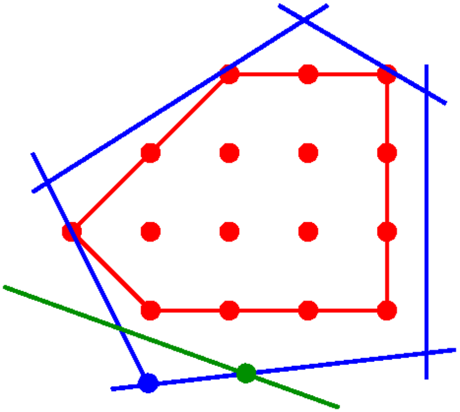
Kapitel 3

Schnittebenenverfahren



Inhalt

3 Schnittebenenverfahren

- Ganzzahlige lineare Programmierung
- Schnittebenenverfahren
- Konstruktion von Schnittebenen
- Auswahlkriterium für Schnittrestriktionen
- Schnittebenenverfahren mit Separation

Ganzzahliges lineares Programm

Definition 3.1

Ein lineares Programm mit zusätzlichen Bedingungen $x_i \in \mathbb{Z}$ für alle Variablen x_i heißt ganzzahliges lineares Programm (integer linear program, ILP).

Gilt $x_i \in \mathbb{Z}$ nicht für alle sondern nur für einige der Variablen, so spricht man von einem gemischt-ganzzahligen linearen Programm (mixed integer program, MIP).

Das lineare Programm, das entsteht, wenn wir in einem ILP bzw. MIP die Bedingungen für die Ganzzahligkeit weglassen, heißt LP-Relaxation.

Beispiele

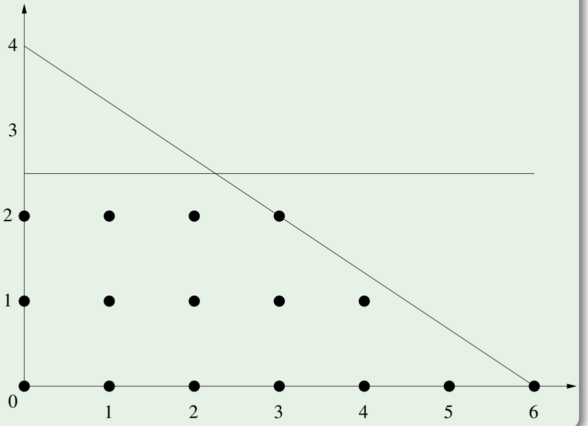
Beispiel 3.2

Wir betrachten das ILP

$$\max x_1 + 2x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} & & 2x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$



Fortsetzung Beispiel.

Die LP-Relaxation hat die optimale Lösung

$$\mathbf{x}' = (\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$$

mit einem Zielfunktionswert $z' = \frac{29}{4}$.

Das ILP hat dagegen als optimale Lösung

$$\mathbf{x} = (3, 2)$$

mit Zielfunktionswert $z = 7$.

Man beachte: Die ganzzahlige Lösung, die $\mathbf{x}'$ am nächsten liegt, ist nicht optimal.

Beispiel 3.3

Für das ILP

$$\max x_1 + 2x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} & & x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

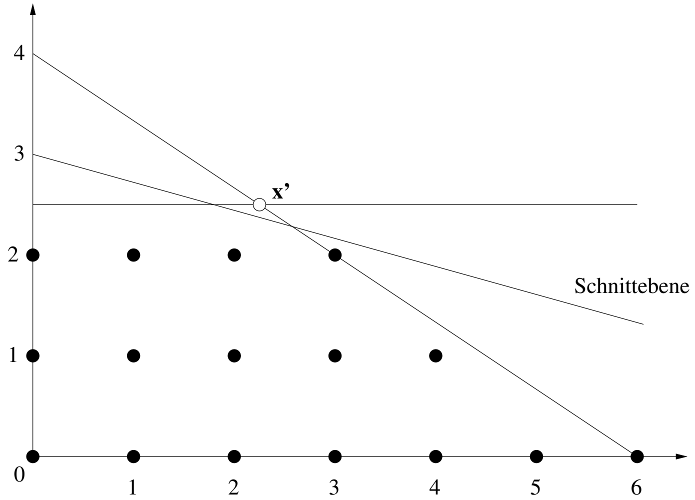
hat die LP-Relaxation die eindeutige optimale Lösung $\mathbf{x}' = (\frac{3}{2}, 3)$.
Das ILP hat dagegen zwei unterschiedliche optimale Lösungen: $\mathbf{x} = (3, 2)$ und $\mathbf{x} = (1, 3)$.

