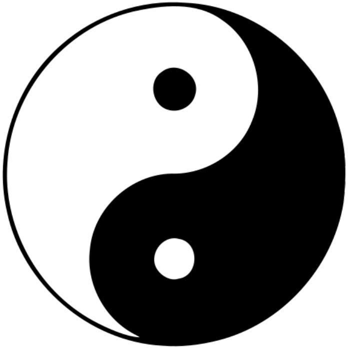
Kapitel 5

Dualität



Inhalt

Minimumproblem

Definition 5.1

Ein LP der Form

Minimiere $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$

und den Vorzeichenbedingungen $x_j \geq 0 \, (j = 1, \ldots, n)$

heißt Minimumproblem. Kompakt:

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{D}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Simplextableau für Minimumproblem

- Für die Anwendung des primalen Simplexalgorithmus benötigen wir ein Maximumproblem in kanonischer Form.
- Wir können die Zielfunktion umformen zu $\max z := -Z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und
- die Nebenbedingungen zu $-\mathbf{D}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$.
- Problem: Wenn vorher $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ galt, dann ist die Basislösung des Starttableaus nicht zulässig.

Mit $\mathbf{A} := -\mathbf{D}$ entsteht das Starttableau

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c|c}
\text{BV} & x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+m} & z & \mathbf{b} \\
\hline
x_{n+1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & \cdots & 0 & 0 & -b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n+m} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & \cdots & 1 & 0 & -b_m \\
\hline
z & c_1 & \cdots & c_n & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ist damit zwar eine Basislösung, aber keine zulässige Basislösung und somit auch keine Ecke von $\mathcal{X}$.

Dual zulässiges Tableau

Definition 5.2

Ein Tableau der Form von Folie 231 mit $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ heißt dual zulässig.

Die zugehörige Basislösung ist eine dual zulässige Basislösung.

Bemerkung: Wegen $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ erfüllt ein dual zulässiges Tableau die Optimalitätsbedingung des Simplexalgorithmus.

Grundidee des dualen Simplexalgorithmus

- Idee: Durch Pivotieren unter Wahrung der dualen Zulässigkeit ($\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$) in Richtung primaler Zulässigkeit gehen.
- Wenn wir $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ erreichen, dann haben wir eine zulässige Basislösung und damit eine Ecke.
- Wegen $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ ist diese Ecke dann sogar eine optimale Lösung!

Dualer Simplex: Wahl der Pivotzeile und -spalte

Wir wählen als erstes die Pivotzeile s durch

$$-b_s^{(r)} = \min\{-b_i^{(r)} \mid -b_i^{(r)} < 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Anschließend die Pivotspalte t durch

$$-\frac{c_t^{(r)}}{a_{s,t}^{(r)}} = \min\left\{ -\frac{c_j^{(r)}}{a_{s,j}^{(r)}} \;\middle|\; a_{s,j}^{(r)} < 0 \right\}.$$

Damit ist das gewählte Pivotelement stets negativ.

Dualer Simplexalgorithmus

Satz 5.3

Das r-te Tableau sei dual zulässig. Wählen wir Pivotzeile und Pivotspalte gemäß Folie 234 und führen einen Basiswechsel gemäß Algorithmus 4.4 durch, dann ist das $(r+1)$-te Tableau wieder dual zulässig und für den Zielfunktionswert gilt $z^{(r+1)} \leq z^{(r)}$.

Bemerkungen:

- Der Basiswechsel im dualen Simplexalgorithmus wird als dualer Austauschschritt bezeichnet.
- Beim dualen Simplexalgorithmus wird nun solange ein dualer Austauschschritt durchgeführt, bis das Tableau auch primal zulässig ist, also $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ gilt.
- Ein Tableau ist immer genau dann optimal, wenn es primal und dual zulässig ist.

Beispiel zum dualen Simplexalgorithmus

Beispiel 5.4

Gegeben sei das LP

$$\min Z = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & -2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 5.4.

Umformung ergibt

$$\max z = -Z = -x_1 - x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -4 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	**b**
x_3	-1	2	1	0	0	0	-1
x_4	-1	-2	0	1	0	0	-4
x_5	-1	-1	0	0	1	0	2
z	1	1	0	0	0	1	0

Pivotzeile: x_4, Pivotspalte: x_2, Pivotelement: -2

Fortsetzung Beispiel 5.4.

2. Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	-2	0	1	1	0	0	-5
x_2	$1/2$	1	0	$-1/2$	0	0	2
x_5	$-1/2$	0	0	$-1/2$	1	0	4
z	$1/2$	0	0	$1/2$	0	1	-2

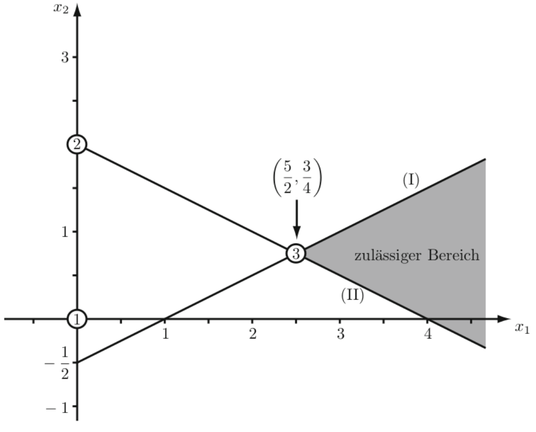
Pivotzeile: x_3, Pivotspalte: x_1, Pivotelement: -2

3. Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	0	0	$5/2$
x_2	0	1	$1/4$	$-1/4$	0	0	$3/4$
x_5	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1	0	$21/4$
z	0	0	$1/4$	$3/4$	0	1	$-13/4$

Fortsetzung Beispiel 5.4.

