Lineare Optimierung

Aufgabenblatt 1

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 11. Oktober 2023.

Sollpunktzahl: 15 Punkte

Aufgabe 1 (Modellierung als LP)

3+4+4+4=15 Punkte

Formulieren Sie die folgenden Probleme als lineare Programme:

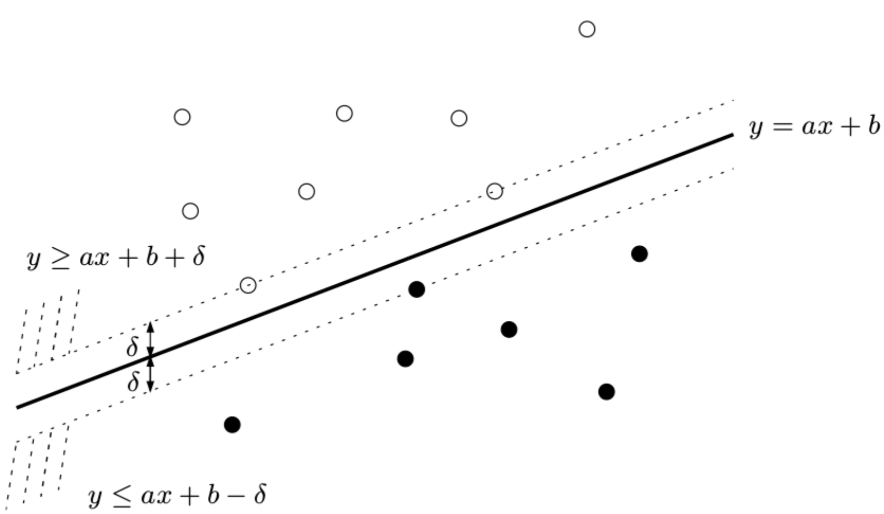
(a) Ein Haus mit 1000 qm Bodenfläche soll möglichst preisgünstig mit Bodenbelag ausgestattet werden, dessen jährliche Reinigungskosten 7000 EUR nicht übersteigen dürfen. Dabei sind mindestens 300 qm mit Parkett C (Preis: 60 EUR/qm, jährl. Reinigungskosten: 4 EUR/qm) auszustatten, während für den Rest die zwei Kunstoffsorten A (Preis: 30 EUR/qm, Reinigungskosten: 9 EUR/qm) und B (Preis: 40 EUR/qm, Reinigungskosten: 8 EUR/qm) zur Verfügung stehen.

(b) *Min-Cost-Flow-Problem*: Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_+$, eine Quelle $s \in V$, eine Senke $t \in V$ mit $t \neq s$, eine Kostenfunktion $k : E \to \mathbb{R}$ sowie eine Zahl $W \in \mathbb{R}_+$.

Gesucht ist ein Fluss $\mathbf{x}$ mit Flusswert $\Phi(\mathbf{x}) = W$, so dass die Gesamtkosten solch eines Flusses minimal sind. Dabei verursacht ein Fluss x_e auf einer Kante $e \in E$ Kosten in Höhe von $k(e)x_e$. Die Gesamtkosten sind die über alle Kanten summierten Kosten.

(c) Gegeben sind n Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ im $\mathbb{R}^2$, davon gehörgen n_1 Punkte zu einer Klasse A und n_2 Punkte zu einer Klasse B $(n = n_1 + n_2)$.

Gesucht ist eine Gerade $y = ax + b$, so dass alle Punkte der Klasse A oberhalb, alle Punkte der Klasse B unterhalb der Geraden liegen und der vertikale Abstand δ der Punkte, welche der Geraden am nächsten sind, maximiert wird. Die folgende Zeichnung veranschaulicht diese Optimierungsaufgabe.



(d) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine *Knotenüberdeckung (vertex cover)* von G ist eine Knotenmenge $U \subseteq V$, so dass für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ mindestens einer ihrer Knoten in U liegt. Gesucht ist eine Knotenüberdeckung U mit einer minimalen Anzahl an Knoten.

Hinweis: Modellieren Sie dieses Problem als ganzzahliges LP (siehe Definition 1.8).

Aufgabe 2 (Graphische Lösung) — 3+3=6 Punkte

(a) Lösen Sie das LP von Aufgabe 1 (a) graphisch.

Hinweis: Nutzen Sie eine der Nebenbedingungen, um eine Variable zu eliminieren.

(b) Beweisen Sie für das LP rechts in Beispiel 1.6 *formal*, dass keine zulässige Lösung existiert.

Hinweis: Leiten Sie aus den Ungleichungen der Nebenbedingungen einen Widerspruch her.