Grundidee von Schnittebenenverfahren

1. Bestimme die optimale Lösung $\mathbf{x}'$ der LP-Relaxation.
2. Gilt $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^n$, dann ist $\mathbf{x} := \mathbf{x}'$ eine optimale Lösung des ILP.
3. Ansonsten finde eine lineare Nebenbedingung (Schnittrestriktion), die
   - von allen zulässigen Lösungen des ILP erfüllt wird aber
   - von $\mathbf{x}'$ nicht erfüllt wird.
4. Füge diese Nebenbedingung dem ILP hinzu und gehe zu Schritt 1.

☞ $\mathbf{x}'$ wird aus dem Zulässigkeitsbereich der LP-Relaxation geschnitten.

Veranschaulichung



Begriffe

Schnittebenenverfahren werden auch als Cutting-Plane-Verfahren bezeichnet.

Die zur Schnittrestriktion gehörende Ebene ist die Schnittebene bzw. Cutting-Plane.

Das Verfahren wurde 1958 von dem amerikanischen Informatiker Ralph E. Gomory veröffentlicht.

Deshalb werden die Schnittrestriktionen auch als Gomory-Cuts bezeichnet, bzw. das Verfahren als Verfahren von Gomory.

Voraussetzungen

Gegeben sei ein Maximumproblem mit folgenden zusätzlichen Einschränkungen:

- der Begrenzungsvektor $\mathbf{b}$ ist ganzzahlig,
- die Koeffizienten des Zielfunktionsvektors $\mathbf{c}$ sind ganzzahlig und
- die Koeffizienten der Matrix $\mathbf{A}$ der Nebenbedingungen sind ganzzahlig.

Konsequenz: Schlupfvariablen und Zielfunktionswert sind ebenfalls ganzzahlig.

Beispielhafte Darstellung von Schnittebenenverfahren

Beispiel 3.4

Wir lösen beispielhaft das ILP von Beispiel 3.3. Zunächst lösen wir die LP-Relaxation.

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	0	1	1	0	3
x_4	2	3	0	1	12
z	-1	-2	0	0	0

x_2 ist Pivotspalte, x_3 Pivotzeile

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_2	0	1	1	0	3
x_4	2	0	-3	1	3
z	-1	0	2	0	6

Fortsetzung Beispiel.

x_1 ist Pivotspalte, x_4 Pivotzeile

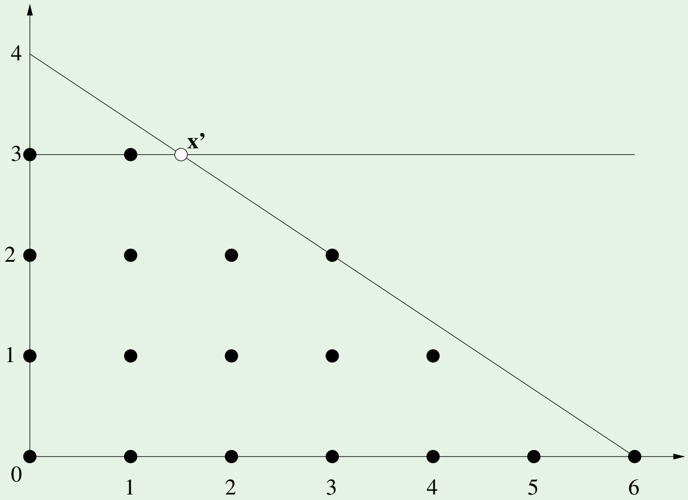
	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_2	0	1	1	0	3
x_1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$

Damit haben wir die optimale Lösung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

der LP-Relaxation ermittelt.

Fortsetzung Beispiel.



Fortsetzung Beispiel.

Wir betrachten die Zeile der nicht-ganzzahligen BV x_1:

$$x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2}$$

Wir formen die Gleichung um, indem wir alle Brüche aufspalten in einen ganzzahligen Anteil und einen Bruchanteil aus dem Intervall $(0, 1)$.

$$x_1 + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)x_4 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Jetzt bringen wir alle ganzzahligen Teile auf die linke und die Bruchteile auf die rechte Seite:

$$x_1 - 2x_3 - 1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \quad (*)$$

Fortsetzung Beispiel.

