

---

## Lineare Optimierung

### Aufgabenblatt 2

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 18. Oktober 2023.

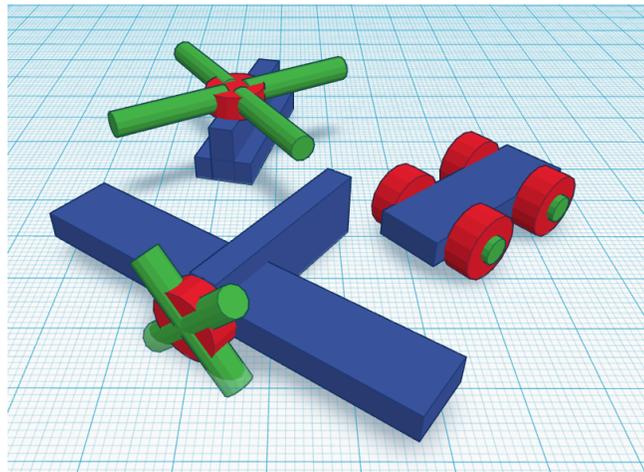
Sollpunktzahl: 12 Punkte

---

#### Aufgabe 1 (LP-Modelle, GLPK)

2+1+3+3+3=12 Punkte

- (a) Als Spielzeugbauer stellen Sie gerne Spielzeug her, um Spaß zu haben und Geld zu verdienen. Für Ihre neueste Produktionscharge müssen Sie entscheiden, wie viele Spielzeuge Sie herstellen wollen. Die drei Arten von Spielzeug, die Sie herstellen, sind Flugzeuge, Hubschrauber und Autos, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Um ein Flugzeug zu bauen, benötigt man drei blaue Blöcke, zwei grüne Stangen und ein rotes Rad. Für einen Hubschrauber benötigt man zwei blaue Blöcke, vier grüne Stangen und ein rotes Rad. Für ein Auto benötigt man einen blauen Block, zwei grüne Stangen und vier rote Räder.

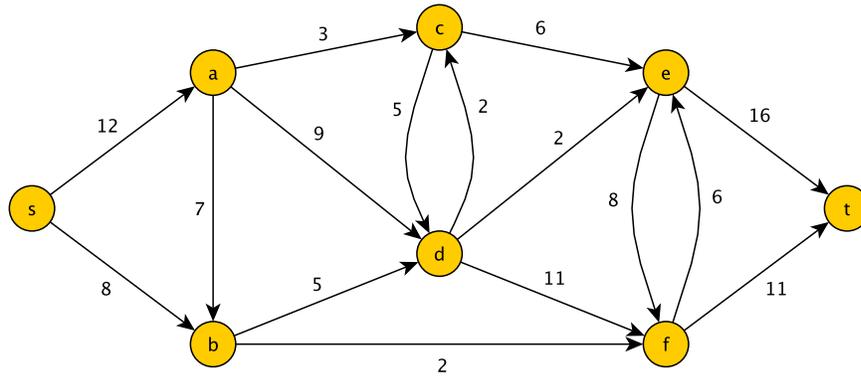
Ihre Gewinnspannen für jedes Spielzeug sind wie folgt: Flugzeug 7 €, Hubschrauber 8 €, Auto 5 €.

Folgende Teile stehen Ihnen zur Verfügung: 25 blaue Blöcke, 29 grüne Stangen und 30 rote Räder.

**Wie hoch ist der maximale Gewinn, den Sie erzielen können?**

Stellen Sie eine LP-Relaxation zur Lösung dieser Frage auf und berechnen Sie damit eine obere Schranke für den maximalen Profit.

- (b) Erweitern Sie Ihr LP-Modell aus (a) zu einem ganzzahligen LP und berechnen Sie damit eine optimale ganzzahlige Lösung und den maximalen Profit.
- (c) Lösen Sie mit einem LP das Maximalfflussproblem für das folgende Flussnetzwerk:



- (d) Ermitteln Sie mithilfe der Lösung von (c) manuell (also nicht mit einem LP) einen minimalen Schnitt für das Flussnetzwerk.
- (e) Eine Papierfabrik stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 3 Metern her. Die Kunden möchten jedoch Papierrollen mit einer geringeren Breite kaufen, und die Fabrik muss solche Rollen aus den 3-m-Rollen schneiden. Eine 3-m-Rolle kann z. B. geschnitten werden in zwei Rollen mit einer Breite von 93 cm, eine Rolle mit einer Breite von 108 cm und einen Rest von 6 cm, der dann Abfall ist.

Für einen Auftrag werden nun

- 97 Rollen mit einer Breite von 135 cm,
- 610 Rollen mit einer Breite von 108 cm,
- 395 Rollen mit einer Breite von 93 cm und
- 211 Rollen mit einer Breite von 42 cm

benötigt. Erstellen Sie ein ganzzahliges LP-Modell um zu ermitteln, wie viele Rollen zur Erfüllung des Auftrags benötigt werden und wie diese zu zerschneiden sind.

## Aufgabe 2 (Kontrollproblem als LP)

6 Punkte

Ein Hersteller von Speiseeis möchte seinen Produktionsplan für das kommende Jahr aufstellen. Es wird mit folgender Nachfrage (Mengeneinheiten) in den einzelnen Monaten gerechnet:

Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
350	320	420	680	690	550	750	720	430	480	440	600

Man sieht, dass die Nachfrage, die in jedem Monat zu erfüllen ist, deutlich unterschiedlich ausfallen kann. Die Anpassung der Produktion, also die Erhöhung oder Minderung der Produktion von einem Monat zum nächsten, verursacht aber Kosten, denn dafür müssen Arbeitskräfte angestellt oder entlassen werden und die Maschinenkapazität muss angepasst werden. Wir gehen davon aus, dass pro Mengeneinheit, die sich die Produktion von einem Monat zum nächsten ändert, Kosten in Höhe von 50 € anfallen.

Da Änderungen in der Produktion Kosten verursachen, könnte man auf die Idee kommen, in jedem Monat die gleiche Menge zu produzieren. Dies ist prinzipiell möglich, die Überproduktion in einem Monat muss dann aber zwischengelagert werden. Dafür fallen Kosten in Höhe von 20 € pro Mengeneinheit und Monat an.

Stellen Sie ein LP-Modell zur Berechnung eines optimalen Produktionsplans auf. Gehen Sie dabei davon aus, dass das Lager zu Beginn leer ist und auch am Ende des Jahres wieder leer sein soll. Die Produktion im letzten Monat des Vorjahres betrug ebenfalls 0.

**Hinweise:**

- Nutzen Sie folgenden Variablen:
  - $x_i \geq 0$ : Produktion in Monat  $i$
  - $y_i \geq 0$ : Produktionserhöhung in Monat  $i$  gegenüber dem Vormonat
  - $z_i \geq 0$ : Produktionsminderung in Monat  $i$  gegenüber dem Vormonat  
 Damit ist  $y_i - z_i$  die Produktionsänderung in Monat  $i$  gegenüber dem Vormonat.
  - $s_i \geq 0$ : Lagerbestand am Ende von Monat  $i$
- Stellen Sie für jeden Monat eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen der Produktion ( $x_i$ ), dem Lagerbestand am Ende des Vormonats ( $s_{i-1}$ ), der Nachfrage und dem Lagerbestand am Ende des aktuellen Monats ( $s_i$ ) beschreibt.
- Stellen Sie für jeden Monat eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen der Produktion im aktuellen Monat ( $x_i$ ), der Produktion im Vormonat ( $x_{i-1}$ ) und der Produktionsänderung ( $y_i - z_i$ ) beschreibt.