Lösung: $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$ mit $Z = -z = \frac{13}{4}$.



Primal-dualer Simplexalgorithmus

Primaler und dualer Simplexalgorithmus sind nicht nur zwei alternative Verfahren. Ein großer Vorteil ergibt sich beim Zusammenspiel der beiden Varianten.

Wenn eine Basislösung nicht primal aber dual zulässig ist, können wir durch duale Austauschschritte zu einer primal zulässigen Lösung kommen.

Beispielanwendung:

- Nachträgliches Hinzufügen von Nebenbedingungen bzw. Variablen
- Dies nutzen wir im nächsten Semester bei Schnittebenenverfahren bzw. großen Problemen in der kombinatorischen Optimierung.

Beispiel: nachträglich Nebenbedingung hinzufügen

Beispiel 5.5

Wir wollen zunächst das folgende LP lösen:

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau für primalen Simplexalgorithmus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	2	1	1	0	10
x_4	0	1	0	1	3
z	-2	-3	0	0	0

Fortsetzung Beispiel.

Nach erstem primalen Austauschschritt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_3	2	0	1	-1	7
x_2	0	1	0	1	3
z	-2	0	0	3	9

Nach zweitem primalen Austauschschritt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$7/2$
x_2	0	1	0	1	3
z	0	0	1	2	16

Zunächst optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (7/2, 3)$.

Fortsetzung Beispiel.

Jetzt führen wir die zusätzliche Nebenbedingung

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

ein, die von $\mathbf{x}^*$ nicht erfüllt wird. Mit zusätzlicher Schlupfvariable $x_5 \geq 0$ entsteht die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 8.$$

Wir drücken nun die Basisvariablen x_1 und x_2 durch Nichtbasisvariablen aus:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{2} \\ x_2 + x_4 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -x_4 + 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zusätzliche Nebenbedingung

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + x_5 = -\frac{3}{2}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Das erweiterte Simplextableau lautet damit

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	$-1/2$	$-3/2$	1	$-3/2$
z	0	0	1	2	0	16

Dieses Tableau ist nicht primal aber dual zulässig. Ein dualer Austauschschritt liefert die optimale Lösung für das erweiterte LP:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$2/3$	0	$-1/3$	4
x_2	0	1	$-1/3$	0	$2/3$	2
x_4	0	0	$1/3$	1	$-2/3$	1
z	0	0	$1/3$	0	$4/3$	14

Beispiel: nachträglich Variable hinzufügen

Beispiel 5.6

Wir wollen zunächst das folgende LP lösen:

$$\min 10x_1 + 3x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & & & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau für dualen Simplexalgorithmus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
x_3	-2	0	1	0	-2	(I)
x_4	-1	-1	0	1	-3	(II)
z	10	3	0	0	0	(III)

Fortsetzung Beispiel.

Operationen $(II) = (II) * (-1)$ und $(III) = (III) - 3 * (II)$ ergeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$	
x_3	-2	0	1	0	-2	(I)
x_2	1	1	0	-1	3	(II)
z	7	0	0	3	-9	(III)

Operationen $(I) = (I) * (-1/2)$, $(II) = (II) - (I)$ und $(III) = (III) - 7 * (I)$ ergeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	$-1/2$	0	1
x_2	0	1	$1/2$	-1	2
z	0	0	$7/2$	3	-16

Zunächst optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (1, 2)$.

Fortsetzung Beispiel.

Jetzt erweitern wir das ursprüngliche LP um eine Variable x_5:

$$\min 10x_1 + 3x_2 + 8x_5$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_5 & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_5 & \geq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Auf die neue ursprüngliche Tableauspalte $\begin{array}{|r|} x_5 \\ \hline -1 \\ -2 \\ \hline 8 \end{array}$ wenden wir die gleichen Operationen an, wie auf das ursprüngliche Tableau. Dies entspricht der Multiplikation mit den angewendeten Elementarmatrizen.

Fortsetzung Beispiel.

So entsteht das um die Variable x_5 erweiterte Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	1
x_2	0	1	$1/2$	-1	$3/2$	2
z	0	0	$7/2$	3	$-3/2$	-16

Dieses Tableau ist nicht dual aber primal zulässig. Ein primaler Austausschritt liefert die optimale Lösung für das erweiterte LP:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	$-1/3$	$-2/3$	$1/3$	0	$1/3$
x_5	0	$2/3$	$1/3$	$-2/3$	1	$4/3$
z	0	1	4	2	0	-14

Fortsetzung Beispiel.

Die Matrix zur Transformation des Starttableaus in das zunächst optimale lautet

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Herleitung Übungsaufgabe ✎. Probe:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{7}{2} & 3 & -16 \end{array}\right)$$

Duales Lineares Programm

Zu jedem Optimierungsproblem existiert ein korrespondierendes duales Optimierungsproblem.

Definition 5.7

Gegeben sei das folgende LP als Maximumproblem (primales lineares Programm):

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Dann lautet das zugehörige duale lineare Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Das Paar dieser beiden LPs nennen wir die symmetrische Form der Dualität.

Bemerkungen zum dualen Programm (1)

- Das duale Programm hat so viele Variablen, wie das primale Programm Nebenbedingungen hat.
- Das duale Programm hat so viele Nebenbedingungen, wie das primale Programm Variablen hat.
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$

Bemerkungen zum dualen Programm (2)

Zum Aufstellen des dualen Programms werden die folgenden Schritte ausgeführt:

- Bilden einer Zielfunktion aus dem Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seite der Nebenbedingungen,
- Transponieren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und
- Erzeugung von $\geq$-Nebenbedingungen mit $\mathbf{A}^T$ und dem Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}$ des primalen Programms als rechte Seite.