Wegen $x_3, x_4 \geq 0$ folgt $-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq 0$ und damit die Ungleichung

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Andererseits muss wegen $(*)$ die linke Seite der Ungleichung ganzzahlig sein. Daher können wir die Ungleichung verschärfen zu

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

bzw.

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{1}{2} \quad (**)$$

Diese Ungleichung wird von $\mathbf{x}'$ nicht erfüllt, aber von jeder ganzzahligen zulässigen Lösung.

Fortsetzung Beispiel.

Mit Hilfe der Schlupfvariablen x_5 fügen wir die Ungleichung $(**)$ dem ILP hinzu. Das neue Tableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	1	1	0	0	3
x_1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$

Dieses Tableau ist nicht primal zulässig, aber dual: Pivotzeile x_5, Pivotspalte x_3

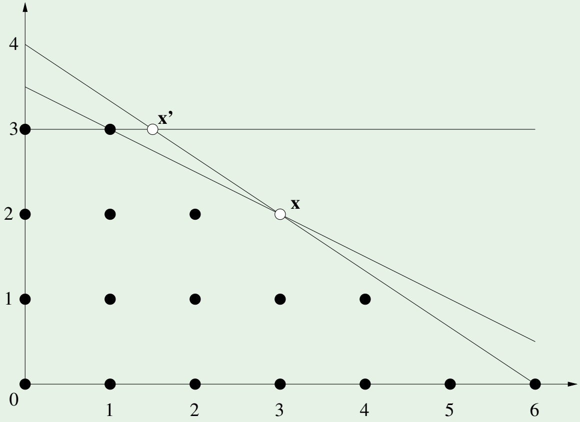
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	1	0	-1	2	2
x_1	1	0	0	2	-3	3
x_3	0	0	1	1	-2	1
z	0	0	0	0	1	7

Fortsetzung Beispiel.

Damit haben wir eine optimale Lösung **x** für das ILP.

In Strukturvariablen ausgedrückt lautet die Schnittrestriktion (Herleitung ✎) $x_1 + 2x_2 \leq 7$.

Visualisierung:



Ausgangssituation

Ausgangslage: Wir haben die LP-Relaxation mit dem primalen Simplexverfahren gelöst, das zugehörige Tableau liegt vor.

Bezeichungen:

- a^r_{ij}: Koeffizienten im Tableau
- b^r_i: Komponenten des Begrenzungsvektors im Tableau
- x^r_i: Variablenwerte

Für jede BV x^r_i gilt

$$x^r_i + \sum_{j \in I_{NBV}} a^r_{ij} x^r_j = b^r_i$$

Man beachte:

- I_{NBV} ist die Menge der Indizes der NBVs,
- $a_{ii}^r = 1$,
- $a_{ij}^r = 0$, falls x_j^r BV und
- $x_j^r = 0$, falls x_j^r NBV.

Daher insgesamt (wie bekannt)

$$x_i^r = b_i^r$$

Konstruktion von Schnittebenen

Definition 3.5

Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichne $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$ die ganze Zahl, für die

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a$$

gilt. $\lfloor a \rfloor$ heißt das größte Ganze von a.

Wir zerlegen nun die Koeffizienten b_i^r bzw. a_{ij}^r in

- ganzzahlige Anteile $\lfloor b_i^r \rfloor$ bzw. $\lfloor a_{ij}^r \rfloor$ und
- positive Bruchanteile $\beta_i^r \in (0, 1)$ bzw. $\alpha_{ij}^r \in [0, 1)$.

