontext ergibt sich, ob damit ein Nullvektor oder eine Nullmatrix gemeint ist.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die **transponierte Matrix** von $\mathbf{A}$.

Einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir auch als **einspaltige Matrix** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auffassen.

Das **Skalarprodukt** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ können wir dann als **Matrixprodukt** $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ schreiben.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet

- $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ (**Kleinbuchstabe mit tiefgestelltem Index**) den i -ten Zeilenvektor und
- $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$ (**Kleinbuchstabe mit hochgestelltem Index**) den j -ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$.

Also:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ mit $\mathbf{e}^i = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ und

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden die **kanonische Basis** des $\mathbb{R}^n$.

Die Matrix

$$\mathbf{E} := (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet die **Einheitsmatrix**.

Lineares Programm

Definition 1.1

Es seien $b_i, c_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

Ein **lineares Programm (LP)** ist die Aufgabe, eine lineare **Zielfunktion**

$$z = F(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

für **Entscheidungsvariablen** $x_j \in \mathbb{R}$ zu **maximieren** oder zu **minimieren** unter Beachtung von linearen **Nebenbedingungen** der Form

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m_1)$$

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i \quad (i = m_1 + 1, \dots, m_2)$$

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n \geq b_i \quad (i = m_2 + 1, \dots, m)$$

und meist auch von **Vorzeichenbedingungen** $x_j \geq 0$ für einige oder alle $j = 1, \dots, n$.

Beispiel 1.2

Ein Eisverkäufer stellt stündlich bis zu 10 kg Eis der Sorten A bzw. B her.

	A	B
Verkaufspreis	80 EUR/kg	65 EUR/kg
Kosten	50 EUR/kg	40 EUR/kg
Energieaufwand	5 kWh/kg	2 kWh/kg
absetzbar	6 kg	9 kg

Es stehen höchstens 30 kWh stündlich zur Verfügung.

Entscheidungsvariablen seien die stündlich herzustellenden Mengen x_1 kg bzw. x_2 kg.

Zu maximieren sei die Differenz aus Preis und Kosten.

Modellierung für Beispiel 1.2

Maximiere

$$z = F(x_1, x_2) = 80x_1 + 65x_2 - 50x_1 - 40x_2 = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

Noch ein Beispiel-LP

Beispiel 1.3

Maximiere

$$x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$

$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Zulässige und optimale Lösung

Definition 1.4

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der alle Neben- und Vorzeichenbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Lösung** eines LP.

Mit $\mathcal{X}_{LP}$ bezeichnen wir die **Menge der zulässigen Lösungen**, auch **zulässiger Bereich** genannt, eines linearen Programms LP .

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ heißt **optimale Lösung** eines LP, wenn es keine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ mit besserem Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x}^*)$ gibt.

$F(\mathbf{x}^*)$ heißt dann **optimaler Zielfunktionswert** oder kurz **Maximum** bzw. **Minimum**.

$\mathcal{X}_{LP}^*$ bezeichnet die **Menge der optimalen Lösungen** von LP .

Bemerkung: Wenn aus dem Kontext heraus das lineare Programm eindeutig ist, schreiben wir auch $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^*$ statt $\mathcal{X}_{LP}$ bzw. $\mathcal{X}_{LP}^*$.

Grafische Lösung linearer Programme

Wir betrachten zwei Entscheidungsvariablen x_1 und x_2 :

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

ist die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \text{ und } a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

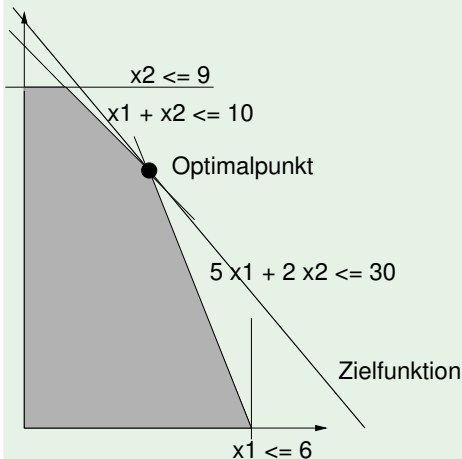
beschreiben jeweils eine Halbebene mit der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ als Rand.

Auch $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ stellen Halbebenen dar.

Der zulässige Bereich ist der **Schnitt endlich vieler Halbebenen**.