Beispiel zur Dualität

Beispiel 5.8

Wir betrachten als primales Programm das LP von Beispiel 4.6. Das zugehörige duale Programm lautet dann:

$$\min Z = 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 40u_1 & + & 24u_2 & & & \geq & 10 \\ 24u_1 & + & 48u_2 & + & 60u_3 & \geq & 40 \\ & & & & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Das Maximumproblem geht also in ein Minimumproblem über.

Dualität für ein LP in Normalform

Satz 5.9

Gegeben sei das primale LP in Normalform (mit den üblichen Dimensionen):

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Dann lautet des zugehörige duale Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Definition 5.10

Das Paar der beiden LPs von Satz 5.9 nennen wir die asymmetrische Form der Dualität.

Beweis.

Wir stellen das primale LP

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

als Maximumproblem dar. Hierzu wandeln wir als erstes die $=$-Nebenbedingungen in zwei Nebenbedingungen der Form $\leq$ und $\geq$ um.

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Fortsetzung Beweis zu Satz 5.9.

Durch Multiplikation der $\geq$-Nebenbedingunden mit -1 entsteht dann das Maximumproblem:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Zu diesem Maximumproblem können wir das duale LP aufstellen:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{v} - \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{A}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{v}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ erhalten wir dann das duale lineare Programm:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Bemerkungen

- Statt die Dualität wie in Definition 5.7 zu definieren, hätten wir auch die Dualität über die Beziehung in Satz 5.9 definieren können.
  Diese beiden Formen der Dualität sind äquivalent!
- Der Beweis von Satz 5.9 macht deutlich, wie wir allgemein für ein primales LP das zugehörige duale LP bestimmen können:
  (i) Transformation in ein Maximumproblem
  (ii) Aufstellen des dualen LP gemäß Definition 5.7
  (iii) Vereinfachungen anwenden
- Zur Bestimmung des dualen LPs können wir statt Definition 5.7 natürlich auch Satz 5.9 verwenden.

Beispiele für duale LPs

Beispiel 5.11

Für das primale LP

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

lautet das duale LP:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u. d. N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Beispiel 5.12

Das LP von Beispiel 4.6 lautet in Normalform:

$$\max 10x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
40x_1 & + & 24x_2 & + & x_3 & & & & & = & 480 \\
24x_1 & + & 48x_2 & + & & & x_4 & & & = & 480 \\
 & & 60x_2 & & & & & + & x_5 & = & 480 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0
\end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 5.12.

Das zugehörige duale LP ist dann:

$$\min 480u_1 + 480u_2 + 480u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr}
40u_1 & + & 24u_2 & & & \geq & 10 \\
24u_1 & + & 48u_2 & + & 60u_3 & \geq & 40 \\
u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Obere Schranke für die Zielfunktion

Das folgende Beispiel soll einen stärkeren Einblick in das Konzept der Dualität geben.

Beispiel 5.13

Wir betrachten wieder das LP von Beispiel 4.6:

$$\max z = 10x_1 + 40x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 40x_1 & + & 24x_2 & \leq & 480 \\ 24x_1 & + & 48x_2 & \leq & 480 \\ & & 60x_2 & \leq & 480 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel 5.13.

Wir multiplizieren nun die erste NB mit $u_1 = \frac{1}{4}$, die dritte NB mit $u_3 = \frac{34}{60}$ und addieren diese beiden Ungleichungen:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 10x_1 & + & 6x_2 & \leq & 120 \\ (+) & & & 34x_2 & \leq & 272 \\ \hline (=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 392 \end{array}$$

☞ Auf der linken Seite der Summe steht die Zielfunktion.

Wir haben also, ohne das LP zu lösen, mit 392 eine obere Schranke für den maximalen Zielfunktionswert z hergeleitet.

Fortsetzung Beispiel 5.13.

Andere Faktoren können natürlich andere Schranken liefern. Für

$$u_1 = \frac{1}{8}, \quad u_2 = \frac{5}{24}, \quad u_3 = \frac{27}{60}$$

erhalten wir

$$\begin{array}{lrcrcr}
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\
 & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq & 100 \\
(+) & & & 27x_2 & \leq & 216 \\
\hline
(=) & 10x_1 & + & 40x_2 & \leq & 376
\end{array}$$

mit 376 eine noch etwas bessere obere Schranke.

Interpretation der Dualität (1)

Wir verallgemeinern das Prinzip zur Herleitung oberer Schranken aus Beispiel 5.13:

- Für jede Nebenbedingung definieren wir einen nichtnegativen Faktor u_i, mit dem die i-te Nebenbedingung multipliziert wird. Der Vektor der u_i ist $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.
- Damit die Summe der gewichteten Nebenbedingungen eine obere Schranke für die Zielfunktion ist, müssen in der Summe die Faktoren der Variablen x_i größer oder gleich c_i sein. Dies entspricht $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$.
- Die obere Schranke ist dann $\sum_{i=1}^{m} u_i b_i = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$.
- Die beste obere Schranke ist die kleinste. Also versuchen wir $\mathbf{b}^T\mathbf{u}$ zu minimieren!