Damit gilt

$$\begin{aligned} b_i^r &= \lfloor b_i^r \rfloor + \beta_i^r \\ a_{ij}^r &= \lfloor a_{ij}^r \rfloor + \alpha_{ij}^r \end{aligned}$$

und es folgt mit der Gleichung von Folie 164

$$x_i^r + \sum_{j \in I_{NBV}} \lfloor a_{ij}^r \rfloor x_j^r + \sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r = \lfloor b_i^r \rfloor + \beta_i^r$$

Fassen wir die ganzzahligen Teile auf der linken und die Brüche auf der rechten Seite zusammen, ergibt sich

$$x_i^r + \sum_{j \in I_{NBV}} \lfloor a_{ij}^r \rfloor x_j^r - \lfloor b_i^r \rfloor = - \sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r + \beta_i^r$$

Wegen $x_j^r \geq 0$ und $\alpha_{ij}^r \geq 0$ folgt $-\sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r \leq 0$ und damit

$$-\sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r + \beta_i^r \leq \beta_i^r < 1$$

Andererseits muss die linke Seite dieser Ungleichung ganzzahlig sein, daher kann die Ungleichung zu ≤ 0 verschärft werden und es folgt die Schnittrestriktion:

$$-\sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r \leq -\beta_i^r$$

Als Gleichung mit zusätzlicher Schlupfvariable $r_i \geq 0$ ergibt sich für die Schnittrestriktion:

$$-\sum_{j \in I_{NBV}} \alpha_{ij}^r x_j^r + r_i = -\beta_i^r$$

Beispiel: Herleitung von Schnittebenen

Beispiel 3.6

Wir wollen das folgende ILP lösen:

$$\max x_1 + 2x_2$$

unter den Neben- und Vorzeichenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & \leq & 30 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & \leq & 36 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

Lösen der LP-Relaxation:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	6	5	1	0	30
x_4	4	9	0	1	36
z	-1	-2	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_3	$34/9$	0	1	$-5/9$	10
x_2	$4/9$	1	0	$1/9$	4
z	$-1/9$	0	0	$2/9$	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
x_1	1	0	$9/34$	$-5/34$	$45/17$
x_2	0	1	$-2/17$	$3/17$	$48/17$
z	0	0	$1/34$	$7/34$	$141/17$

Fortsetzung Beispiel.

Lösung ist nicht ganzzahlig. Mögliche Schnittrestriktionen:

1.

$$x_1 + \frac{9}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 = \frac{45}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + \left(0 + \frac{9}{34}\right)x_3 + \left(-1 + \frac{29}{34}\right)x_4 = \left(2 + \frac{11}{17}\right)$$

Daraus ergibt sich die Schnittrestriktion

$$-\frac{9}{34}x_3 - \frac{29}{34}x_4 \leq -\frac{11}{17}$$

bzw. als Gleichung mit zusätzlicher Schlupfvariable r_1

$$-\frac{9}{34}x_3 - \frac{29}{34}x_4 + r_1 = -\frac{11}{17}$$

Fortsetzung Beispiel.

2. Für die x_2-Zeile ergibt sich analog

$$-\frac{15}{17}x_3 - \frac{3}{17}x_4 \leq -\frac{14}{17} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{15}{17}x_3 - \frac{3}{17}x_4 + r_2 = -\frac{14}{17}$$

3. Auch aus der Zielfunktionszeile lässt sich eine Schnittrestriktion herleiten:

$$-\frac{1}{34}x_3 - \frac{7}{34}x_4 \leq -\frac{5}{17} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{34}x_3 - \frac{7}{34}x_4 + r_3 = -\frac{5}{17}$$

Eigenschaften

- Die bisher optimale Lösung ist wegen

$$r_i = \lfloor b_i^r \rfloor - b_i^r < 0$$

  nicht mehr zulässig.
- Alle anderen ganzzahligen zulässigen Punkte erfüllen dagegen die zusätzliche Ungleichung.
- Wir nehmen die zusätzliche Ungleichung zum Tableau hinzu. Dadurch entsteht auch eine neue Schlupfvariable.
- Wegen der negativen rechten Seite ist das entstehende Tableau nicht mehr primal, aber dual zulässig.
- Durch Anwendung des dualen Simplexalgorithmus erhalten wir eine optimale Lösung für die Relaxation mit zusätzlicher Ungleichung.

Auswahl einer Schnittrestriktion

- Prinzipiell könnten wir alle in Beispiel 3.6 hergeleiteten Schnittrestriktionen dem Tableau hinzufügen.
- Nachteil: Jeweils auch eine zusätzliche Schlupfvariable. Tableau wird größer, je mehr Schnittrestriktionen hinzugenommen werden.
- Deshalb: Auswahl genau einer Schnittrestriktion
- Welche?
- Auswahl kann entscheidend für die Effizienz sein.