Grafische Lösung zu Beispiel 1.2

Beispiel 1.5



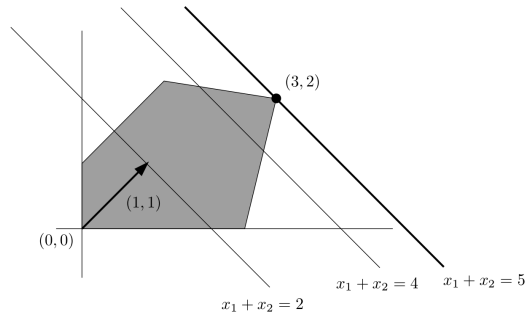
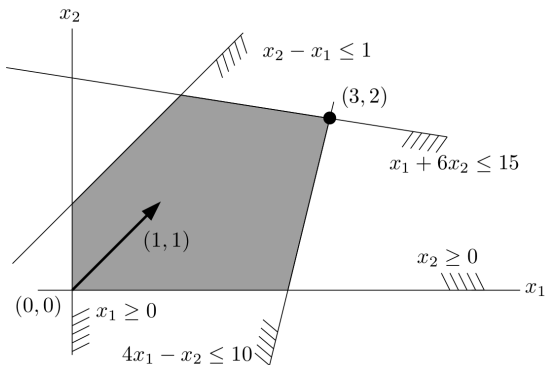
Die Zielfunktion $z = 30x_1 + 25x_2$ wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt.

Wachsendes z bedeutet eine Verschiebung nach rechts oben.

Verschiebe nach oben, solange die Gerade durch $\mathcal{X}$ verläuft!

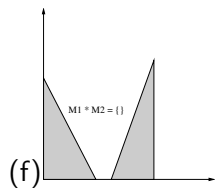
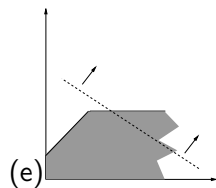
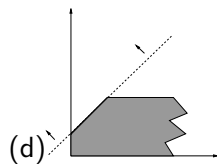
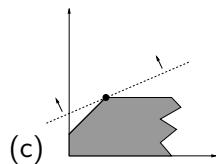
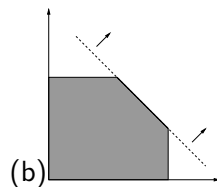
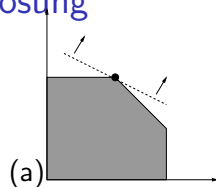
Optimale Lösung im Schnittpunkt der Geraden $x_1 + x_2 = 10$ und $5x_1 + 2x_2 = 30$, also $\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$ mit $z^* = \frac{800}{3}$.

Grafische Lösung zu Beispiel 1.3



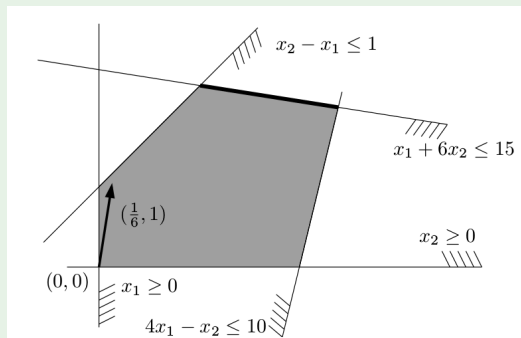
Mögliche Situationen bei grafischer Lösung

- (a) beschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung
- (b) beschränktes $\mathcal{X}$, nichteindeutige optimale Lösung
- (c) unbeschränktes $\mathcal{X}$, eindeutige optimale Lösung
- (d) unbeschränktes $\mathcal{X}$, nichteindeutige optimale Lösung
- (e) unbeschränktes $\mathcal{X}$, keine optimale Lösung
- (f) $\mathcal{X} = \emptyset$, keine zulässige Lösung

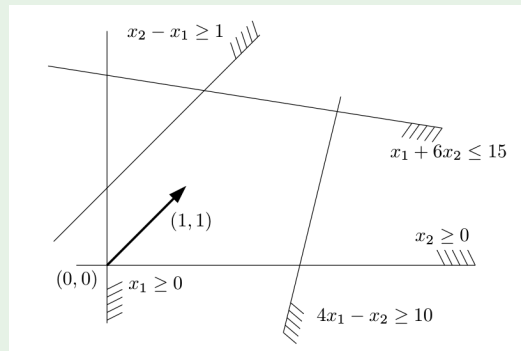


Beispiel 1.6

Beispiel 1.3 mit $\frac{1}{6}x_1 + x_2$ als Zielfunktion.



Mit $\geq$ statt $\leq$ bei zwei Ungleichungen:



Maximalflussproblem als LP

Gegeben:

- gerichteter Graph $G = (V, E)$,
- Kapazitätsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$ mit $s \neq t$.