Interpretation der Dualität (2)

- Für $\leq$-Ungleichungen dürfen wir nur nichtnegative u_i verwenden,
- denn bei Multiplikation mit negativem u_i würde eine $\geq$-Ungleichung entstehen.
- Dagegen dürfen wir bei $=$-Nebenbedingungen auch negative u_i verwenden.
- Dies erklärt, warum bei der asymmetrischen Form der Dualität die Variablen des dualen Programms nicht vorzeichenbeschränkt sind.
- Allgemein: $\leq$- und $\geq$-Nebenbedingungen des primalen LP korrespondieren mit vorzeichenbeschränkten Variablen des dualen LP, $=$-Nebenbedingungen mit nicht vorzeichenbeschränkten Variablen.

Primales vs. duales LP

primales LP	duales LP
Maximierung	Minimierung
Kostenvektor	rechte Seite
rechte Seite	Kostenvektor
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^T$
$\leq$-Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≥ 0
Gleichung	freie Variable
$\geq$-Ungleichung	Vorzeichenbeschränkung ≤ 0
Vorzeichenbeschränkung ≥ 0	$\geq$-Ungleichung
freie Variable	Gleichung

Weitere Beispiele zur Dualität

Beispiel 5.14

Wir betrachten das primale LP

$$\min 60x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1000 \\ x_1 & & & & & \geq & 300 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & \leq & 7000 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Da es sich um ein Minimierungsproblem handelt, sind wir an unteren Schranken interessiert. In der Summe der Nebenbedingungen brauchen wir also ein $\geq$ und für die Koeffizienten der x_i muss $\leq c_i$ gelten.

Fortsetzung Beispiel 5.14.

Für $u_1 = 120$ und $u_3 = -10$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & 100x_1 & + & 100x_2 & + & 100x_3 & = & 100000 \\ (+) & -40x_1 & - & 90x_2 & - & 80x_3 & \geq & -70000 \\ \hline (=) & 60x_1 & + & 10x_2 & + & 20x_3 & \geq & 30000 \end{array}$$

Für $u_1 = 30$ und $u_2 = 30$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & 30x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & = & 30000 \\ (+) & 30x_1 & & & & & \geq & 9000 \\ \hline (=) & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 30x_3 & \geq & 39000 \end{array}$$

Bemerkung: Der minimale Zielfunktionswert beträgt 42000.

Fortsetzung Beispiel 5.14.

Allgemein lautet dann das duale LP

$$\max 1000u_1 + 300u_2 + 7000u_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & u_2 & + & 4u_3 & \leq & 60 \\ u_1 & & & + & 9u_3 & \leq & 30 \\ u_1 & & & + & 8u_3 & \leq & 40 \end{array}$$
$$u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0$$

Ungleichungssystem

Gegeben sei ein System

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

von Ungleichungen (mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

- Hat das Ungleichungssystem eine Lösung?
- Wie können wir eine Lösung finden oder beweisen, dass keine Lösung existiert?

Eine Antwort auf diese Fragen kennen wir:

☞ Phase 1 des Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Problem: Für theoretische Betrachtungen eher ungeeignet.

Fourier-Motzkin-Elimination

- anderer Ansatz zur Lösung eines Ungleichungssystems
- Grundidee analog zur Gauß-Elimination: Sukzessive wird ein äquivalentes Ungleichungssystem mit einer Variable weniger konstruiert.
- Nachteil: Elimination einer Variablen führt zu einer erhöhten Anzahl an Ungleichungen.
- Aus den Ungleichungen mit einer Variablen können wir erkennen, ob das System lösbar ist oder nicht.
- Durch Rückwärtseinsetzen können wir im Fall der Lösbarkeit eine Lösung erzeugen.
- Die Fourier-Motzkin-Elimination ist insbesondere für theoretische Betrachtungen geeignet.

Das große Bild!

Wozu benötigen wir die Fourier-Motzkin-Elimination?

Fourier-Motzkin-Elimination $\Longrightarrow$ Farkas-Lemma-Variante
$\Longrightarrow$ Farkas-Lemma
$\Longrightarrow$ Starker Dualitätssatz

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (1)

Wir betrachten das folgende Ungleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12
\end{array}
$$

Wir wollen x eliminieren. Hierzu lösen wir alle Ungleichungen nach x auf.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
x & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
x & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
x & \geq & 7 & + & 5y & - & 2z \\
x & \geq & -4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z
\end{array}
$$

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (2)

Wir haben

- drei Ungleichungen, die x nach oben beschränken und
- zwei Ungleichungen, die x nach unten beschränken.

Wennn es eine Lösung des Ungleichungssystems gibt, dann muss

$$\begin{aligned} & \max\left\{7 + 5y - 2z, -4 + \frac{2}{3}y + 2z\right\} \\ \leq \quad & \min\left\{5 + \frac{5}{2}y - 2z, 3 + 2y - z, 3 - 2y + \frac{1}{5}z\right\} \end{aligned}$$

gelten.

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (3)

Insbesondere muss jede Ungleichungskombination zwischen den min- und max-Ungleichungen erfüllt werden.