Effizienz für verschiedene Schnittrestriktionen

Beispiel 3.7

Wir setzen Beispiel 3.6 fort.

Wir wählen die dritte Schnittrestriktion von Beispiel 3.6. Damit entsteht:

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_3	**b**
x_1	1	0	$9/34$	$-5/34$	0	$45/17$
x_2	0	1	$-2/17$	$3/17$	0	$48/17$
r_3	0	0	$-1/34$	$-7/34$	1	$-5/17$
z	0	0	$1/34$	$7/34$	0	$141/17$

Dual zulässig, r_3 ist Pivotzeile, wähle x_3 als Pivotspalte. Es entsteht:

Fortsetzung Beispiel.

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_3	**b**
x_1	1	0	0	-1	9	0
x_2	0	1	0	1	-4	4
x_3	0	0	1	7	-34	10
z	0	0	0	0	1	8

Damit haben wir eine optimale Lösung für das ILP.

Wir nehmen stattdessen die zweite Schnittrestriktion von Beispiel 3.6. Damit entsteht:

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_2	**b**
x_1	1	0	$9/34$	$-5/34$	0	$45/17$
x_2	0	1	$-2/17$	$3/17$	0	$48/17$
r_2	0	0	$-15/17$	$-3/17$	1	$-14/17$
z	0	0	$1/34$	$7/34$	0	$141/17$

Dual zulässig, r_2 ist Pivotzeile, x_3 Pivotspalte. Es entsteht:

Fortsetzung Beispiel.

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_2	**b**
x_1	1	0	0	$-1/5$	$3/10$	$12/5$
x_2	0	1	0	$1/5$	$-2/15$	$44/15$
x_3	0	0	1	$1/5$	$-17/15$	$14/15$
z	0	0	0	$1/5$	$1/30$	$124/15$

Nicht ganzzahlig. Wir müssten jetzt weitere Schnittrestriktionen herleiten.

Auswahlkriterium

☞ Wähle die Schnittrestriktion, deren Schnittebene den größten Abstand vom nicht-ganzzahligen Optimum hat.

Ebenendarstellung: Für $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ und $e \in \mathbb{R}$ beschreibt die Menge

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{d}^T \mathbf{x} + e = 0 \right\}$$

eine Ebene E des $\mathbb{R}^n$.

Der Vektor $\mathbf{d}$ ist ein Normalenvektor für die Ebene E, die Gleichung ist eine Normalengleichung für E.

Normierte Ebenendarstellung: Indem wir die Normalengleichung durch $\|d\|$ teilen, erhalten wir die Hessesche Normalform für eine Ebene:

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{\|d\|} \cdot \mathbf{d}^T \mathbf{x} + \frac{e}{\|d\|} = 0 \right\}$$

Der Vektor $\frac{1}{\|d\|} \cdot \mathbf{d}$ heißt Normaleneinheitsvektor.

Abstand Punkt zu Ebene: Der Abstand eines Punktes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ zu einer Ebene E ergibt sich, indem man $\mathbf{p}$ in die Gleichung der Hesseschen Normalenform für E einsetzt:

$$\text{distance}(p, E) = \frac{1}{\|d\|} \cdot \left| \mathbf{d}^T \mathbf{p} + e \right|$$

Beispiel: Auswahlkriterium

Beispiel 3.8

Wir führen die Berechnung für die drei Schnittebenen von Beispiel 3.6 durch. Wir haben

$$\mathbf{p} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 45 \\ 48 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Ebenengleichung:

$$-\frac{9}{34}x_3 - \frac{29}{34}x_4 + \frac{11}{17} = 0$$

   und damit

$$\text{distance}(p, E) = \frac{34}{\sqrt{9^2 + 29^2}} \cdot \frac{11}{17} = 0.7245\ldots$$

Fortsetzung Beispiel.

2. Ebenengleichung:

$$-\frac{15}{17}x_3 - \frac{3}{17}x_4 + \frac{14}{17} = 0$$

und damit

$$\text{distance}(p, E) = \frac{17}{\sqrt{15^2 + 3^2}} \cdot \frac{14}{17} = 0.9152\ldots$$

3. Ebenengleichung:

$$-\frac{1}{34}x_3 - \frac{7}{34}x_4 + \frac{5}{17} = 0$$

und damit

$$\text{distance}(p, E) = \frac{34}{\sqrt{1^2 + 7^2}} \cdot \frac{5}{17} = \sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Also wählen wir die 3. Schnittrestriktion wie in Beispiel 3.7.