Ein **zulässiger Fluss** ist eine Funktion $x : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $0 \leq x(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$,
- $\sum_{e=(w,v) \in E} x(e) = \sum_{e=(v,w) \in E} x(e)$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$.

Gesucht ist ein zulässiger Fluss mit maximalem **Flusswert** $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \sum_{e=(s,v) \in E} x(e) - \sum_{e=(v,s) \in E} x(e).$$

Modelliere den Fluss $x(e)$ auf Kante $e \in E$ mithilfe der Variablen x_e . Dann lautet das LP:

$$\max \sum_{e=(s,v) \in E} x_e - \sum_{e=(v,s) \in E} x_e$$

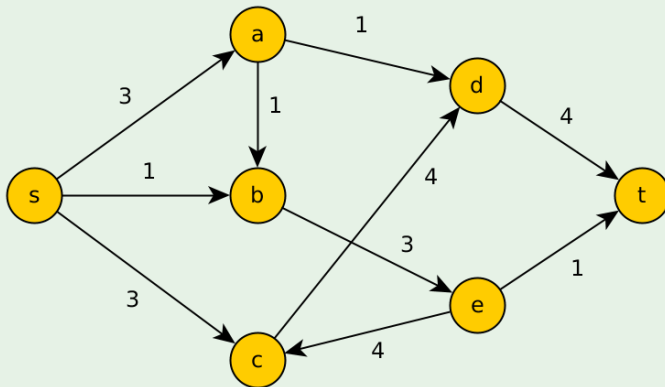
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_e &\leq c(e) && \text{für alle } e \in E \\ \sum_{e=(w,v) \in E} x_e - \sum_{e=(v,w) \in E} x_e &= 0 && \text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\} \end{aligned}$$

sowie Vorzeichenbedingungen $x_e \geq 0$ für alle $e \in E$.

Beispiel 1.7

Wie lautet das Maximalfluss LP für den folgenden Graphen?



Lösung: Tafel .

Regressionsproblem als LP

Gegeben sind Datenpunkte (x_i, y_i) für $i = 1, \dots, n$.

Gesucht sind $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die **Summe der Abweichungen von y_i zu der Geraden $ax + b$ an den Stellen x_i** minimal wird, also

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i| \longrightarrow \min .$$

- Sei $r_i = ax_i + b - y_i$ diese (**vorzeichenhaftete Abweichung**).
- Damit gilt $ax_i + b - r_i = y_i$.
- Dann lautet die Zielfunktion: $\min \sum_{i=1}^n |r_i|$.
- Problem: Der Betrag in der Zielfunktion (weil r_i nicht vorzeichenbeschränkt ist).

- Sei $r_i = u_i - v_i$ mit $u_i \geq 0$ und $v_i \geq 0$.
- Dann lautet die Zielfunktion jetzt:

$$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i \longrightarrow \min .$$

- Die Nebenbedingungen werden damit zu:

$$x_i a + b - u_i + v_i = y_i.$$

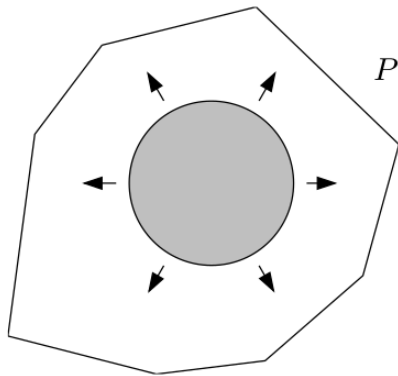
- Vorzeichenbedingungen:
 - ▶ $u_i, v_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$
 - ▶ $a, b \in \mathbb{R}$

Größter Kreis in einem konvexen Polygon

Gegeben sei ein **konvexes Polygon P** .

Gesucht sind Mittelpunkt und Radius eines Kreises, so dass

- der Kreis vollständig in P liegt und
- der Radius maximal ist.

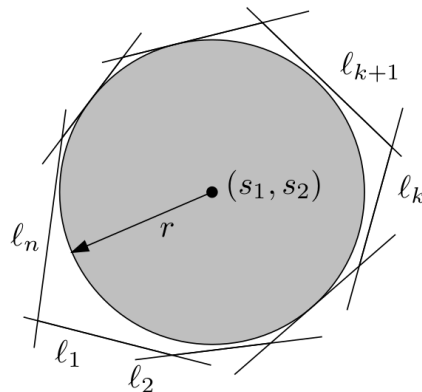


- Wir gehen davon aus, dass **keine Polygonseite vertikal** (parallel zur y -Achse) ist.
- Dann können wir die i -te Polygonseite durch eine Gerade g_i mit **Geradengleichung**

$$y = a_i x + b_i$$

beschreiben.