Damit erhalten wir ein äquivalentes Ungleichungssystem mit sechs Ungleichungen in den Variablen y und z:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z
\end{array}$$

Vorgehen bei der Fourier-Motzkin-Elimination (4)

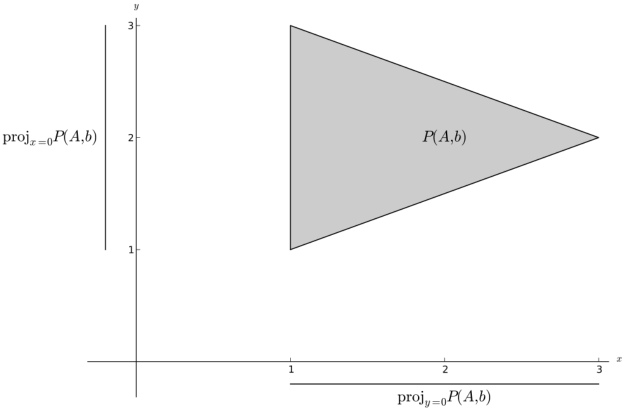
Zusammenfassung ergibt

$$
\begin{array}{rcrcr}
\frac{5}{2}y & & & \leq & -2 \\
3y & - & z & \leq & -4 \\
7y & - & \frac{11}{5}z & \leq & -4 \\
-\frac{11}{6}y & + & 4z & \leq & 9 \\
-\frac{4}{3}y & + & 3z & \leq & 7 \\
\frac{8}{3}y & + & \frac{9}{5}z & \leq & 7
\end{array}
$$

Damit haben wir ein äquivalentes Ungleichungssystem mit einer Variablen weniger.

Wie viele Ungleichungen hätten wir nach der Elimination von y?

Fourier-Motzkin-Elimination als Projektion eines Polyeders



Projektion von $P = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ auf eine Hyperebene der Form $H = \{\mathbf{x} | x_i = 0\}$.

Theorem zur Fourier-Motzkin-Elimination

Satz 5.15

Es sei $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *ein Ungleichungssystem mit* $n \geq 1$ *Variablen und* m *Ungleichungen.*

Dann existiert ein Ungleichungssystem $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *mit* $n-1$ *Variablen und höchstens* $\max\{m, m^2/4\}$ *Ungleichungen, das die folgenden Eigenschaften hat:*

1. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn* $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *eine Lösung hat.*
2. *Jede Ungleichung von* $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ *ist eine positive Linearkombination von Ungleichungen des Systems* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$*.*

Beweis.

Wir unterteilen die Ungleichungen von $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ abhängig von der Variablen x_1 in drei Gruppen:

- $a_{i1} > 0$: Ceiling-Ungleichung
  $C :=$ Menge der Zeilenindices von Ceiling-Ungleichungen
- $a_{i1} < 0$: Floor-Ungleichung
  $F :=$ Menge der Zeilenindices von Floor-Ungleichungen
- $a_{i1} = 0$: Level-Ungleichung
  $L :=$ Menge der Zeilenindices von Level-Ungleichungen

O.B.d.A (durch Multiplizieren) gelte:

$$a_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in C \\ -1 & \text{falls } i \in F \\ 0 & \text{falls } i \in L \end{cases}$$

Fortsetzung Beweis.

Durch die Addition aller Paare von Ceiling- und Floor-Ungleichungen können wir x_1 eliminieren.

Sei $\mathbf{x}' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ und $\mathbf{a}'_i = (a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Dann werden durch die Addition der Ceiling- und Floor-Ungleichungen die Ungleichungen

$$\mathbf{a}'_j\mathbf{x}' + \mathbf{a}'_k\mathbf{x}' \leq b_j + b_k, \quad j \in C, k \in F \quad (*)$$

impliziert. Die Level-Ungleichungen können wir als

$$\mathbf{a}'_l\mathbf{x}' \leq b_l, \quad l \in L \quad (**)$$

schreiben.

Also: Wenn $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ eine Lösung hat, dann hat auch das System der Ungleichungen aus $(*)$ und $(**)$ eine Lösung.

Anzahl der Ungleichungen: $|C| \cdot |F| + |L|$

Fortsetzung Beweis.

Es sei nun $\mathbf{x}' = (x_2, \ldots, x_n)^T$ eine Lösung des Ungleichungssystems $(*), (**)$.

$(*)$ ist äquivalent zu

$$\mathbf{a}'_k\mathbf{x}' - b_k \leq b_j - \mathbf{a}'_j\mathbf{x}' \quad j \in C, k \in F.$$

Dies impliziert

$$\max_{k \in F}\{\mathbf{a}'_k\mathbf{x}' - b_k\} \leq \min_{j \in C}\{b_j - \mathbf{a}'_j\mathbf{x}'\}.$$

Sei x_1 ein beliebiger Wert zwischen diesen Grenzen. Damit folgt

$$\begin{array}{rcll} x_1 + \mathbf{a}'_j\mathbf{x}' & \leq & b_j, & j \in C \\ -x_1 + \mathbf{a}'_k\mathbf{x}' & \leq & b_k, & k \in F. \end{array}$$

Also erfüllt der Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ das Ungleichungssystem $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

Beispiel zur Fourier-Motzkin-Elimination

Beispiel 5.16

Ungleichungen:

$$x_2 - x_1 \geq 1, x_1 + 6x_2 \leq 15, 4x_1 - x_2 \geq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Wir eliminieren x_2. Aus den Ungleichungen erhalten wir

$$x_2 \geq x_1 + 1, x_2 \geq 0$$

und

$$x_2 \leq -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2}, x_2 \leq 4x_1 - 10$$

Fortsetzung Beispiel.

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 \le -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 \le 15 \\
0 \le 4x_1 - 10 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \ge \frac{5}{2} \\
x_1 + 1 \le -\frac{1}{6}x_1 + \frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 \le \frac{18}{14} \\
x_1 + 1 \le 4x_1 - 10 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \ge \frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

Widerspruch:

$$\frac{11}{3} \le x_1 \le \frac{18}{14}$$

Also ist dieses Ungleichungssystem nicht lösbar.

Farkas-Lemma

Satz 5.17

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt genau einer der beiden folgenden Aussagen:

(F1) *Es existiert ein* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

(F2) *Es existiert ein* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

Teilbeweis.