Spezielle Schnittrestriktionen

- Das bisher betrachtete Verfahren zur Erzeugung von Schnittebenen ist allgemeiner Natur: Es kann für jedes ganzzahlige Problem eingesetzt werden.
- Solche problemunabhängigen Schnittebenen sind häufig nicht besonders leistungsfähig.
- Wir leiten in diesem Abschnitt mehrere Klassen von Schnittebenen her, die für bestimmte Probleme besonders geeignet sind.

Prinzipieller Ansatz

- Wir betrachten ein ILP mit ganzzahliger Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und ganzzahligem Begrenzungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.
  Nebenbedingungen: $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$
- Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{Q}$.
- Wir bilden mit den μ_i eine Linearkombination der Zeilen von $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$. Es entsteht die Ungleichung

$$\langle \mu, \mathbf{a}^{(1)} \rangle x_1 + \cdots + \langle \mu, \mathbf{a}^{(n)} \rangle x_n \le \langle \mu, \mathbf{b} \rangle.$$

- Gilt nun
  - $\langle \mu, \mathbf{a}^{(i)} \rangle \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n$, aber
  - $\langle \mu, \mathbf{b} \rangle \notin \mathbb{Z}$,

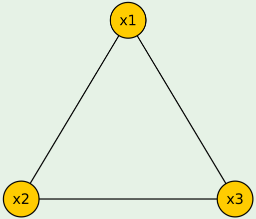
  dann können wir die Ungleichung verschärfen auf

$$\langle \mu, \mathbf{a}^{(1)} \rangle x_1 + \cdots + \langle \mu, \mathbf{a}^{(n)} \rangle x_n \le \lfloor \langle \mu, \mathbf{b} \rangle \rfloor.$$

Anwendung

Beispiel 3.9

Wir betrachten Independent Set als Optimierungsproblem für den folgenden Graphen:



Damit haben wir die Zielfunktion $\max x_1 + x_2 + x_3$ u. d. N.:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

Welche Lösung ist optimal für die LP-Relaxation $(0 \leq x_i \leq 1)$?

Fortsetzung Beispiel.

Optimal für die Relaxation ist $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ mit Zielfunktionswert $\frac{3}{2}$.

Mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Ungleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{3}{2}.$$

Diese können wir verschärfen zu

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

Die optimale Lösung der Relaxation erfüllt diese Ungleichung nicht.

Nehmen wir diese Ungleichung zur LP-Relaxation hinzu, erhalten wir eine optimale Lösung für das ganzzahlige Problem.

Gültige Ungleichung

Definition 3.10

Eine lineare Ungleichung (bzw. Gleichung), die von allen zulässigen Lösungen eines kombinatorischen Optimierungsproblems erfüllt wird, heißt gültige Ungleichung (bzw. gültige Gleichung) für dieses Problem.

Bemerkung:

- Die Identifikation von gültigen Ungleichungen für ein Problem kann sehr hilfeich für eine effizientere Behandlung sein.
- Für eine Reihe von Packungs- und Überdeckungsprobleme liefert der Ansatz aus Beispiel 3.9 eine wichtige Klasse von gültigen Ungleichungen.

Odd-Cycle-Ungleichungen (1)

- Wir verallgemeinern den Ansatz aus Beispiel 3.9.
- Wir betrachten Independent Set auf einem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Es sei $C = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_1})$ ein Kreis ungerader Länge $|C|$ in G.
- Wir setzen

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i \in \{i_1, \ldots, i_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten damit die gültige Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} =: x(C) \leq \frac{|C| - 1}{2}.$$

- Hierbei bezeichnet $x(C)$ die Summe aller Variablen/Knoten, die an C beteiligt sind.

Odd-Cycle-Ungleichungen (2)

Folgerung 3.11

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und C ein Kreis ungerader Länge in G

Die Ungleichung

$$x(C) \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

ist eine gültige Ungleichung für Independent Set.

