# Lineare Optimierung

## Aufgabenblatt 5

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 15. November 2023.

Sollpunktzahl: 14 Punkte

### Aufgabe 1 (Polyeder, Kreuzpolytop)

2+3+1+4+4=14 Punkte

(a) Geben Sie alle Ecken des 3-dimensionalen Kreuzpolytops

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 \right\}$$

an (ohne Begründung, siehe Folie 134).

(b) Begründen Sie formal, dass es sich bei den Punkten, die Sie in (a) angegeben haben, um Ecken handelt.

Hinweis: Nutzen Sie Satz 3.39.

(c) Wie viele Ecken hat das $n$-dimensionale Kreuzpolytop?

(d) Stellen Sie das 3-dimensionale Kreuzpolytop in der Form

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$$

mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{8 \times 3}$ und einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$ dar.

Hinweis: Ermitteln Sie hierzu die Stützhyperebenen der 2-dimensionalen Seiten.

(e) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\max 37x_1 + 28x_2 + 33x_3$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 5|y_1| + 3|y_2| + 4|y_3| \leq 15 \right\}.$$

Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen und begründen Sie, warum Ihr Verfahren eine optimale Lösung liefert.

### Aufgabe 2 (Eckenalgorithmus)

1+1+3+2+1=8 Punkte

Gegeben sei das LP

$$\max 16x_1 + 32x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} 20x_1 & + & 10x_2 & \leq & 8000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & \leq & 4500 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen $x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Bringen Sie das LP in Normalform.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}_{LP}$ beschränkt ist.

(c) Bestimmen Sie alle Ecken von $\mathcal{X}_{LP}$.

(d) Geben Sie eine optimale Lösung an.

(e) Welche optimalen Lösungen ergeben sich, wenn die Zielfunktion

$$\max 32x_1 + 16x_2$$

lautet?