Wir zeigen hier nur, das höchstens eine der beiden Aussagen (F1) und (F2) gilt.

Wenn beide Aussagen gelten, dann folgt aus $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$:

$$(\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} \geq 0.$$

Andererseit gilt:

$$(\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0.$$

Widerspruch!

Der komplette Beweis des Farkas-Lemma folgt später.

Konvexer Kegel

Definition 5.18

Es seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

Dann ist der konvexe Kegel, der durch die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ erzeugt wird, die Menge

$$\mathrm{cone}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \left\{ t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n \,\middle|\, t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0 \right\}.$$

Der konvexe Kegel ist die konvexe Hülle der Strahlen, die vom Ursprung aus durch die Punkte $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ gehen.

Geometrische Variante des Farkas-Lemma (1)

Satz 5.19

Es seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt genau einer der beiden folgenden Aussagen:

(F1') *Der Punkt* $\mathbf{b}$ *liegt in dem konvexen Kegel, der durch die Vektoren* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *erzeugt wird.*

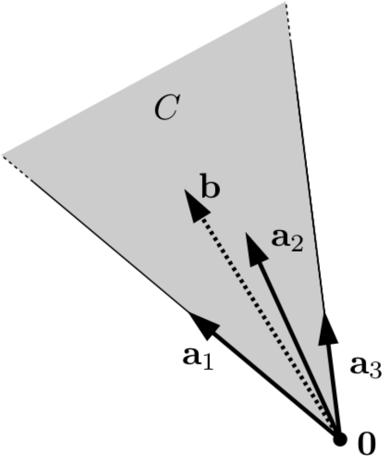
(F2') *Es existiert eine durch den Ursprung gehende Hyperebene* h *mit*

$$h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0\},$$

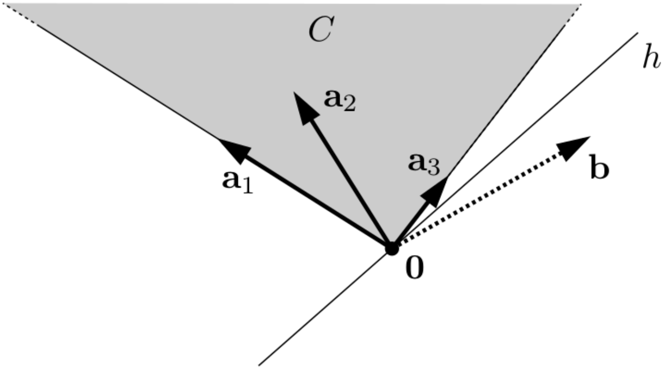
so dass der konvexe Kegel auf der einen und $\mathbf{b}$ *(strikt) auf der andere Seite der Hyperbene liegt, also*

$$\mathbf{y}^T \mathbf{a}_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \text{ und } \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$$

Geometrische Variante des Farkas-Lemma (2)



(F1′)



(F2′)

Farkas-Lemma in drei Varianten

Satz 5.20

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Das System* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(ii) *Das System* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(iii) *Das System* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *hat genau dann eine Lösung, wenn für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *gilt:* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geq 0$.

(i) = Normalform, entspicht Satz 5.17
(ii) = Maximumproblem
(iii) = Ungleichungssystem

Beweis.

Der Beweis erfolgt mit den bekannten Techniken zur Umformung von LPs.

- (i) $\rightarrow$ (ii):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

- (ii) $\rightarrow$ (i):

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}|\mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

- (ii) $\rightarrow$ (iii):

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- (iii) $\rightarrow$ (ii):

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}|-\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x}^+ \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}$$

Beweis des Farkas-Lemma

Wir beweisen Satz 5.20 (iii) mithilfe der Fourier-Motzkin-Elimination.

Beweis von Satz 5.20 (iii)

"$\Rightarrow$": Das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ habe eine Lösung und es gelte $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
Damit erhalten wir:

$$0 = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

"$\Leftarrow$": Jetzt habe das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ keine Lösung. Wir müssen nun einen Vektor $\mathbf{y}$ konstruieren, so dass gilt:

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0.$$

Wir nutzen vollständige Induktion über die Anzahl der Variablen.

Fortsetzung Beweis von Satz 5.20 (iii)

$n = 0$: In diesem Fall haben wir ein System $\mathbf{0} \leq \mathbf{b}$ mit $b_i < 0$ für ein i. Wir setzen $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$.

$n - 1 \to n$: Das System $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ habe $n \geq 1$ Variablen.

Mit der Fourier-Motzkin-Elimination erhalten wir ein äquivalentes System $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ in $n - 1$ Variablen.

Da das System nicht lösbar ist, existiert nach I.V. ein Vektor $\mathbf{y}'$ mit

$$\mathbf{y}' \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}'^T\mathbf{y}' = \mathbf{0}, \mathbf{b}'^T\mathbf{y}' < 0.$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{A}'$ entstand durch positive Linearkombinationen aus $\mathbf{A}$. Also existiert eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit nicht negativen Komponenten, für die gilt:

$$\mathbf{MA} = (\mathbf{0}|\mathbf{A}'), \quad \mathbf{Mb} = \mathbf{b}'.$$

Fortsetzung Beweis von Satz 5.20 (iii)

Sei $\mathbf{y} = \mathbf{M}^T\mathbf{y}'$.