Die Ungleichung

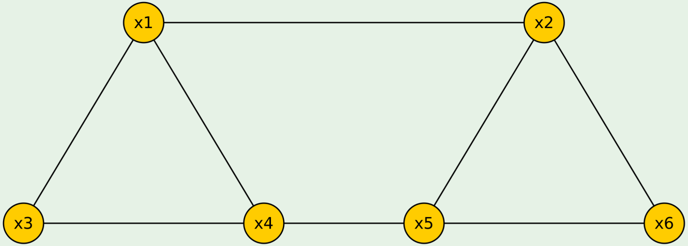
$$x(C) \geq \frac{|C| + 1}{2}$$

ist eine gültige Ungleichung für das Knotenüberdeckungsproblem (Vertex Cover).

VC mit Odd-Cycle-Inequality

Beispiel 3.12

Wir betrachten das Knotenüberdeckungsproblem für den folgenden Graphen.



Wir Lösen dieses Problem mithilfe von Odd-Cycle-Ungleichungen. ✎

Separationsproblem

Definition 3.13

Gegeben sei

- eine optimale Lösung $\mathbf{x}'$ einer LP-Relaxation für ein kombinatorisches Optimierungsproblem Π,
- aber $\mathbf{x}'$ sei nicht zulässig für Π.

Das Separationsproblem für eine Klasse K von gültigen Ungleichungen lautet dann:

- Man finde eine Ungleichung aus K, die von $\mathbf{x}'$ verletzt wird oder
- man zeige, dass keine solche Ungleichung existiert.

Bemerkung: Die gesuchte Ungleichung soll $\mathbf{x}'$ von der konvexen Hülle der zulässigen Lösungen separieren.

Diskussion Separationsproblem

- Häufig kann man das Separationsproblem nicht lösen.
- Dann finden wir innerhalb der Klasse K keine gültige Ungleichung, die verletzt ist.
- Dann müssen wir andere Klassen von Ungleichungen betrachten (falls bekannt) oder anders verfahren (siehe folgendes Kapitel).
- Außerdem können wir nicht erwarten, dass für alle Klassen K das Separationsproblem in polynomieller Zeit gelöst werden kann.
- In diesem Fall können auch Heuristiken für die Separation zum Einsatz kommen.

Schnittebenenverfahren mit Separation

Algorithmus 3.14

1. *Man löse die LP-Relaxation eines kombinatorischen Optimierungsproblems.*

   Sei $\mathbf{x}'$ die optimale Lösung der Relaxation.
2. *Separation: Man finde eine Klasse K von gültigen Ungleichungen und eine Ungleichung U aus K, die von $\mathbf{x}'$ verletzt wird.*
3. *Findet man in Schritt 2 keine verletzte Ungleichung, kann man eine Ungleichung U wie auf Folie 166 ff. beschrieben konstruieren.*
4. *Man erweitere die LP-Relaxation um die Ungleichung U.*

   Gehe zu Schritt 1.

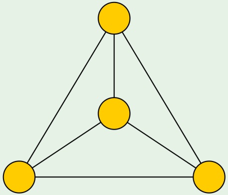
Wheel

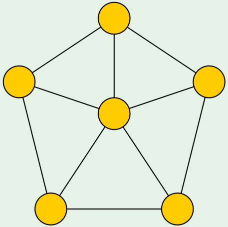
Definition 3.15

Ein Graph, der aus einem Kreis C und einem Knoten $v \notin C$ besteht, so dass v mit allen Knoten aus C adjazent ist, heißt Wheel-Graph.

Beispiel 3.16

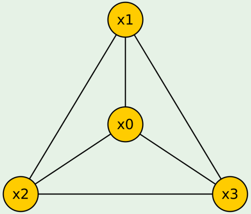
Wheel-Graph mit vier bzw. sechs Knoten.





Beispiel 3.17

Wir betrachten Independent Set auf dem linken Graphen von Beispiel 3.16.



Welche Lösung ist optimal für die LP-Relaxation?

Helfen hier Odd-Cycle-Ungleichungen weiter?

Wenn x_0, dann kein Knoten aus dem Kreis (x_1, x_2, x_3) und wenn nicht x_0, dann aus dem Kreis maximal ein Knoten. Also ist

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

eine gültige Ungleichung.

Wheel-Ungleichungen

Folgerung 3.18

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, W ein Wheel-Graph in G, der aus einem Kreis C ungerader Länge und einem Knoten x_0 besteht.
Dann ist die Ungleichung

$$\frac{|C| - 1}{2} x_0 + x(C) \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

eine gültige Ungleichung für Independent Set.

