Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Peter Becker

Lineare Optimierung

Aufgabenblatt 4

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 8. November 2023.

Sollpunktzahl: 8 Punkte

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Mengen) — 1+1+1+2=5 Punkte

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \neq \emptyset$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M ist konvex und beschränkt $\Rightarrow$ M hat mindestens eine Ecke.

(b) M ist konvex und abgeschlossen $\Rightarrow$ M hat mindestens eine Ecke.

(c) M ist konvex und $\mathbf{x}$ ist Ecke von M $\Rightarrow$ $\mathbf{x} \in \partial M$.

(d) M ist nicht konvex und $\mathbf{x} \in M$ $\Rightarrow$ für alle $\mathbf{y} \in M$ mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ existiert ein $\lambda \in (0,1)$ mit $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \notin M$.

Aufgabe 2 (Charakterisierung von Ecken) — 4 Punkte

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $\mathbf{x} \in M$.

Zeigen Sie:

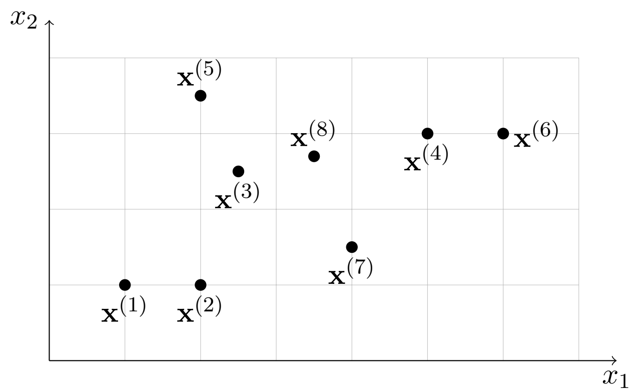
$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke} \quad \Longleftrightarrow \quad M \setminus \{\mathbf{x}\} \text{ ist konvex.}$$

Hinweis: Formulieren Sie die Aussage "$\mathbf{x}$ ist Ecke" in Prädikatenlogik und machen Sie logische Äquivalenzumformungen.

Aufgabe 3 (Konvexe Hülle, Polyeder) — 4 Punkte

Gegeben ist die Menge $M = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(8)}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^{(i)}$	1	2	2.5	5	2	6	4	3.5
$x_2^{(i)}$	1	1	2.5	3	3.5	3	1.5	2.7



Finden Sie eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times 2}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, so dass gilt:

$$\operatorname{conv}(M) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}.$$