- Die Indizes i seien so gewählt, dass die Geraden **$g_1, \dots, g_k$ das Polygon von unten beschränken** und
- die **Geraden $g_{k+1}, \dots, g_n$ von oben**.



- Es gilt

$$a_i x + b_i = y \Leftrightarrow -a_i x + y - b_i = 0 \Leftrightarrow \frac{-a_i x + y - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} = 0.$$

- Die rechte Gleichung entspricht der **Hesseschen Normalform** für die Gerade g_i .
- **Abstand eines Punktes** $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ von g_i :

$$\left| \frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} \right|.$$

- **Lage:** $\cdot$ (innerhalb $| \cdot |$) ≥ 0 wenn $\mathbf{s}$ überhalb von g_i liegt, $\cdot \leq 0$ wenn unterhalb.

- Konsequenz: Damit ein Kreis mit Mittelpunkt s und Radius r komplett in P liegt, müssen die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} &\geq r & i = 1, \dots, k \\ \frac{-a_i s_1 + s_2 - b_i}{\sqrt{a_i^2 + 1}} &\leq -r & i = k + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

erfüllt sein.

- Variablen: s_1, s_2, r
- Zielfunktion: $\max r$
- Vorzeichenbedingungen: $r \geq 0$

Schnittproblem als ganzzahliges LP

Aus 3 m langen Metallstangen sollen

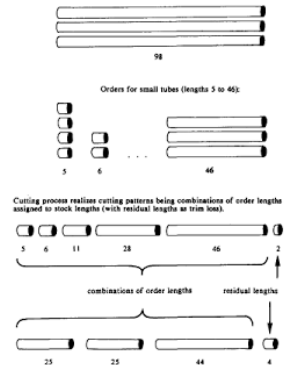
- 10 Stangen mit 1 m,
- 45 Stangen mit 2 m,
- 21 Stangen mit 1.5 m und
- 42 Stangen mit 0.9 m

Länge hergestellt werden.

Die Anzahl der dafür notwendigen 3 m Stangen soll minimiert werden.

Zunächst stellen wir alle möglichen **maximale Schnittmuster** auf, d.h. alle Möglichkeiten, eine 3 m Stange in die geforderten Längen zu zersägen, so dass der verbleibende Rest nicht mehr verwendbar ist.

Muster	1 m	2 m	1.5 m	0.9 m
1	3	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	1	0	1
5	2	0	0	1
6	1	0	0	2
7	0	0	0	3
8	1	0	1	0
9	0	0	1	1



$$x_i = \text{Anzahl der Stangen mit Schnittmuster } i, 1 \leq i \leq 9$$
$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$
$$\begin{array}{rccccccccrccl} 3x_1 & +x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & & +x_8 & & & \geq & 10 \\ & x_2 & & +x_4 & & & & & & & \geq & 45 \\ & & 2x_3 & & & & & +x_8 & +x_9 & & \geq & 21 \\ & & & x_4 & +x_5 & +2x_6 & +3x_7 & & +x_9 & & \geq & 42 \\ & & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Bemerkungen zum Schnittpunktproblem

- lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Problem: Ganzzahligkeit der x_i
- Ganzzahligkeit als weitere Nebenbedingung ist die typische Eigenschaft kombinatorischer Optimierungsprobleme.
- LP-Relaxation (LP mit Verzicht auf Ganzzahligkeit) liefert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert
- Lösungsmethoden: siehe Kapitel 7 sowie die Vorlesungen zu “Kombinatorische Optimierung”

Ganzzahliges lineares Programm

Definition 1.8

Ein lineares Programm mit zusätzlichen Bedingungen $x_i \in \mathbb{Z}$ für alle Variablen x_i heißt **ganzzahliges lineares Programm (integer linear program, ILP)**.

Gilt $x_i \in \mathbb{Z}$ nicht für alle sondern nur für einige der Variablen, so spricht man von einem **gemischt-ganzzahligen linearen Programm (mixed integer program, MIP)**.

Das lineare Programm, das entsteht, wenn wir in einem ILP bzw. MIP die Bedingungen für die Ganzzahligkeit weglassen, heißt **LP-Relaxation**.

Effiziente Lösbarkeit von LPs

LPs sind effizient lösbar.

- In der Praxis

Es stehen leistungsfähige Programmpakete (kommerziell und Open-Source) für die Lösung von LPs mit mehreren tausend Variablen und Nebenbedingungen zur Verfügung.

- In der Theorie

LPs können in polynomieller Zeit gelöst werden (in Bezug auf die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen).