Dann gilt $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ wegen der Nichtnegativität von $\mathbf{M}$.
Weiterhin gilt

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}^T\mathbf{y}' = (\mathbf{M}\mathbf{A})^T\mathbf{y}' = (\mathbf{0}|\mathbf{A}')^T\mathbf{y}' = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}^T\mathbf{M}^T\mathbf{y}' = \mathbf{b}'^T\mathbf{y}' < 0.$$

Wegen

$$5.20 \text{ (iii)} \;\Leftrightarrow\; 5.20 \text{ (i)} \;\Leftrightarrow\; 5.17$$

ist damit das Farkas-Lemma bewiesen.

Schranken für zulässige Lösungen

Satz 5.21 (Schwacher Dualitätssatz)

Gegeben seien primales und duales LP gemäß der asymmetrischen Form der Dualität.
Wenn $\mathbf{x}$ *eine zulässige Lösung des primalen Programms und* $\mathbf{u}$ *eine zulässige Lösung des dualen Programms ist, dann gilt:*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

Beweis.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

□

Folgerung 5.22

Gilt $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$, dann ist $\mathbf{x}$ eine optimale Lösung des primalen LP und $\mathbf{u}$ eine optimale Lösung des dualen LP.

Bemerkungen:

- Satz 5.21 gilt analog für alle zueinander dualen Probleme:
  Ist das primale Problem ein Maximierungsproblem, dann gilt stets
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
  ansonsten
  $$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{u}$$
- Dementsprechend gilt natürlich auch Folgerung 5.22 für alle zueinander dualen Probleme.

Dualitätstheorem der linearen Programmierung

Satz 5.23

Gegeben seien ein primales LP (max) *und das zugehörige duale LP* (min)*. Dann gilt:*

- *Besitzt sowohl das primale LP als auch das duale LP eine zulässige Lösung* $\mathbf{x}$ *bzw.* $\mathbf{u}$*, so haben beide LPs auch optimale Lösungen* $\mathbf{x}^*$ *bzw.* $\mathbf{u}^*$ *und es gilt:*

$$z_{\text{max}} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{u}^* = Z_{\text{min}}$$

- *Ist die Zielfunktion des primalen LP nicht nach oben beschränkt, dann hat das duale LP keine zulässige Lösung.*
- *Ist die Zielfunktion des dualen LP nicht nach unten beschränk, dann hat das primale LP keine zulässige Lösung.*

Beweis.

Wir betrachten o.B.d.A. die symmetrische Form der Dualität.

Es sei $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung des primalen LP und $\gamma = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ sei der optimale Zielfunktionswert.

Dann hat das Ungleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma$$

eine nicht negative Lösung, aber für jedes $\epsilon > 0$ hat das Ungleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \gamma + \epsilon$$

keine nicht negative Lösung.

Fortsetzung Beweis.

Mit

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{c}^T \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_\epsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\gamma - \epsilon \end{pmatrix}$$

können wir die Ungleichungssysteme als

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}_\epsilon$$

schreiben.

Wir wenden das Farkas-Lemma in der Version 5.20 (ii) an.

Für $\epsilon > 0$ folgt, dass ein nicht negativer Vektor $\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \in \mathbb{R}^{m+1}$ existiert mit $\hat{\mathbf{A}}^T\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{b}}_\epsilon^T\hat{\mathbf{y}} < 0$. Genauer:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq z\mathbf{c} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^T\mathbf{u} < z(\gamma + \epsilon). \quad (*)$$

Fortsetzung Beweis.

Für $\epsilon = 0$ hat das System eine nicht negative Lösung und es folgt mit Satz 5.20 (ii) $\hat{\mathbf{b}}_0^T \hat{\mathbf{y}} \geq 0$ bzw.

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \geq z\gamma.$$

Damit folgt $z > 0$ (ansonsten Widerspruch zur strikten Ungleichung $(*)$).

Mit $\mathbf{v} = \frac{1}{z}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ erhalten wir aus $(*)$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c}, \mathbf{b}^T \mathbf{v} < \gamma + \epsilon.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ ist also eine zulässige Lösung für das duale LP mit einem Zielfunktionswert kleiner als $\gamma + \epsilon$.

Fortsetzung Beweis.

Gemäß Satz 5.21 hat jede zulässige Lösung des dualen LP einen Zielfunktionswert $\geq \gamma$.

Insbesondere ist das duale LP nach unten beschränkt und hat damit eine optimale Lösung $\mathbf{y}^*$.

Der Zielfunktionswert $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ der optimalen dualen Lösung liegt also im Intervall $[\gamma, \gamma + \epsilon)$.

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = \gamma$.

Spezialfall: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

- Aus der Vorlesung Graphentheorie kennen wir das Max-Flow-Min-Cut-Theorem:

  In einem Flussnetzwerk ist der Wert $\Phi(f)$ eines Maximalflusses f gleich der Kapazität $c(A_S)$ eines minimalen Schnittes A_S.

- Dies ist ein Spezialfall des Dualitätstheorems 5.23.
- Jeder trennende Schnitt hat eine Kapazität $\geq$ dem Wert eines Maximalflusses. Umgekehrt ist der Wert eines beliebiges Flusses stets $\leq$ der Kapazität eines minimalen Schnittes.
- In den Optima treffen sich die Werte: Das Maximalflussproblem und das Problem der Bestimmung eines minimalen Schnittes sind zueinander dual.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Satz 5.24

Gegeben seien primales und duales LP in asymmetrischer Form.

Eine zulässige Lösung **x** *des primalen LP und eine zulässige Lösung* **u** *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j$$

Beweis.