Die Ungleichung

$$\frac{|C| - 1}{2} x_0 + x(C) \geq |C|$$

ist eine gültige Ungleichung für das Knotenüberdeckungsproblem.

Rucksackproblem

Wir betrachten das Rucksackproblem in der Optimierungsvariante.

$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

u. d. N.

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C$$

und $x_j \in \{0, 1\}$.

Lösung einer Rucksack-Relaxation

Beispiel 3.19

$$
\begin{array}{rcl}
n & = & 7, \\
(p_j) & = & (70,\ 20,\ 39,\ 37,\ 7,\ 5,\ 10), \\
(w_j) & = & (31,\ 10,\ 20,\ 19,\ 4,\ 3,\ 6), \\
C & = & 50
\end{array}
$$

Optimale Lösung der Relaxation:

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = \frac{9}{20}, x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

Knapsack-Ungleichungen

- Gegeben sei ein Rucksackproblem mit n Gegenständen.
- Als Knapsack-Cover bezeichnen wir eine Indexmenge $O \subseteq \{1, \ldots, n\}$ für die gilt:

$$\sum_{j \in O} w_j > C$$

- Ein Knapsack-Cover O heißt minimal, wenn

$$\sum_{j \in O \setminus \{j'\}} w_j \leq C$$

  für alle $j' \in O$ gilt.
- Wenn O ein Knapsack-Cover ist, dann ist

$$\sum_{j \in O} x_i \leq |O| - 1$$

  eine gültige Ungleichung.

Beispiel 3.20

Wir konstruieren für Beispiel 3.19 einige Knapsack-Cover und die zugehörigen Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 &\leq 3 \\ x_1 + x_4 + x_5 &\leq 2 \end{aligned}$$

Die optimale Lösung der Relaxation verletzt die erste Ungleichung.

Wir lösen das Rucksackproblem mittels Separation, also indem wir schrittweise weitere Knapsack-Ungleichungen hinzufügen. ✎
Die optimale Lösung ist

$$x_1 = x_4 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

mit einem Zielfunktionswert von 107.

Erweiterte Knapsack-Ungleichungen (1)

- Es sei O ein Knapsack-Cover.
- Wir definieren das erweiterte Knapsack-Cover $E(O)$ durch

$$E(O) = O \cup \{1 \leq j \leq n | w_j \geq \max_{i \in O} w_i\}$$

- Wenn $E(O)$ ein erweitertes Knapsack-Cover ist, dann ist

$$\sum_{j \in E(O)} x_j \leq |O| - 1$$

  eine gültige Ungleichung.
- Wenn $E(O) \neq O$ gilt, dann ist diese Ungleichung strenger als die ursprüngliche.

Erweiterte Knapsack-Ungleichungen (2)

Beispiel 3.21

Für das Problem aus Beispiel 3.19 ist

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

die Ungleichung zum Knapsack-Cover $O = \{2, 3, 4, 5\}$.

Es gilt $E(O) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Damit kann die Ungleichung zu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

verschärft werden.

Knapsack-Ungleichungen verwenden

- Wir betrachten ein Binary Program

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \text{ u. d. N. } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \{0,1\}^n,$$

  wobei alle Elemente von **A** nicht negativ sind.
- Jede Ungleichung des Problems entspricht einzeln betrachtet einer Einschränkung beim Rucksackproblem.
- Wir können also für jede Ungleichung die Knapsack-Cover-Ungleichungen hinzufügen.

Beispiel 3.22

Wir lösen

$$\max 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

u. d. N.

$$\begin{aligned} 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 &\leq 13 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

mithilfe von Knapsack- und Odd-Cycle-Ungleichungen. ✎

Optimale Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

Zusammenfassung

- Mit Schnittebenenverfahren können wir prinzipiell ILPs lösen.
- **Problem:** Tableau und Rechenaufwand wird mit jeder zusätzlichen Schnittebene größer.
- Weitere Probleme: numerische Instabilität, Terminierung
- Spezielle Klassen von Ungleichungen:
  - Odd-Cycle-Ungleichungen
  - Wheel-Ungleichungen
  - Knapsack-Ungleichungen
- **Ausblick:** Kombination solcher Schnittebenen mit Verfahren des nächsten Kapitels