Demgegenüber ist die ganzzahlige lineare Programmierung (in allgemeiner Form) NP-vollständig.

Lineare Algebra vs. Lineare Programmierung

	Basic problem	Algorithm	Solution set
Linear algebra	system of linear equations	Gaussian elimination	affine subspace
Linear programming	system of linear inequalities	simplex method	convex polyhedron

Maximumproblem

Definition 1.9

Ein LP der Form

$$\text{Maximiere } z = F(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$ heißt **Maximumproblem**.

Kompakte Schreibweise

Mit $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können wir ein Maximumproblem auch schreiben als:

Maximiere	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$
unter den Nebenbedingungen	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
und den Vorzeichenbedingungen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Bezeichnungen:

Zielfunktionsvektor	$\mathbf{c}$
Variablenvektor	$\mathbf{x}$
Koeffizientenmatrix	$\mathbf{A}$
Begrenzungsvektor, rechte Seite	$\mathbf{b}$

Beispiel 1.2 in kompakter Schreibweise

Beispiel 1.10

Maximiere

$$(30, 25) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformung in ein Maximumproblem

Satz 1.11

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Form eines Maximumproblems formulieren.

Beweis.

- Ersetze zu minimierende Zielfunktion $z = F(\mathbf{x})$ durch zu maximierende Zielfunktion $-z = -F(\mathbf{x})$.
- Transformiere $\geq$ -Nebenbedingung durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\leq$ -Nebenbedingung.
- Eine Gleichung $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ kann durch zwei Ungleichungen $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ und $\sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \leq -b_i$ ersetzt werden.
- Falls für x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ erlaubt sind, so ersetze x_j durch die zwei Variablen $x_j^+ \geq 0$ und $x_j^- \geq 0$ mit $x_j = x_j^+ - x_j^-$.



Beispiel 1.12

Wir überführen das folgende LP in ein Maximumproblem:

Minimiere

$$z = 3x_1 - 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Fortsetzung Beispiel 1.12

Zunächst sorgen wir für eine Maximierung und stellen alle Nebenbedingungen als $\leq$ Nebenbedingungen dar:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq -4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2 \leq -6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Fortsetzung Beispiel 1.12

Nun wird durch $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+, x_2^- \geq 0$ die fehlende Vorzeichenbeschränkung eliminiert. Wir erhalten:

Maximiere

$$-z = -3x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- \leq 7$$

$$-x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq -4$$

$$3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq -6$$

$$x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0.$$

Normalform

Definition 1.13

Ein LP liegt in **Normalform** vor, wenn es die Form hat:

$$\text{Maximiere} \quad z = F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\text{und Vorzeichenbedingungen} \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

In kompakter Darstellung:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{und den Vorzeichenbedingungen} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Umformung in Normalform

Satz 1.14

Zu jedem LP lässt sich ein äquivalentes LP in Normalform formulieren.

Beweis.

Nach Satz 1.11 lässt sich zu jedem LP ein äquivalentes Maximumproblem formulieren. Es reicht daher zu zeigen, dass jedes Maximumproblem in Normalform überführt werden kann.

Hierzu führen wir für die m Ungleichungen die **Schlupfvariablen** $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ ein, die in der Zielfunktion mit 0 bewertet werden.

Die Variablen $x_1, \dots, x_n$ heißen **Strukturvariablen**.

Fortsetzung Beweis.

Die Normalform ergibt sich dann durch:

Maximiere $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0 \cdot x_j$ unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n + m).$$

In Matrixschreibweise lautet die Normalform

$$z = F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

unter den Bedingungen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Kanonische Normalform

Definition 1.15

Gelten in der Matrixschreibweise für die Normalform die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & 1 \end{array} \right),$$

so ist das LP in **kanonischer Form**.

Beispiel 1.16

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Für die Nebenbedingungen führen wir die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5, x_6 ein und erhalten ...

Fortsetzung Beispiel 1.16.

Maximiere

$$z = 30x_1 + 25x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_6$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 10 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 30 \\ x_1 & & & & & & + & x_5 & = & 6 \\ & & x_2 & & & & & + & x_6 & = & 9 \end{array}$$

und $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, 6$).

Fortsetzung Beispiel 1.16.

In Matrixschreibweise:

Maximiere

$$z = (30 \quad 25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassung

- **Lineares Programm (LP)**: lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen
- Nebenbedingungen eines LPs sind Gleichungen oder Ungleichungen in nicht strikter Form.
- **Ganzzahliges LP, ILP**: Variablen dürfen nur ganzzahlige Werte annehmen.
- Viele bekannte Probleme können als LP oder ILP formuliert werden.