Für die $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ gilt nach Satz 5.21:

$$0 \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c})$$

Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ jeweils optimal, dann gilt nach dem Dualitätstheorem $= 0$. Also muss für $x_j > 0$ gelten, dass die j-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}$ gleich 0 ist.
Umgekehrt folgt aus

$$x_j > 0 \Rightarrow (\mathbf{a}^j)^T\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = c_j$$

dass gilt

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}) = 0$$

und damit $\mathbf{b}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Also sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ nach dem Dualitätstheorem optimal. □

Satz vom Komplementären Schlupf

Satz 5.25

Gegeben seien primales und duales LP in symmetrischer Form.

Durch Einführen von m Schlupfvariablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ *für das primale LP und n Schlupfvariablen* $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_{m+n}$ *für das duale LP gehen die LPs über in die Normalform.*

Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}$ *des primalen LP und eine zulässige Lösung* $\mathbf{u}$ *des dualen LP sind genau dann optimal, wenn gilt:*

$$x_i u_{m+i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad u_j x_{n+j} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m$$

- Die Strukturvariablen des primalen LP korrespondieren mit den Schlupfvariablen des dualen LP und umgekehrt.
- Ist für die optimale Lösung des primalen LP $x_i > 0$, so ist $u_{m+i} = 0$. Analog gilt: $u_j > 0$ impliziert $x_{n+j} = 0$.

Beweis.

Wir betrachten die LPs

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq 0 \end{array}$$

Wir führen Vektoren $\mathbf{x}' = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ und $\mathbf{u}' = (u_{m+1}, \ldots, u_{n+m})$ mit Schlupfvariablen ein.

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x}' \geq 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} \min & Z = \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{u}' \geq 0 \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}')^T\mathbf{u} & = & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ (\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}')^T\mathbf{x} & = & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{array}$$

Fortsetzung Beweis.

Mit Satz 5.21 ergibt sich

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{x}'^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T\mathbf{A} - \mathbf{u}'^T)\mathbf{x}^T \geq 0$$

Nach dem Dualitätstheorem sind nun $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ optimale Lösungen der beiden zueinander dualen LPs genau dann, wenn gilt:

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{x}'^T)\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T\mathbf{A} - \mathbf{u}'^T)\mathbf{x}^T = 0$$

bzw.

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{u} + \mathbf{u}'^T\mathbf{x} = 0$$

Wegen den Vorzeichenbedingungen entspricht dies genau dem Satz vom komplementären Schlupf.

Beispiel zum komplementären Schlupf

Beispiel 5.26

Das Problem aus Beispiel 4.6 haben wir bereits mit dem primalen Simplexalgorithmus gelöst.

☞ siehe Endtableau

Das zugehörige duale Problem haben wir in Beispiel 5.12 formuliert.

☞ siehe LP

Wir lösen dieses LP mit dem dualen Simplexalgorithmus.

1. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_5	-24	-48	-60	0	1	0	-40
$-Z$	480	480	480	0	0	1	0

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_4	-40	-24	0	1	0	0	-10
u_3	$2/5$	$4/5$	1	0	$-1/60$	0	$2/3$
$-Z$	288	96	0	0	8	1	-320

3. Tableau:

BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360

Fortsetzung Beispiel.

Wir vergleichen die beiden Endtableaus:

	primales Programm						
	Strukturvariablen		Schlupfvariablen				
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\mathbf{b}$
x_3	0	0	1	$-5/3$	$14/15$	0	128
x_1	1	0	0	$1/24$	$-1/30$	0	4
x_2	0	1	0	0	$1/60$	0	8
z	0	0	0	$5/12$	$1/3$	1	360
	Wert der Schlupfvariablen		Wert der Strukturvariablen				
	duales Programm						

Fortsetzung Beispiel.

	duales Programm						
	Strukturvariablen			Schlupfvariablen			
BV	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$-Z$	**c**
u_2	$5/3$	1	0	$-1/24$	0	0	$5/12$
u_3	$-14/15$	0	1	$1/30$	$-1/60$	0	$1/3$
$-Z$	128	0	0	4	8	1	-360
	Wert der Schlupfvariablen			Wert der Strukturvariablen			
	primales Programm						

Interpretation: komplementärer Schlupf

Die Variablen des dualen LP entsprechen Bewertungsfaktoren bzw. Preisen für die Maschinenzeiten, die so festzulegen sind, dass

- der Gesamtwert aller Maschinenzeiten möglichst klein ist: $\min \mathbf{b}^T\mathbf{u}$,
- die Kosten für die Erzeugung der einzelnen Produkte mindestens gleich den mit diesen Produkten erzielten Gewinnen sind: $\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{E}\mathbf{u}' = \mathbf{c}$ und
- die Werte für die Maschinenzeiten nicht negativ sind: $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Bei optimaler Planung stimmen Gesamtgewinn der Produktion und Gesamtkosten für die Maschinenzeiten überein, die Zielfunktionswerte von primalem und dualem LP sind gleich.

Zusammenfassung

- Dualer Simplexalgorithmus für Minimumproblem, optimale Lösung ist primal und dual zulässig.
- Zusammenspiel von primalen und dualen Austauschschritten bei nachträglich hinzugefügten Nebenbedingungen oder Variablen.
- Zu jedem primalen LP gibt es ein korrespondierendes duales LP.
- Die Betrachtung sowohl des primalen als auch des dualen LP ermöglicht tiefergehende Einblicke in das zugrunde liegende Problem.
- Zueinander duale LPs sind eng miteinander verbunden: gegenseitige Schranken, Gleichheit der Zielfunktionen in den Optima, Entsprechungen bei Struktur-, Schlupf-, Basis-, und Nichtbasisvariablen.