



Lineare Optimierung

Aufgabenblatt 9

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 13. Dezember 2023.

Sollpunktzahl: 10 Punkte

Aufgabe 1 (Fourier-Motzkin-Elimination)

3+4=7 Punkte

Gegeben ist das folgende Ungleichungssystem mit drei Variablen:

$$\begin{array}{rcll} 3x + 2y + 4z & \leq & 10 \\ 3x & + & 2z & \leq 9 \\ 2x - y & & & \leq 5 \\ -x + 2y - z & \leq & 3 \\ -2x & & & \leq 4 \\ & 2y + 2z & \leq & 7 \\ x & & & \leq -1 \\ & -y & & \leq -1 \\ & & -z & \leq -2 \end{array}$$

- (a) Geben Sie ein äquivalentes Ungleichungssystem mit zwei Variablen an.
- (b) Bestimmen Sie, ob das Ungleichungssystem eine Lösung hat und geben Sie, falls existent, eine Lösung an.

Aufgabe 2 (LP mittels Fourier-Motzkin-Elimination lösen)

5 Punkte

Lösen Sie das LP $\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ (ohne Vorzeichenbeschränkungen) für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Fourier-Motzkin-Elimination.

Hinweise:

- Führen Sie die zusätzliche Variable z sowie die zusätzliche Ungleichung $-\mathbf{c}^T \mathbf{x} + z \leq 0$ ein.
- Anschließend führen Sie eine Fourier-Motzkin-Elimination mit z als letzter verbleibender Variablen durch.
- Wählen Sie nun z so groß wie möglich und ermitteln Sie durch Rückeinsetzen eine optimale Lösung.

- Um bei der Fourier-Motzkin-Elimination nicht mit Brüchen rechnen zu müssen, bietet es sich an, die Koeffizienten der zu eliminierenden Variable in den Ceiling- und Floor-Ungleichungen nicht auf 1 bzw. -1 zu bringen, sondern betraglich auf das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Koeffizientenwerte.

Beispiel: Wenn Sie als erstes die Variable x_3 eliminieren möchten, dann sorgen Sie dafür, dass die Koeffizienten von x_3 zu 40 bzw. -40 werden.